Gráfelmélet/Diszkrét Matematika MSc hallgatók számára

Síkrarajzolt gráfok tartomány-színezései

2018. Előadó: Hajnal Péter

1. Síkgráfok, négy-szín-tétel

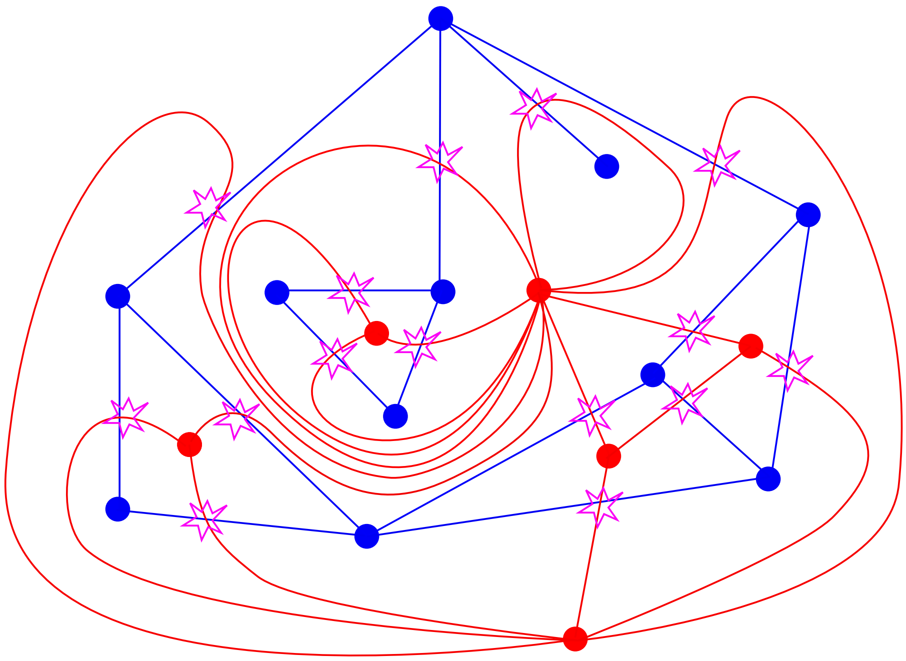
A színez'esi problémák fontos alkalmazásokkal rendelkeznek. A gráfelméleti vizsgálatuk mégis egy „fejtörővel" kezdődtek a XIX. században. Az ösztönző probléma a négy-szín-sejtés volt. Manapság már tételként ismerjük ezt (angolul 4-color-theorem, rövidítve 4CT).

A továbbiakhoz fel kell idéznünk a síkrarajzolt gráfokról a BSc-s Kombinatorika kurzusban tanultakat. Egy gráf szép síkra rajzolása (élgörbék belső pontban nem találkoznak, azaz egyetlen talákozási mód, hogy közös csúcspont az egyik végpontjuk) a gráfelmélet nyelvét gazdagítja. Többek között beszélhetünk tartományokról, duális síkrarajzolt gráfról. Egy gráf síkgráf, ha szépen lerajzolható a síkra.

A négy-szín-sejtés/tétel mai megszokott alakja: Minden hurokél nélküli G síkgráf esetén $\chi(G) \leq 4$.

2. Tartományok, dualitás

A következő ábrán egy síkrarajzolt gráfot (kék) és duálisát (piros) láthatjuk.



Az ábrán látható lila csillagok párbaállítják az eredeti és duális gráf éleit.

A következő táblázatban összefoglaljuk síkrarajzolt gráf és duálisa közötti sokrétű kapcsolatot.

EREDETI	DUÁLIS
G síkra rajzolt gráf	G^* síkra rajzolt gráf
tartományok/országok	csúcsok/fővárosok
élek	élek
közös határéllel rendelkező (szomszédos) tartományok	szomszédos csúcsok
tartományszínezés	csúcsszínezés
jó tartományszínezés (szomszédos tartományok különböző színűek)	jó csúcsszínezés
jó színezhetőség feltétele: nincs olyan él, amely mindkét oldalán ugyanaz a tartomány fekszik	jó színezhetőség feltétele: nincs hurokél
csúcsok	tartományok
egy csúcsban összefutó élek	egy tartományt határoló élek
fokszám	határ bejárásának hossza
Négy-szín-tétel ($4CT$): kétszeresen élösszefüggő síkra rajzolt gráf tartományai négy színnel jól színezhetők	Négy-szín-tétel ($4CT$): hurokélmentes síkra rajzolt gráf csúcsai négy színnel jól színezhetők
Színezés esetén feltehető: G háromreguláris	Színezés esetén feltehető: minden tartomány háromszög (gráfunk triangulált)

Megjegyezzük, hogy 3-regularitás esetén a mohó algoritmus minden gráfot jól csúcsszínez. Illetve duálisan triangulált síkrarajzolt gráf tartományai nyilvánvalóan jól 4-színezhetők.

A fentiek (dualitás) alapján a négy-szín-tétel megfogalmazható tartomány, illetve csúcsszínezési változatban is.

3. A négy-szín-sejtés mint élszínez'esi probléma

A következő tétel egy harmadik ekvivalens alakot ad, amely élszínezési problémaként fogalmazza meg a központi kérdést/tételt.

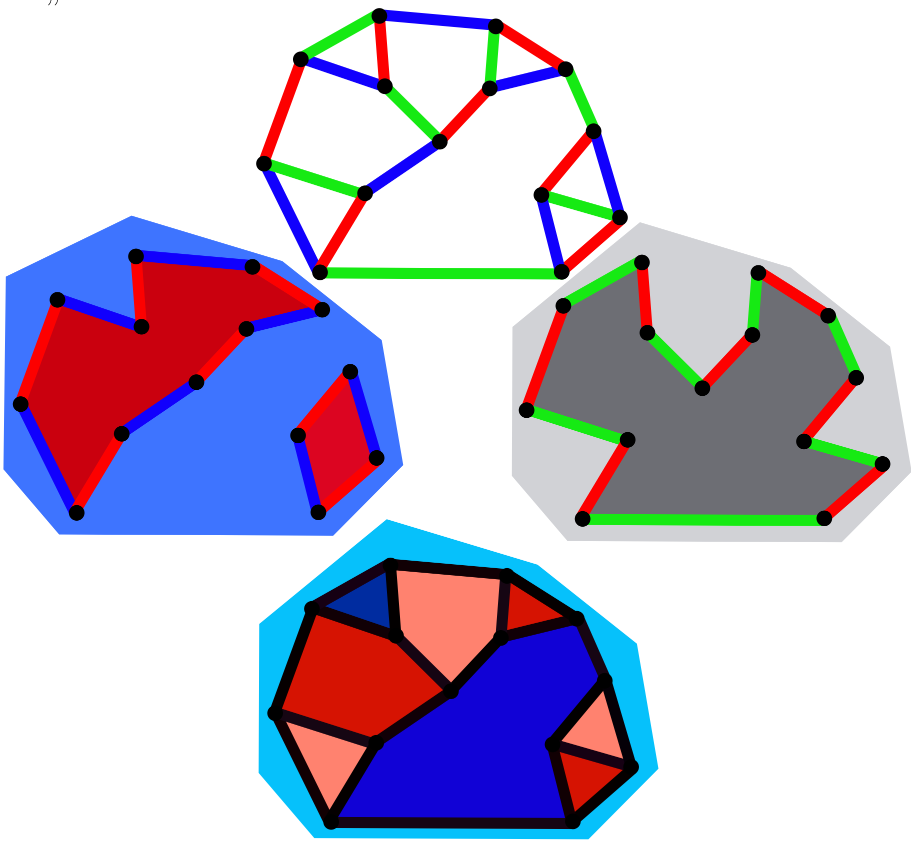
1. Tétel. *A következő két állítás ekvivalens:*

(i) Ha G 3-reguláris, 2-szeresen élösszefüggő síkgráf, akkor $\chi_e(G) = 3$.

(ii) 4CT.

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$ a 4CT tartományszínezési verziója 3-reguláris gráfokra. Legyen G egy a síkra szépen lerajzolt 3-reguláris kétszeresen élösszefüggő gráf.

Tudjuk, hogy G élhalmaza M_1, M_2, M_3 teljes párosítások uniója. Legyen $M_1 + M_2$ az $M_1 \cup M_2$ élek által meghatározott feszítő részgráf G-ben. $M_1 + M_2$ egy 2-reguláris részgráf, azaz komponensei körök. Nyilván a részgráfunknak is szépen lerajzolt ésK könnyen látható, hogy az $M_1 + M_2$ tartományai jól színezhetők két színnel (például a komponensek sz'amára vonatkozó teljes indukcióval). Legyen ez a két szín „piros" és „kék". Hasonlóan $M_1 + M_3$ tartományai is jól színezhetők két színnel. Legyen ez „világos" és „sötét".



Így a síkot kétszer is kiszíneztük, speciálisan a G gráf lerajzolásának minden tartománya kétszer is színt kapott. Egy tartomány kapott színpárja négyféle lehet: „világoskék", „világospiros", „sötétkék", „sötétpiros". Ez egy jó 4-színezése G-tartományainak, mivel bármelyik két szomszédos tartomány $M_1 + M_2$-ben vagy $M_1 + M_3$-ben is külöböző tartományba esik, így színeiknek már ezen komponense is megkülönbözteti őket.

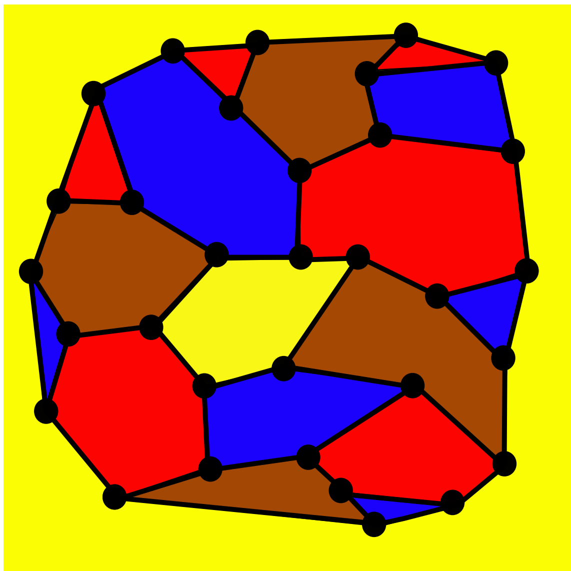
A 4CT tartományszínezési változata 3-reguláris gráfokra $\Rightarrow$ (i): Tehát tudjuk, hogy a G kétszeresen élösszefügggő, 3-reguláris síkgráf tartományait jól 4-színezhetjük. Legyen $1, 2, 3, 4$ a felhasznált színek.

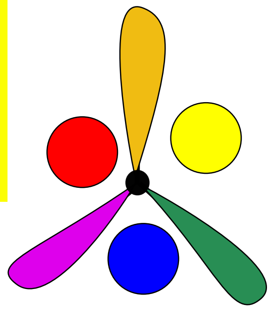
Legyen

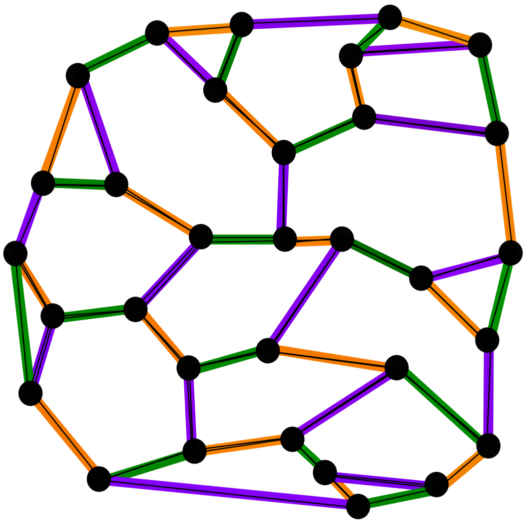
$$M_1 := \{e \in E(G) | \ e \text{ két oldalán } 1,2 \text{ vagy } 3,4 \text{ színt látjuk}\},$$

$$M_2 := \{e \in E(G) | \ e \text{ két oldalán az } 1,3 \text{ vagy } 2,4 \text{ színt látjuk}\},$$

$$M_3 := \{e \in E(G) | \ e \text{ két oldalán az } 1,4 \text{ vagy } 2,3 \text{ színt látjuk}\}.$$







Belátjuk, hogy ekkor M_1, M_2, M_3 teljes párosítások G-ben és diszjunktak.

A diszjunktság triviális a definíciókból.

Először azt igazoljuk, hogy M_1, M_2, M_3 párosítások: Tegyük fel, hogy $e, f \in M_i$ valamely $i = 1,2,3$ esetén és az x csúcs illeszkedik e-re és f-re is. x-ben három tartomány fut össze: τ_1, τ_2, τ_3. Ezek különböző színűek. Így e és f nem lehet ugyanabban az M_i élhalmazban.

Végül $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = E(G)$. Valóban, úgy definiáltuk az M_i-ket, hogy bármely két szín találkozik egy e él két oldalán az valamelyik M_i halmaz definíciójának eleget tesz. (A $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség mindegyike szerepel a három definícióban.)

Ebből adódik az állítás. ■

A fenti három formája a négy-szín-sejtésnek a XIX. századi matematika eredménye. A XX. század, benne a számítógépek elterjedésével elvezetett a négy-szín-sejtés igazolásához. A négy-szín-sejtés bizonyítása után a következő tételt mondhatjuk ki.

2. Tétel. *Ha G 3 reguláris 2-szeresen élösszefüggő, továbbá síkgráf is, akkor élhalmaza három teljes párosítás uniója, azaz találhatók olyan M_1, M_2, M_3 teljes párosítások G-ben, hogy $M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup M_3 = E(G)$ teljesüljön.*

Megjegyzés. A síkgráf feltétel szükséges. Az ellenpéldát Petersen adta. Petersen-gráf: 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő, nem síkgráf, és élhalmaza nem áll elő $M_1 \dot\cup M_2 \dot\cup M_3$ alakban, ahol az M_i-k párosítások.