Halmazrendszerek és alapvető extremális problémáik

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Sperner-rendszer

Definíció

$\mathcal{S}$ Sperner-rendszer V ($n := |V|$) felett, ha bármely $E, E' \in \mathcal{S}$-re $E \not\subset E'$.

A témakör fő kérdése: Mekkora lehet V felett a legnagyobb elemszámú Sperner-rendszer?

Sperner-tétel

Példa

Bármely $0 \leq k \leq n$ esetén $S = \binom{V}{k} = \{R \subset V : |R| = k\}$ Sperner-rendszer. Ennek $\binom{n}{k}$ eleme van. $k = [n/2]$ esetén kapjuk a legnagyobb elemszámú rendszert.

(Sperner-tétel)

A V feletti Sperner-rendszerek maximális elemszáma $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

I. Bizonyítás

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy n elemű V feletti halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{H}$ f-vektora az a $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ vektor, amely f_i komponense megmondja, hogy hány i elemű él szerepel $\mathcal{H}$-ban.

(LYM-egyenlőtlenség)

Legyen S egy Sperner-rendszer V felett. Ekkor f-vektorára

$$\sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq 1.$$

A lemma elnevezése onnan ered, hogy Lubell, Yamamoto és Meshalkin bizonyította egymástól függetlenül. Neveik kezdőbetűiből állították össze a hivatkozást. Gyakran Bollobás Béla nevét is a lemmához fűzik, aki egy rokon állítást igazolt

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása

Legyen π egy tetszőleges $V \to [n]$ bijekció, és $E \in S$ tetszőleges elem. Számoljuk össze azon (π, E) párokat, melyekre $\pi(E)$ $[n]$-nek egy kezdőszelete.

Ha minden egyes $E \in S$-hoz megszámoljuk az összes jó π sorbarendezést, akkor azt kapjuk, hogy $\sum_{E\in S} |E|! \cdot (n - |E|)!$ ilyen pár van.

Legyen most π tetszőleges sorbarendezés. Mivel a tartalmazás reláció teljes rendezés $[n]$ kezdőszeletein, ezért ha $\pi(E_1), \pi(E_2)$ kezdőszelete $[n]$-nek, akkor $E_1 \subset E_2$ vagy $E_2 \subset E_1$. Így ha π sorbarendezés, akkor legfeljebb egy E halmaz esetén lehet $\pi(E)$ kezdőszelete $[n]$-nek.

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása: befejezés

A két választ vessük össze.

$$\sum_{E\in S}|E|!\cdot(n-|E|)!\leq n!$$

Mindkét oldalt $n!$-sal osztva kapjuk a lemma állítását.

$$1\geq\sum_{i=0}^{|V|}\frac{f_i}{\binom{n}{i}}\geq\sum_{i=0}^{|V|}\frac{f_i}{\binom{n}{[n/2]}}=\frac{|\mathcal{S}|}{\binom{n}{[n/2]}}.$$

Részbenrendezett halmazok

Definíció

Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $L \subset P$ lánc, ha L bármely két eleme összehasonlítható.

Definíció

Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $A \subset P$ antilánc, ha A elemei páronként nem összehasonlíthatók.

A $(\mathcal{P}(V), \subset)$ feletti antiláncok pontosan a V feletti Sperner-rendszerekkel egyeznek meg.

II. Bizonyítás Sperner-tételre

Észrevétel

Bármely L láncra és A antiláncra $|P \cap A| \leq 1$.

Állít

Amennyiben adott $L_1, L_2, ..., L_k$ láncok, melyek lefedik P-t, akkor bármely P feletti antilánc legfeljebb k elemű lehet.

Következmény

$$\max_{A \text{ antilánc}} (|A|) \leq \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

Lemma

Lemma

$(\mathcal{P}(V), \subset)$-en létezik $\binom{n}{[n/2]}$ láncot tartalmazó lefedés.

Definíció

$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V)$, $\mathcal{L} : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_t$ szimmetrikus lánc, ha van olyan i, hogy $|L_1| = i, |L_2| = i + 1, \ldots, |L_t| = |V| - i$.

Lemma

$(\mathcal{P}(V), \subset)$-nak létezik diszjunkt szimmetrikus láncokkal való fedése.

A szimmetrikusság miatt minden láncban szerepel egy $[n/2]$ elemszámú halmaz. Így a felhasznált láncok száma szükségszerűen $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Lemma bizonyítása

$|V| = 1, 2, 3$ esetén triviálisan teljesül az állítás. Az indukciós lépéshez legyen $|V| > 1$. Ekkor: $V = V_0 \dot{\cup} \{u\}$, ahol V_0-ról már tudjuk hogy létezik ilyen fedés.

$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V_0) \dot{\cup} \{R \subset V : u \in R\}$. Legyen $\mathcal{P}(V_0) = \mathcal{L}_1 \dot{\cup} \mathcal{L}_2 \dot{\cup} ... \dot{\cup} \mathcal{L}_k$ az indukciós feltevésből. Ekkor az $\mathcal{L}_t : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j$ láncból az alábbi láncok képezhetők:

$$\mathcal{L}'_t : L_1 \cup \{u\} \subset L_2 \cup \{u\} \subset \ldots \subset L_{j-1} \cup \{u\},$$

valamint

$$\mathcal{L}''_t : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j \subset L_j \cup \{u\}.$$

Látható, hogy ezek szimmetrikusak a $V_0 \cup \{u\}$ alaphalmazra, páronként diszjunktak. Így a tétel állítását igazolják. Ebből adódik a lemma és így a Sperner-tétel is.

Megjegyzés

Úgy tűnik mintha induktív/rekurzív konstrukciónk közben láncaink száma mindig megduplázódott volna. Pedig a láncok száma nem kettő hatványként növekszik, számuk $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

A látszólagos ellentmondás feloldása, hogy $\mathcal{L}'_i$ lehet üres is.

Szünet

title

A második bizonyítás mélyén a részbenrendezett halmazok matematikai elmélete húzódik meg.

Tétel

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.

(i)

$$\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \min_{A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ antiláncfedés}} k$$

(ii) (Dilworth-tétel)

$$\max_{A \text{ antilánc}}(|A|) = \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

Mindkét esetben csak azt kell igazolnunk, a maximalizálási feladat optimuma nagyobb a minimalizálásai feladaténál.

Bizonyítás (i)

Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét. (Jól definiált az érték, hiszen $\{x\}$ mindig egy x-et maximális elemként tartalmazó lánc.)

A hozzárendelés értékkészlete $\{1, 2, \ldots, M\}$. Legyen A_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ azon P-beli elemek halmaza, amikhez az i értéket rendeljük hozzá.

Így M halmazzal fedjük le P-t. Ha belátjuk, hogy mindegyik A_i antilánc, akkor készen vagyunk.

Ez indirekten könnyen adódik, ha $x < y$ és $x, y \in A_i$, akkor az $x \in A_i$-t bizonyító i elemű lánchoz y-t adva egy olyan $i + 1$ elemű láncot kapunk, amely ellentmond az $y \in A_i$ feltevésnek.

Bizonyítás (ii): A terv

Legyen $M = \max\{|A| : A \text{ antilánc}\}$ és
$m = \min\{k : L_1, L_2, \dots, L_k \text{ fedő láncok}\}$.

$(P, \leq)$ alapján definiálunk egy B páros gráfot.

V A két színosztálya $F = \{p^+ : p \in P\}$ és $A = \{p^- : p \in P\}$.

E p^+ és q^- akkor és csak akkor van összekötve, ha $p > q$.

Célunk, hogy belássuk $\nu(B) = |P| - m$ és $\tau(B) = |P| - M$.

Ezek után már adódik az állítás Kőnig tételéből.

$\nu(B) = |P| - m$

Egy láncfedésben szereplő $L : \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_s$ láncnak megfeleltethetők az $\ell_1^+\ell_2^-, \ell_2^+\ell_3^-, \ldots, \ell_{s-1}^+\ell_s^-$ élek.

Ezt az összes láncra megtéve $|P| - m$ élt kapunk, amelyek egy párosítást alkotnak.

A konstrukciónk megfordítható: egy M párosítás p^+q^- éleiből képezzük a P csúcshalmazon a pq éleket.

Az így kapott gráf utak egy rendszere lesz.

A komponensek ponthalmazai láncok, amelyek lefedik P-t. Így adódik a $\nu(B) = |P| - m$ összefüggés.

$\tau(B) = |P| - M$

Legyen A egy maximális elemszámú antilánc.

$P - A$ elemeit osszuk két részbe: L^--t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél kisebbek. L^+-t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél nagyobbak.

Nyilván L^+ és L^- diszjunkt, továbbá együtt kiadja $P - A$-t.

$R = \{p^+ : p \in L^+\} \dot\cup \{p^- : p \in L^-\}$ egy $|P| - M$ méretű lefogó halmaz.

$\tau(B) = |P| - M$ (folytatás)

A gondolatmenet megfordítható: Minden $R \subset V(B)$ meghatározza P egy felosztását négy részre

$$P = P^+(R) \dot\cup P^-(R) \dot\cup P^\pm(R) \dot\cup P^0(R)$$

aszerint, hogy $p \in P$ esetén $\{p^+, p^-\}$ hogy viszonyul R-hez.

Ekkor

$$R = \{p^- : p \in P^+(R)\} \dot\cup \{p^+ : p \in P^-(R)\} \dot\cup \{p^-, p^+ : p \in P^\pm(R)\}.$$

Ha R lefogó, akkor $P^0(R)$-nek antiláncnak kell lennie.

Ha $|R|$-t minimálisnak szeretnénk, akkor $P^\pm(R)$ optimális választása $\emptyset$.

Részbenrendezett halmazok és gráfok

A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak megfeleltetünk egy G_p összehasonlítási gráfot: Ennek az egyszerű gráfnak a csúcshalmaza P és két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha összehasonlíthatók.

Észrevétel

$$\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \omega(G_P),$$

$$\min_{A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ antilánc fedés}} k = \chi(G_P),$$

$$\max_{A \text{ antilánc}}(|A|) = \alpha(G_P) = \omega(\overline{G_P}),$$

$$\min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ lánc fedés}} k = \chi(\overline{G_P}).$$

Gráfelmélet

Az előző tétel kapcsolatai vezetnek el a következő gráfelméleti fogalomhoz:

Definíció

Egy G gráf perfekt, ha minden F feszített részére (csak csúcselhagyásokkal nyerhető részgráfja)

$$\omega(F) = \chi(F).$$

Tétel

Legyen G_P egy $(P, \leq)$ egy részben rendezett halmaz összehasonlítási gráfja. Ekkor

(i) G_P perfekt,

(ii) $\overline{G_P}$ perfekt.

Szünet

Metsző halmazrendszerek

Definíció

Egy halmazrendszert metszőnek nevezünk, ha bámely két éle metszi egymást.

Azaz egy halmazrendszer metsző, ha tiltjuk a diszjunkt élpárokat.

Az alap extremális kérdés, hogy milyen sok éle lehet egy n elemű ponthalmaz feletti metsző halmazrendszernek.

Metsző halmazrendszerek: Példák

Példa

Legyen $x \in V$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes x-et tartalmazó halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Példa

Legyen V egy n elemű halmaz, ahol n páratlan, $n = 2k + 1$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes legalább $k + 1$ elemű halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Példa

Ha az alaphalmaz pontszáma páros és a pontosan $|V|/2$ elemű halmazok által alkotott komplementer párok mindegyikéből csak egyiket rakjuk $\mathcal{H}$-ba, a több mint $|V|/2$ elemű halmazok mellé.

Egy középiskolás feladat

Észrevétel

Egy n elemű V halmaz feletti metsző halmazrendszerek legfeljebb 2^{n-1} élt tartalmaznak.

A fenti példák extremálisak.

Valóban: V 2^n darab részhalmazát 2^{n-1} darab komplementer halmazpárra oszthatjuk. Ezek mindegyikéből legfeljebb egyet tartalmazhat metsző halmazrendszerünk.

A valódi probléma

Jóval nehezebb kérdést kapunk, ha k uniform halmazrendserekkel dolgozunk.

$k > |V|/2$ esetben itt sem lesz gond: az összes k-as metsző rendszert alkot.

$k \leq |V|/2$ esetben azonban egy alaptétel válaszolja meg kérdésünket.

Tétel (Erdős—Ko—Rado-tétel)

Legyen $k \leq n/2$. Legyen $\mathcal{H}$ egy k uniform metsző halmazrendszer egy n elemű V csúcshalmaz felett. Ekkor

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

Becslésünk a lehető legjobb, amit egy x elemet tartalmazó összes k elemű halmaz mutat.

Körszerúen rendezett halmazok, ívek

K-t alkossa egy kör n pontja. Ezen pontok között van egy óra mutató járása szerinti rákövetkezés, ami pontjaink egy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sorrendjét eredményezi, ahol az indexek aritmetikája modulo n értendő.

$I \subset K = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ esetén azt mondjuk, hogy I az $[a, z]$ ív, ha I tartalmazza a-t és rákövetkezőit, z-ig bezárólag, azaz létezik $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ és $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $I = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+\ell-1}\}$.

$\ell = |I|$ az I ív hossza.

Hány k hosszú ív választható ki úgy, hogy metsző rendszert alkossanak?

Megoldás

k ív kiválasztható (például $[a_1, a_k], [a_2, a_k], \ldots, [a_k, a_{2k-1}]$), több nem.

Valóban: Ha $I = [a_i, \ldots, a_{i+k-1}]$ egy ív rendszerünkből, akkor a többi ívünk mindegyik metszi I-t.

Az I-t metsző íveink $k-1$ komplementerpárba oszthatók: egy tipikus pár az a_j-ben végződő és a_{j+1}-ben kezdődő két ív. (Itt használjuk, hogy $2k \leq n$.)

Így valóban nem lehet $1 + (k-1)$-nél több ívünk.

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer.

Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között.

Számoljuk össze azon (π, E) párokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $\pi(E)$ egy ív. Az összeszámolást kétféleképpen végezzük el.

Először adott E-hez nézzük meg hányféleképpen választható olyan π, hogy a megfelelő pár számolandó legyen.

Egyszerű látni, hogy $\pi(E)$ egy k hosszú ív, amire n lehetőség van. Ennek lerögzítés után $k! \cdot (n-k)!$ darab jó bijekció lesz.

Az összes pár számára

$$\sum_{E \in \mathcal{H}} n \cdot k!(n-k)! = |\mathcal{H}| n \cdot k!(n-k)!$$

adódik.

A bizonyítás vége

Másodszor adott π-hez nézzük meg hány él vezet összeszámolandó párhoz.

Itt lesz hasznos a korábbi egyszerűsítés. Az alapján legfeljebb k-t kapunk.

Azaz az összes pár számára LEGFELJEBB

$$kn!$$

adódik.

A kétféle válasz összevetése rendezés után adja a tételt.

Szünet

Napraforgók

Definíció

$H_1, \ldots, H_s$ egy *s szirmú napraforgó* (vagy Δ-rendszer), ha minden $i \neq j$ esetén $(i, j \in \{1, \ldots, s\})$ $H_i \cap H_j = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$. A $T = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$ halmazt a napraforgó *tányérjának* nevezzük.

Így például s darab páronként diszjunkt halmaz rendszere s szirmú napraforgó.

A napraforgók témakörének az alapkérdése az, hogy ha adott egy k-uniform halmazrendszer, amiben nincs s szirmú napraforgó, akkor annak legfeljebb hány éle lehet?

Erdős—Rado-tétel

Erdős—Rado-tétel

Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz s szirmú napraforgót. Ekkor

$$|\mathcal{H}| \leq (s-1)^k k!.$$

Bizonyítás: Az indukció eleje

k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk, mégpedig a tétel következő alakját: Ha $\mathcal{H}$ k-uniform és $|\mathcal{H}| > (s-1)^k k!$, akkor $\mathcal{H}$-ban van s szirmú napraforgó.

A $k = 1$ eset triviális, figyelembe véve, hogy egy 1-uniform halmazrendszer elemei diszjunkt egy-egy pontot tartalmazó élek és így bármelyik s él s szirmú napraforgót alkot.

Tegyük fel, hogy $(k-1)$-re igazoltuk az állítást. A k-ra való lépéshez szükség lesz a következő lemmára.

Bizonyítás: A Lemma

Lemma

Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer és $t \in \{2, 3, \ldots\}$. Ekkor a következők valamelyike teljesül:

(i) létezik t diszjunkt él,

(ii) van olyan $v \in V$, hogy v-n legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{(t-1)k}$ él halad át.

Bizonyítás: A Lemmából következik a Tétel

Alkalmazzuk $t = s$-re a lemmát.

Ha *(i)* teljesül, akkor van s diszjunkt él, ami egy s szirmú napraforgót jelent.

Ha *(ii)* teljesül, akkor legyen $\widetilde{\mathcal{H}} = \{E \setminus \{v\} : v \in E \in \mathcal{H}\}$. (Vagyis a v-t tartalmazó élekből kivesszük v-t.)

Nyilvánvalóan $\widetilde{\mathcal{H}}$ $(k-1)$-uniform és

$$\widetilde{\mathcal{H}} \geq \frac{|\mathcal{H}|}{k(t-1)} > \frac{(s-1)^k k!}{k(s-1)} = (s-1)^{k-1}(k-1)!$$

Az indukciós feltevés alapján $\widetilde{\mathcal{H}}$-ban van s szirmú napraforgó, jelölje ezt $S_1, \ldots, S_s$. Ekkor $S_1 \cup \{v\}, \ldots, S_s \cup \{v\}$ s szirmú napraforgó $\mathcal{H}$-ban.

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Ha $\tau \geq t$, akkor következik *(i)*.

Ha $\tau < t$, akkor legyen $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\tau} E_i$.

Nyilván $|A| = \tau k$, így létezik olyan $\widehat{A} \supseteq A$, hogy $|\widehat{A}| = (t-1)k$.

Legyen $v \in \widehat{A}$ olyan csúcs, amin maximális számú él halad át. A skatulyelv alapján ezen a v-n legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{|\widehat{A}|}$ él halad át, tehát ekkor *(ii)* teljesül.

Megjegyzések

A tétel $s = 3$ esetén $2^k k!$-t ad felső becslésként az élek számára. Ez exponenciálisnál gyorsabb növekedésű becslés. A legjobb konstrukció exponenciális sok k-élt tartalmaz.

Konstrukció: Nincs három szirmú napraforgó

Legyen $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \dot\cup \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. $\mathcal{H}$ tartalmazza azokat az éleket, amelyek minden $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ halmazt pontosan egy elemben metszenek. Könnyű látni, hogy $\mathcal{H}$ egy 2^k élű k uniform halmazrendszer.

Rao, Alweiss–Lovett–Wu–Zhang 2019

Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz s szirmú napraforgót. Ekkor

$$|\mathcal{H}| \leq \mathcal{O}((s \log(sk))^k).$$

Szünet

λ-metsző halmazrendszerek

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ halmazrenszer V felett. $\mathcal{H}$ λ-metsző, ha tetszőleges különböző $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $|A \cap B| = \lambda$.

Természetes az alapkérdés: maximum hány él lehet egy λ-metszó hamazrendszerben?

$\lambda = 0$ eset

Példa

Legyen $\lambda = 0$ és $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{v_1\}, \ldots, \{v_n\}\}$.

Könnyen belátható, hogy $|V| = n$ és $\lambda = 0$ esetén ez a legnagyobb halmazrendszer ami 0-metsző.

A továbbiakban $\lambda \geq 1$.

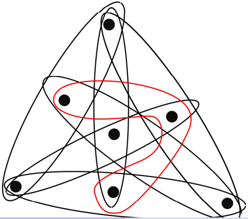
Példák

Példa

$\lambda = 1$,
$V = \{\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, \{v_1, v_n\}, \{v_2, v_n\}, \{v_3, v_n\}, \ldots \{v_{n-1}, v_n\}\}$

Példa: $\lambda = 1$ és a Fano-sík

Hét pontunk van $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7\}$ és
$\mathcal{H} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_3, P_4, P_5\}, \{P_1, P_5, P_6\}, \{P_1, P_4, P_7\}, \{P_3, P_6, P_7\}, \{P_2, P_5, P_7\}, \{P_2, P_4, P_6\}\}$.



Az alaptétel

Tétel

Legyen $\lambda \geq 1$ és $\mathcal{F}$ egy λ-metsző halmazrendszer egy V alaphalmaz fölött. Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq |V|.$$

Bizonyítás kezdete

Ha van olyan él $\mathcal{F}$-ben, amely elemszáma kisebb mint λ, akkor más él nem is lehet $\mathcal{F}$-ben, az állítás triviális.

Ha van olyan F él, amely elemszáma éppen λ, akkor minden más él tartalmazza F-et. A többi E él esetén az $E \setminus F$ halmazok páronként diszjunkt, nem üres részhalmazai $V \setminus F$-nek. Így legfeljebb $|V| - |F|$ ilyen halmaz lehet. Az összes él száma legfeljebb $1 + (|V| - \lambda) \leq |V|$.

A továbbiakban feltesszük, hogy minden él több mint λ (legalább $\lambda + 1$) elemű.

Lineáris algebra

Egy $F \in \mathcal{F}$ esetén χ_F az $F \subset V$ halmaz karakterisztikus vektora ($\chi_F \in \mathbb{R}^V \equiv \mathbb{R}^n$). Belátjuk, hogy a χ_F vektorok ($F \in \mathcal{F}$) lineárisan függetlenek. Ebből nyilván következik az állítás.

Legyen $M_{\mathcal{F}}$ az a mátrix, amely sorait a χ_F ($F \in \mathcal{F}$) vektorok alkotják. Mérete $|\mathcal{F}| \times |V|$.

Mi lesz az $M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ mátrix?

A mátrix elemei a $\chi_F \chi_{F'} = |F \cap F'|$ skalárszorzatok lesznek. Mivel $\mathcal{F}$ egy λ-metsző halmazrendszer, ezért a főatlón kívül λ-k szerepelnek. A főátlóban éleink méretei szerepelnek.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ $(m = |\mathcal{F}|)$.

$$\begin{pmatrix} |A_1| & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & |A_2| & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & |A_3| & \ldots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & |A_{m-1}| & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & |A_m| \end{pmatrix}$$

Belátjuk, hogy ezen mátrix sorai lineárisan függőek. Ebből következik az állítás.

Valóban χ_F-ek (azaz $M_{\mathcal{F}}$ sorai) közötti nem triviális lineáris összefüggés öröklődik $M_{\mathcal{F}} M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ soraira is.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ sorai lineárisan függetlenek

Vegyük a fenti mátrix sorainak egy lineáris kombinációját (az *i*-edik sor együtthatója legyen α_i). A lineáris kombináció *j*-edik komponenese:

$$\alpha_j|A_j| + \sum_{i:i\neq j} \alpha_i\lambda = \alpha_j|A_j| - \alpha_j\lambda + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\lambda = \alpha_j(|A_j| - \lambda) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\lambda$$
$$= \alpha_j(|A_j| - \lambda) + \Lambda.$$

Ebből, ha a 0-vektort kombináltuk ki, akkor

$$\alpha_j = \frac{-\Lambda}{|A_j| - \lambda}.$$

A 0-vektor kikombinálásánál nyilván nem használhattunk olyan együtthatókat, amelyek előjele ugyanaz volt. Így szükségszerű (a törtek nevezőiről tudjuk, hogy pozitívak), hogy $\Lambda = 0$. Így minden α_i értéke is 0. Ez éppen a sorok lineáris függetlensége.

Lineáris algebrai módszer

Az Erdős—Ko—Rado-tétel és a Fisher-egyenlőtlenség is „metszet-feltételekkel" rendelkező halmazrendszerekről szóló tétel.

A témakör nagyon virágzó, sok fontos eredmény született az ilyen kérdések vizsgálatából.

Ezen tételek a kombinatorikán kívül is nagy hatásúak.

A kombinatorikában különösen jelentős ezen lineáris algebrai módszer (például a Fisher-egyenlőtlenség bizonyítása). Egy fontos bizonyítási technikává vált.

Szünet

Nyom

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer V felett, A pedig V egy részhalmaza. Ekkor legyen $Tr_A\mathcal{H} = \{E \cap A : E \in \mathcal{H}\}$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer A-ra vett *nyoma*.

Világos, hogy $Tr_A\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Abban az esetben, amikor $Tr_A\mathcal{H} = \mathcal{P}(A)$, azt mondjuk, hogy A *telített*.

Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzió

A $\mathcal{H}$ halmazrendszer *Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenziója*

$$\dim_{VCs}\mathcal{H} = \max\{|A| : \ A \subset V \text{ telített}\}.$$

(Vapnyik—Cservonyenkisz)

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ felett, t pedig pozitív egész úgy, hogy teljesüljön $\mathcal{H}$ elemszámára a $|\mathcal{H}| > 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{t-1}$ egyenlőtlenség. Ekkor $\dim_{VCs}\mathcal{H} \geq t$. Más szavakkal megfogalmazva létezik t elemű telített halmaz $\mathcal{H}$-ban.

A korlát éles

Tekintsük azt a halmazrendszert, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{H} = \{R \subseteq [n] : |R| < t\}$.

Világos, hogy

$$|\mathcal{H}| = 1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{t-1},$$

Ugyanakkor $\mathcal{H}$-ban nincs t elemű telített A halmaz, ehhez ugyanis $Tr_A\mathcal{H}$ definíciójára gondolva A-t tartalmazó él megléte szükséges feltétele A telítettségének, de $|A| = t$, így ez a feltétel nem teljesül.

1. Bizonyítás

n szerinti teljes indukcióval dolgozunk.

$n = 1$-re triviálisan igaz a tétel állítása.

Felhasználva azt az ismert összefüggést, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, adódik a feltételből:

$$|\mathcal{H}| > \left[\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{t-2}\right] + \left[1 + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{t-1}\right].$$

Jelölje L_1 és L_2 a két fenti szögletes zárójeles kifejezést.

1. Bizonyítás (folytatás)

Vezessük be a következő jelöléseket:
$\mathcal{H}_1 = \{E \in \mathcal{H} : n \notin E, E \cup \{n\} \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1$, és legyen $\widetilde{\mathcal{H}_2} = \{E \setminus \{n\} : E \in \mathcal{H}_2\}$.

Világos, hogy $\mathcal{H}_1, \widetilde{\mathcal{H}_2}$ halmazrendszer $[n-1]$ felett.

Tudjuk, hogy

$$|\mathcal{H}_1| + |\mathcal{H}_2| = |\mathcal{H}| > L_1 + L_2$$

Vagy *(i)* $|\mathcal{H}_1| > L_1$, vagy *(ii)* $|\mathcal{H}_2| = |\widetilde{\mathcal{H}_2}| > L_2$ teljesül.

1. Bizonyítás (folytatás)

Ha *(i)* igaz, akkor az indukciós feltevés alapján létezik $A \subseteq [n-1]$ $t-1$ elemű $\mathcal{H}_1$-re nézve telített halmaz. Nem nehéz látni (mivel $E \in \mathcal{H}_1$ esetén E és $E \cup \{n\}$ is él $\mathcal{H}$-ban), hogy $A \cup \{n\}$ ekkor telített lesz $\mathcal{H}$-ra nézve (és persze t elemű).

Ha *(ii)* igaz, akkor az indukciós feltevés szerint van $A \subseteq [n-1]$ t elemű $\widetilde{\mathcal{H}_2}$-re nézve telített halmaz. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy minden $R \subseteq A$-hoz létezik $E \in \widetilde{\mathcal{H}_2}$, amire $E \cap A = R$. Viszont minden $E \in \widetilde{\mathcal{H}_2}$-hoz létezik egyértelműen egy $E_0 \in \mathcal{H}_2$: ez vagy E, vagy $E \cup \{n\}$. Mindkét esetben $E_0 \cap A = R$, vagyis A $\mathcal{H}$-ra nézve is telített. ■

2. Bizonyítás

Nevezzünk egy halmazrendszert *lefelé zártnak*, ha $E \in \mathcal{H}$ és $F \subseteq E$, akkor $F \in \mathcal{H}$ is teljesül.

Ha $\mathcal{H}$ lefelé zárt, akkor a tétel állítása egyszerűen következik: a feltételek miatt van $\mathcal{H}$-ban legalább t elemű él, ugyanakkor pedig a lefelé zártság miatt minden él telített.

Definiáljuk a következő S_i leképezést: $i \in V$, $E \in \mathcal{H}$-ra $S_i E = E \setminus \{i\}$ ha $E \setminus \{i\} \notin \mathcal{H}$ és $S_i E = E$ különben. Legyen továbbá $S_i \mathcal{H} = \{S_i E : E \in \mathcal{H}\}$.

2. Bizonyítás (folytatás)

Vegyük észre, hogy $|\mathcal{H}| = |S_i\mathcal{H}|$ a definícióból egyből következő módon.

Nem nehéz látni azt sem, hogy ha $\mathcal{H}$ nem lefelé zárt, akkor van olyan i, hogy $S_i\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$. (Ha nem lefelé zárt, akkor van olyan E és F, hogy $F \subset E$ és $E \in \mathcal{H}$ de $F \notin \mathcal{H}$. Ekkor tetszőleges $i \in E \setminus F$ megfelel.)

A harmadik észrevételt külön lemmaként is kimondjuk.

Lemma

$|Tr_A\mathcal{H}| \geq |Tr_A S_i\mathcal{H}|$ mindig teljesül.

Lemmából következik a tétel

Tetszőleges $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$-hez léteznek olyan $i_1, i_2, \ldots$ elemek, hogy $\mathcal{H}_k \neq \mathcal{H}_{k+1} = S_{i_k}\mathcal{H}_k$, vagyis iteráltan végrehajtjuk az S transzformációt úgy, hogy mindig változzon a halmazrendszerünk.

Nyilván véges sok lépésben elakad a lánc, mert minden lépésben csökken az élek elemszámának az összege.

Legyen az utolsó halmazrendszer $\mathcal{H}_s$. Ez az eddigiek szerint lefelé zárt, és éleinek a száma teljesíti a tétel feltételét. Így van benne t elemű él, A. Ekkor A telített $\mathcal{H}_s$-re nézve, nyoma $2^{|A|}$ elemű. A lemma alapján A $\mathcal{H}_1$-re vett nyoma is legalább ennyi elemű, azaz A telített.

Lemma bizonyítása

Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_A S_i\mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $i \in A$, akkor A részhalmazait állítsuk $(R, R \cup \{i\})$ párokba, ahol $i \notin R$. Ha egy E él A-beli nyoma az egyik párba esik, akkor S_iE nyoma is ugyanehhez a párhoz tartozik.

Belátjuk, hogy minden pár hozzájárulása $Tr_A\mathcal{H}$-hoz legalább annyi, mint $Tr_A S_i\mathcal{H}$-hoz.

Egyedül az jelenthet problémát, ha R és $R \cup \{i\}$ is benne van $Tr_A S_i\mathcal{H}$-ban, de $Tr_A\mathcal{H}$-ban csak az egyikük szerepel.

Azonnal látszik, hogy ez utóbbi szükségképpen $R \cup \{i\}$. Azonban ha R nem szerepel $Tr_A\mathcal{H}$-ban, akkor minden olyan E él, amelyre $E \cap A = R \cup \{i\}$, feltétlenül $S_iE = E \setminus \{i\}$.

Ez ellentmond annak, hogy $R \cup \{i\} \in Tr_A S_i\mathcal{H}$ és így a lemmát is igazoltuk, teljessé téve a bizonyítást.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!