Gráfok magasabb fokú összefüggősége

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Folyamok: Emlékeztető

Az *Algoritmusok és bonyolultságuk* tárgyban szerepelt a folyamok elmélete (ott megtalálhatók a szükséges definíciók). A következő tétel a folyamok alaptétele.

Tétel

Legyen $\mathcal{H}$ egy hálózat és f egy folyam benne. Ekkor a következők ekvivalensek:

(i) f egy maximális értékű folyam a $\mathcal{H}$ hálózatban.

(ii) A $\mathcal{H}$ hálózatban nincs f-re vonatkozó javító út.

(iii) A $\mathcal{H}$ hálózatban van olyan forrás/nyelő vágás, amely kapacitása megegyzik f értékével.

Folyamok alatétele: Következmények

Következmény: maximális-folyam-minimális-vágás tétel, MFMC tétel

Legyen $\mathcal{H} : (\overrightarrow{G}, c, s, t)$ egy hálózat. Ekkor

$$\max\{\text{é}(f) : f \text{ folyam } \mathcal{H}\text{-ban}\} = \min\{c(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \text{ forrás/nyelő vágás } \mathcal{H}\text{-ban}\}.$$

Az alaptétel egy másik következménye a Ford—Fulkerson-algoritmus.

Folyamok egész értékűségi tétele

Ha a $\mathcal{H}$ hálózatban minden él kapacitása egész ($c : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{Z}$), akkor van olyan optimális folyam is, amelyben minden élen egész anyagmennyiség folyik.

Uniform hálózatok

Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf s/t forrás/nyelő csúccsal. Ha minden él kapacitását 1-nek vesszük, akkor kapunk egy $\mathcal{H}_{\overrightarrow{G}}$ hálózatot.

Feladat

Legyen $\overrightarrow{G}$ egy tetszőleges irányított gráf két kitüntetett s, t csúccsal. Legyen $\mathcal{H}_{\overrightarrow{G}}$ a következő hálózat: $(\overrightarrow{G}, c \equiv 1, s, t)$.

(i)

$$\max\{\text{é}(f):\ f \text{ folyam } \mathcal{H}_{\overrightarrow{G}}\text{-ban}\} = \max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ él-diszjunkt } \overrightarrow{st}\text{-utak } \overrightarrow{G}\text{-ben}\}$$

(ii)

$$\min\{c(\mathcal{V}):\ \mathcal{V} \text{ forrás/nyelő vágás } \mathcal{H}_{\overrightarrow{G}}\text{-ban}\} = \min\{|S|:\ S \subset E(G) \text{ forrás}\rightarrow\text{nyelő szeparáló élhalmaz}\}.$$

Menger első tétele

A MFMC tétel és a feladat egy tiszta gráfelméleti tételt ad:

(Menger tétele)

Legyen $\overrightarrow{G}$ egy tetszőleges irányított gráf két kitüntetett s, t csúccsal. Ekkor

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ él-diszjunkt } \overrightarrow{st} \text{ utak } \overrightarrow{G}\text{-ben}\} =$$
$$\min\{|S| : S \subset E(G) \text{ egy forrás/nyelő szeparáló élhalmaz}\}.$$

Menger tételei irányított gráfokra

(Menger tételei)

Legyen $\overrightarrow{G}$ egy tetszőleges irányított gráf két kitüntetett s, t csúccsal. Ekkor

(i)

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ él-diszjunkt } \overrightarrow{st} \text{ utak } \overrightarrow{G}\text{-ben}\} =$$
$$\min\{|S| : \ SeetE(G) \text{ forrás/nyelő szeparáló élhalmaz}\}.$$

(ii)

$$\max\{k : \ P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ belső-csúcs-diszjunkt } \overrightarrow{st} \text{ utak } \overrightarrow{G}\text{-ben}\} =$$
$$\min\{|U| : \ U \subset V(\overrightarrow{G}) - \{s, t\} \text{ forrás}\rightarrow\text{nyelő szeparáló csúcshalmaz}\}$$

Menger tételei irányítatlan gráfokra

Menger tételei irányítatlan gráfokra

Legyen G egy tetszőleges irányítatlan gráf két kitüntetett s, t csúccsal. Ekkor

(i)

$$\max\{k : P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ él-diszjunkt } st \text{ utak } G\text{-ben}\} = \min\{|S| : \ S \subset E(G) \text{ forrás/nyelő szeparáló élhalmaz}\}.$$

(ii)

$$\max\{k : \ P_1, P_2, \ldots, P_k \text{ belső-csúcs-diszjunkt } st \text{ utak } G\text{-ben}\} = \min\{|U| : \ U \subset V(G) - \{s, t\} \text{ forrás/nyelő szeparáló csúcshalmaz}\}.$$

Egy megjegyzés

A belcső-csúcs-diszjunkt utak esetében ha létezik $\overrightarrow{st}$ vagy st él, akkor a tétel érdektelen.

Megfelelő szeparáló U halmaz nem létezik, a P_i utak ugyanazon egy élű út (belső csúcs nélkül) lehetnek.

Azaz mindkét optimalizálási feladat optimuma ∞. Ekkor érdemes az s és t közötti élek hiányát feltenni.

k-szoros élösszefüggőség

Definíció

Legyen k egy pozitív egész. G gráf *k-szorosan élösszefüggő* (röviden $k$élöf), ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú élhalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő lesz.

Minden $F \subseteq E(G)$ élhalmazra $|F| < k$ esetén $G - F$ összefüggő.

A feltételnek teljesülni kell $F = \emptyset$ esetén is, azaz alapgráfunk összefüggő. Az összefüggőségnek meg kell maradnia, ha valódi, de nem „nagy" élelhagyás történik.

k-szoros (csúcs)összefüggőség

Definíció

Egy G gráf *k-szorosan (pont)összefüggő* (röviden $k$öf), ha tetszőleges k-nál kisebb elemszámú csúcshalmazát elhagyva a kapott gráf összefüggő és $|V(G)| > k$.

Minden $U \subseteq V(G)$ csúcshalmazra $|U| < k$ esetén $G - U$ összefüggő, továbbá $|V| > k$.

A pontszámra adott technikai feltétel szerepe, hogy a gráf elegendően nagy legyen: a definícióban szereplő „nem túl nagy” ponthalmaz elhagyása után is legalább két pont maradjon.

Példák

Példa

A fák nem kétszeresen élösszefüggőek, ha van élük.

Példa

A körök kétszeresen összefüggőek (amennyiben legalább három csúcsuk van), és így kétszeresen élösszefüggőek is, de nem háromszorosan összefüggőek.

Példa

A $k+1$ ponttú gráfok közül csak a teljes gráf k-összefüggő.

Összefüggések

A következő diagram a különböző összefüggőségi fogalmak viszonyait foglalja össze. Azon gráfosztályok között, amelyek tartalmazása nem vezethető le a diagramból nincs is tartalmazás.

$$\begin{array}{cccccccccc}
1\text{öf} & \Leftarrow & 2\text{öf} & \Leftarrow & 3\text{öf} & \Leftarrow & \dots & \Leftarrow & k\text{öf} & \Leftarrow \\
\Updownarrow^{*} & & & & & & & & & \\
\text{öf} & & \Bigg\Downarrow & & \Bigg\Downarrow & & & & \Bigg\Downarrow & \\
\Updownarrow & & & & & & & & & \\
1\text{élöf} & \Leftarrow & 2\text{élöf} & \Leftarrow & 3\text{élöf} & \Leftarrow & \dots & \Leftarrow & k\text{élöf} & \Leftarrow
\end{array}$$

A vízszintes sorokban levő kapcsolatok a definíciók alapján nyilvánvalóak. A függőleges nyilakkal jelölt kapcsolatok egy kicsit nehezebbek. A csillagozott ekvivalencia csak korlázottan igaz. 1-szeresen összefüggőségben a legalább két pontúság is feltétel, összefüggőségnél nem. A többi függőleges inplikáció az alábbi lemmából következik.

Lemma

Lemma

Legyen e egy G gráf tetszőleges éle és v egy tetszőleges pontja. Legyen $k \geq 2$.

(a) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen élösszefüggő.

(b) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - v$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

(c) Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor $G - v$-nek tetszőleges számú komponense lehet.

(d) Ha G k-szorosan összefüggő, akkor $G - e$ $(k-1)$-szeresen összefüggő.

Magasabbfokú összefüggőség jellemzése

Tétel

(i) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab páronként éldiszjunkt út.

(ii) Egy G gráf akkor és csak akkor k-szorosan összefüggő, ha tetszőleges két pontja között létezik k darab út, amelyek belső pontjainak halmaza páronként diszjunktak (Útjaink *pontfüggetlenek*), továbbá $|V(G)| > k$.

Bizonyítás: Triviális irány

A két állítás egy-egy iránya egyszerű: a megfelelő utak létezése garantálja a megfelelő összefüggőséget.

Valóban: Tegyük fel, hogy a gráfunk megfelelő ritkítása után nem összefüggő gráfot kapunk, azaz két maradék pont között — x és y — nem lesz út.

A feltételt x és y-ra alkalmazva a garantált útrendszer mindegyikét megszüntette a ritkítás. Az utak függetlensége miatt ez nem lehet.

Bizonyítás: Nem-triviális irány (i)

Legyen G egy gráf, $x, y \in V$ tetszőleges két csúcs és k adott.

Tegyük fel, hogy G k-szorosan élösszefüggő, és alkalmazzuk a Menger-tételt.

$$k \leq \min\{|L| : L \subseteq E(G), G - L\text{-ben nincs } xy \text{ út}\} =$$
$$= \max\{l : P_1, \ldots, P_l \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\}$$

Tehát létezik k darab éldiszjunkt xy út G-ben.

Bizonyítás: Nem-triviális irány (ii)

Tegyük fel, hogy G k-szorosan összefüggő.

Legyen az xy élek halmaza P, P elemszáma p. A P-beli élek pontfüggetlen xy utak.

Ha $p \geq k$, akkor teljesül az állítás. Ha $p \leq k-1$, akkor $G-P$ $k-p$-szeresen összefüggő.

Belátjuk, hogy létezik $k-p$ pontfüggetlen xy út $G-P$-ben.

Alkalmazzuk a Menger tételének irányítatalan, pontfüggetlen változatát ($G-P$-ben x és y nem összekötött):

$$k-p \leq \min\{|U|:\ U\subseteq V(G)\setminus\{x,y\},\ G-P-U\text{-ban nincs } xy \text{ út}\} =$$
$$= \max\{l:\ P_1,\ldots P_l \text{ pontfüggetlen } xy \text{ utak } G-P\text{-ben}\}$$

Ezért létezik $k-p$ darab pontfüggetlen xy út $G-P$-ben. Ha ehhez hozzávesszük P elemeit mint 1-hosszú xy utakat, akkor k darab pontfüggetlen xy utat kapunk G-ben.

Összefüggőségi paraméterek

Definíció

A G gráf összefüggőségi paraméterei:

$$\kappa_e(G) = \begin{cases} \max\{k : \ G \ k\text{-szorosan élösszefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

$$\kappa(G) = \begin{cases} \max\{k : \ G \ k\text{-szorosan összefüggő}\}, & \text{ha } G \text{ összefüggő} \\ 0, & \text{ha } G \text{ nem összefüggő} \end{cases}$$

Észrevétel

Minden G gráfra teljesülnek a következők:

$$\kappa_e(G) = \min_{x,y \in E(G)} \max\{k : \ P_1, \ldots P_k \text{ éldiszjunkt } xy \text{ utak}\} =$$
$$= \min_{x,y \in E(G)} \min_{\mathcal{V} \ xy \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})| = \min_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|,$$

ahol $\mathcal{V} = \{S, T\}$, $S \cup T = V(G)$, $S \cap T = \emptyset$, $S, T \neq \emptyset$.

Algoritmikus megjegyzések

Tétel

$\kappa_e(G)$ és $\kappa(G)$ is hatékonyan kiszámolható folyam-algoritmussal.

Tétel

$\max\limits_{\mathcal{V} \text{ vágás}} |E(\mathcal{V})|$ kiszámítása „nehéz”, $\mathcal{NP}$-teljes probléma.

Szünet

minimális k-szorosan élösszefüggő gráfok

Definíció

Legyen G gráf, k pozitív egész. G-t minimális k-szorosan élösszefüggőnek nevezzük, ha

(i) k-szorosan élösszefüggő, továbbá

(ii) bármely e élre $G - e$ már nem k-szorosan élösszefüggő.

$k = 1$-re a minimális k-szorosan élösszefüggő gráfok a fák.

Ha G minimális k-szorosan élössszefüggő, akkor nincs benne hurokél.

Ha G k-szorosan élösszefüggő és legalább két csúcsa van, akkor minden csúcs foka legalább k.

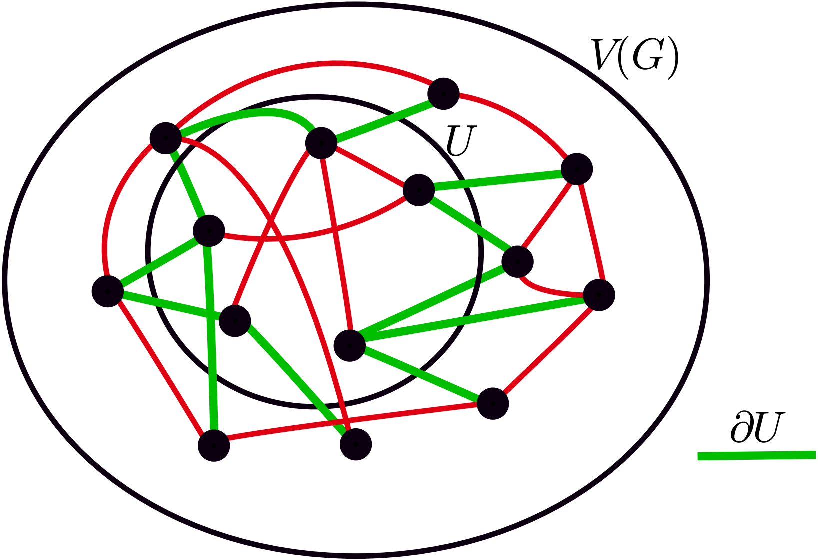
Egy ponthalmaz határa: A definíció

Jelölés

$U \subseteq V(G)$ határa:

$$\partial U = \{xy \in E(G) : \ x \in U \text{ és } y \notin U, \text{ vagy } x \notin U \text{ és } y \in U\}$$

Egy ponthalmaz határa: Kép



Egy ponthalmaz határa: Kép

$\partial U = \partial \overline{U}$, ahol $\overline{U} = V(G) \setminus U$.

Ha G-ben nincs hurokél, akkor bármely $x \in V(G)$-re $d(x) = |\partial\{x\}|$.

G akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha $V(G)$ bármely valódi, nem-üres részhalmazának határa legalább k darab élt tartalmaz.

Mader tétele

Mader tétele

Legyen k pozitív egész, G minimális k-szorosan élösszefüggő gráf, $|V(G)| \geq 2$. Ekkor a következők teljesülnek:

(i) Van G-ben k-fokú csúcs.

(i)$^+$ G-ben legalább két darab k-fokú csúcs van.

Definíció

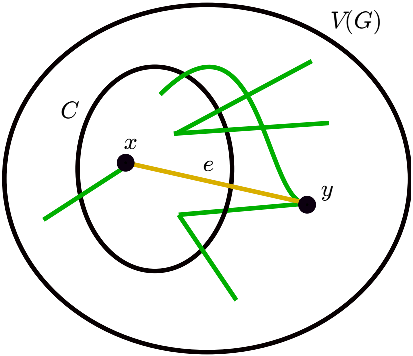
k pozitív egész, G minimális k-szorosan élösszefüggő gráf. A $P \subseteq V(G)$ halmazt pontos halmaznak nevezzük, ha a határa k elemű.

A tétel i) állítása ekvivalens azzal, hogy G-ben van egyelemű pontos halmaz.

Észrevétel

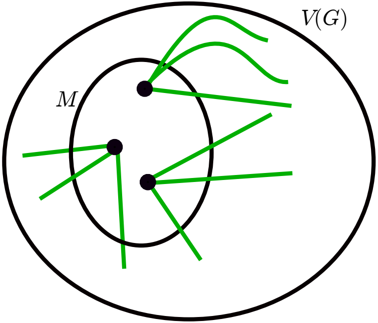
Észrevétel

Ha tetszőleges $e = xy \in E(G)$-re $G - e$ nem k-szorosan élösszefüggő, akkor létezik olyan $C \subset V(G)$ cáfoló halmaz, amelyre $|\partial_{G-e} C| < k$. Ekkor C pontos G-ben és elválasztja x-t és y-t.

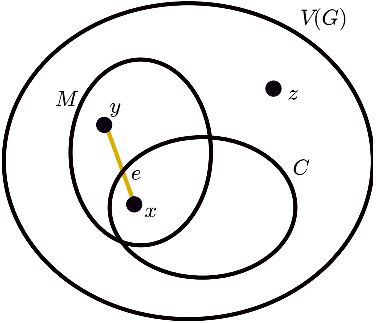


Mader tételének bizonyítása (i): Esetek

Legyen M minimális pontos halmaz G-ben, azaz olyan pontos halmaz, amelynek semelyik valódi részhalmaza sem pontos. Azt állítjuk, hogy M egyelemű.



1.*eset*



2.*eset*

Mader tételének bizonyítása (i): 1. eset

1. eset: *M-en belül nem halad él.*

Ekkor a következő egyenlőség teljesül:

$$k = |\partial M| = \sum_{m \in M} |\partial\{m\}| = \sum_{m \in M} d(m)$$

Tudjuk, hogy G-ben minden csúcs foka legalább k, ezért M csak egyelemű lehet.

Mader tételének bizonyítása (i): 2. eset

M-en belül halad legalább egy él.

Legyen ez az él xy. Tudjuk, hogy G-ben nem lehet hurokél, így x és y két különböző csúcs.

M pontos, tehát $M \neq V(G)$.

Legyen $z \in V(G) \setminus M$.

Az észrevételek miatt van olyan $C \subseteq V(G)$ pontos halmaz, ami elválasztja x-t és y-t. Feltehető, hogy $z \notin C$; ha eleme lenne akkor C helyett vehetnénk $\overline{C}$-t.

Szubmoduláris egyenlőtlenség

Lemma (Szubmoduláris egyenlőtlenség)

Ha H gráf és $A, B \subseteq V(H)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$|\partial(A \cap B)| + |\partial(A \cup B)| \leq |\partial A| + |\partial B|$$

A lemma bizonyítása egyszerű. Minden élre megnézzük, hogy hányszor számolja a bal, illetve jobb oldal. Azt tapasztaljuk, hogy a jobb oldal mindig legalább annyiszor megszámolja, mint a bal oldal.

A részleteket az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

A bizonyítás vége

Alkalmazzuk a lemmát M-re és C-re.

Választásaink alapján $M \cap C \neq \emptyset$, $M \cup C \neq V(G)$.

$$k + k \leq |\partial(M \cap C)| + |\partial(M \cup C)| \leq |\partial M| + |\partial C| = 2k$$

Az egyenlőtlenség első és utolsó tagja egyenlő, ezért összes becslésünk éles, speciálisan $|\partial(M \cap C)| = k$.

Az x és y csúcsok közül valamelyik nem eleme C-nek, ezért $M \cap C$ valódi pontos részhalmaza M-nek.

Ez ellentmond M minimalitásának, a második eset nem lehetséges.

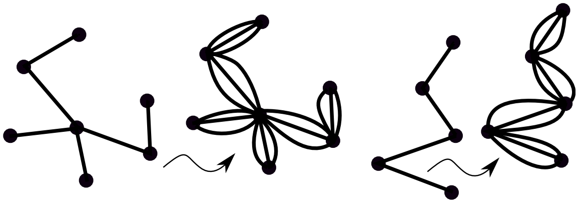
(ii) Legyen P pontos halmaz G-ben. Ekkor $\overline{P}$ is pontos. P-nek és $\overline{P}$-nek van egy-egy tartalmazásra nézve minimális pontos részhalmza, legyenek ezek M_1 és M_2. Ez két különböző egyelemű pontos halmaz G-ben.

Példa

Legyen $m \geq 2$ egész. Ha egy T fában minden él helyére m darab párhuzamos élt teszünk, akkor egy minimális m-szeresen élösszefüggő gráfot kapunk.

Speciálisan, ha T egy legalább egy hosszú út, akkor pontosan két olyan csúcsunk lesz, amelynek foka m.

Az alábbi ábra az $m = 3$ esetet szemlélteti.



Szünet

Lovász leemelési lemmája

Lovász leemelési lemmája

Legyen G gráf, $u \in V(G)$, $G_0 = G - u$, $k \geq 2$ egész. Tegyük fel az u és G_0 közötti élek száma páros és pozitív, valamint u-ra teljesül a következő feltétel:

(L) Ha U nemtriviális részhalmaza $V(G_0)$-nek, akkor $|\partial_G U| \geq k$.

Ekkor az u-ra illeszkedő élek között található olyan $e = ux$ és $f = uy$ él, hogy a $\widetilde{G} = G - e - f \dotplus xy$ gráf is rendelkezzen az (L) tulajdonsággal.

Lovász leemelési lemmája képen

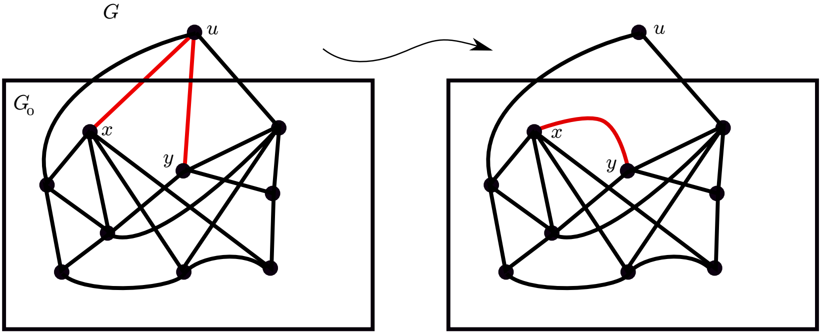
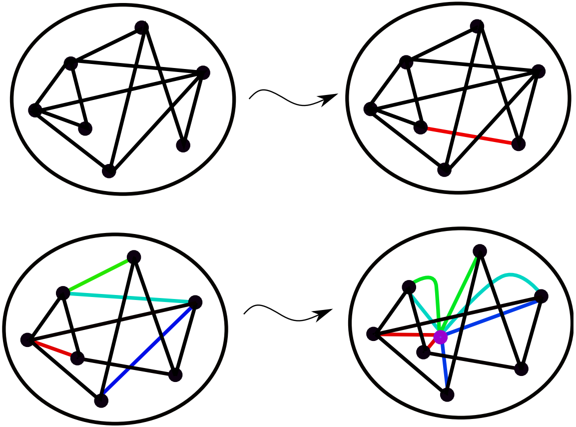


Figure: Az ábrán a piros éleket cseréljük. Ha x és y között már halad él, akkor egy új, a már meglévő xy élekkel párhuzamos élt veszünk fel.

G gráf, k páros pozitív egész, két operáció

Élhozzáadás: G két pontját egy új éllel összekötjük: $G \to G^+$.



$k/2$ **darab él összecsípése:** G-ből kiveszünk $k/2$ élt, felosztjuk eteket új pontokkal, majd a $k/2$ új pontot azonosítjuk: $G \to \widetilde{G}$.

Észrevétel

Ha G k-szorosan élösszefüggő, akkor G^+ és $\widetilde{G}$ is az.

G^+ esetén ez nyilvánvaló. $\widetilde{G}$ esetén azt kell ellenőrizni, hogy $V(G)$ tetszőleges valódi, nem-üres részhalmazának határa legalább k elemű. Ezt elég az új pontot nem tartalmazó halmazokra megnézni. Ez egyszerű feladat.

Észrevétel

Legyen G_0, az a gráf, aminek egy pontja van és nincs éle.

Tegyük fel, hogy G felépíthető az alábbi módon:

$$G_0 \to G_1 \to \ldots \to G_l = G,$$

ahol minden $i = 0, \ldots, l-1$-re a $G_i \to G_{i+1}$ művelet vagy élhozzáadás, vagy $k/2$ darab él összecsípése.

Ekkor G k-szorosan élösszefüggő.

A leemelési lemma alkalmazása: 2ℓ-szeresen élösszefüggő gráfok növekedése

Célunk a fenti észrevétel megfordításának igazolása.

Tétel

Ha k pozitív páros szám, és G k-szorosan élösszefüggő gráf, akkor G felépíthető G_0-ból (lásd fent) az előző két operáció segítségével.

Az alkalmazás bizonyítása

Legyen G és k adott. Az élszám szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást.

G_0 és az összes egypontú gráf triviálisan felépíthető.

Legyen G egy legalább két csúcsot tartalmazó k-szorosan összefüggő gráf. Tegyük fel, hogy a legfeljebb $|E(G)| - 1$ élszámú gráfok felépíthetőek.

G nem minimális k-szorosan élösszefüggő. Ekkor G-nek van olyan e éle, hogy $G - e$ k-szorosan élösszefüggő.
$|E(G - e)| = |E(G)| - 1$ és az indukciós feltevés miatt $G - e$ felépíthető. Így az e él hozzá/vissza-adásával kapott G gráfot is felépíthetjük G_0-ból.

A továbbiakban: G minimális k-szorosan élösszefüggő, $|V(G)| \geq 2$.

Az alkalmazás bizonyítása: A befejezés

Ebben az esetben a G-nek van egy u csúcsa, aminek a fokszáma k.

Erről a csúcs-ról a Lovász-lemma $k/2$-szörös alkalmazásával emeljük le az éleket, majd töröljük u-t.

Így a lemma miatt egy H k-szorosan élösszefüggő gráfot kapunk, aminek kevesebb éle van, mint G-nek. Tehát H felépíthető.

Ha a H gráf $E(H) \setminus E(G)$ halmazbeli éleit egy u pontba összecsípjük, akkor a G gráfot kapjuk.

Az élesített leemelési lemma

A Lovász-lemma következő, az eredetinél kissé erősebb változatát bizonyítjuk:

Lemma$^+$

Legyen G gráf, $u \in V(G)$, $G_0 = G - u$, $k \geq 2$ egész. Tegyük fel az u és G_0 közötti élek száma páros és pozitív, valamint G_0-ra teljesül

(L) Ha U nemtriviális részhalmaza $V(G_0)$-nek, akkor $|\partial_G U| \geq k$.

Ekkor bármely $e = ux$ élhez van olyan $f = uy$ él, hogy a $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$ gráf is rendelkezzen az (L) tulajdonsággal.

A bizonyítás kezdete

Legyen G, u, k és $e = ux$ adott.

Próbáljuk az $f = uy$ élt. Legyen $\widetilde{G} = G - e - f \dot{+} xy$. Tegyük fel, hogy $\widetilde{G}$ nem (L) tulajdonságú. Ekkor létezik $C_f \subseteq V(G_0)$ cáfoló halmaz, amelyre $|\partial_{\widetilde{G}} C_f| < k$.

Ha C_f elvágja x-t és y-t, akkor $|\partial_{\widetilde{G}} C_f| = |\partial_G C_f| \geq k$, ami ellentmondás.

A bizonyítás

Feltehető, hogy $u \notin C_f$. Ha C_f elvágja x-t és y-t vagy $x, y \notin C_f$ akkor C_f nem lenne cáfoló. Így $x, y \in C_f$.

Ekkor $k > |\partial_{\widetilde{G}} C_f| = |\partial_G C_f| - 2$, ezért $|\partial_G C_f| \leq k+1$. Jelöljük $V(G_0) \setminus C_f$-t $\overline{C_f}$-rel.

Legyen az $u - G_0$ élek száma d, az $u - C_f$ élek száma d_1, az $u - \overline{C_f}$ élek száma d_2 és a $C_f - \overline{C_f}$ élek száma d_3.

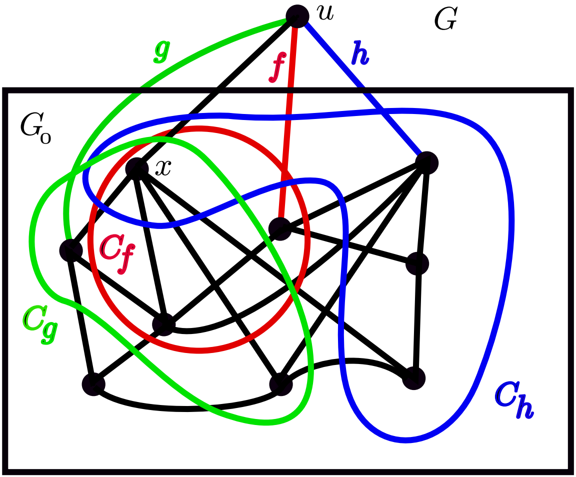
A G gráf (L) tulajdonságú, ezért $d_2 + d_3 = |\partial_G \overline{C_f}| \geq k$, valamint $d_1 + d_3 = |\partial_G C_f| \leq k+1$. $d_1 + d_2 = d$ páros, azaz $d_1 \equiv d_2$ mod 2, ezért

$$d_1 \leq d_2. \tag{1}$$

Azaz az u-ból induló éleknek maximum fele haladhat a C_f cáfoló halmazhoz.

Iterálás

Más élekre is ismételjük meg az eljárást.



A cáfoló halmazok rendszere

Vagy találunk megfelelő uy élt, vagy kapunk cáfoló halmazok egy $\mathcal{C}$ halmazát, amelyre $\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ tartalmazza u szomszédságát.

Ritkítsuk ki a $\mathcal{C}$ halmazrendszert úgy, hogy ezen tulajdonság teljesüljön, de benne minimális számú cáfoló halmaz legyen.

Legyen $\mathcal{C}_0$ az így kapott rendszer. (1) alapján nem lehet, hogy $\mathcal{C}_0$ csak két cáfoló halmazból álljon: Ekkor u-ból induló éleknek maximálisan a fele haladhatna a két halmaz mindegyikéhez úgy, hogy az ux él mindkettőben szerepel és a két halmaz mégis lefedé u szomszédságát. Ez pedig nyilván nem lehet.

Lemma

Lemma

Ha H gráf, és $A, B, C \subseteq V(H)$, akkor teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$|\partial(A\cap B\cap C)| + |\partial(A\cap \overline{B}\cap \overline{C})| + |\partial(\overline{A}\cap B\cap \overline{C})| + |\partial(\overline{A}\cap \overline{B}\cap C)| \le |\partial A| + |\partial B| + |\partial C|$$

A lemma bizonyítása (mint a szubmoduláris egyenlőtlenség bizonyítása) egyszerű számolás. Minden élre ellenőrizni kell, hogy a bal, illetve jobb oldal hányszor számolja meg. A jobb oldalhoz minden él legalább annyi hozzájárulást ad mint bal oldalhoz.

A bizonyítás vége

Legyen $C_1, C_2, C_3 \in \mathcal{C}_0$. Alkalmazzuk a lemmát ezekre, azzal a plusz észrevétellel, hogy az ux él a bal oldalon egyszer, míg a jobb oldalon háromszor van számolva:

$$\begin{aligned}|\partial(C_1 \cap C_2 \cap C_3)| + |\partial(C_1 \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3})| + |\partial(\overline{C_1} \cap C_2 \cap \overline{C_3})| +&\\ |\partial(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap C_3)| \leq& |\partial C_1| + |\partial C_2| + |\partial C_3|\\ \leq& (k+1) + (k+1) + (k+1) - 2\end{aligned}$$

A kiinduló négy tagú összegben szereplő háromtagú metszethalmazok mindegyike nem üres (az elsőnek eleme x, a többi üressége abból ered, hogy $\mathcal{C}_0$ minimális). Így az (L) tulajdonság miatt a négy tagú összeg mindegyik tagja legalább k. Összefoglalva $4k \leq 3k + 1$, azaz rendezés után $k \leq 1$.

Ez ellentmondás, mert feltettük, hogy $k \geq 2$. Azaz valamelyik uy él kielégíti a lemma állítását.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!