Síkgráfok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Rövid határú tartományok

(0) Ha v egy izolált pont, akkor v csúcspontja $G - v$ lerajzolásában egy tartományának belső pontja. Ez a tartomány G lerajzolásában is szerepel és határához v egy 0 hosszú sétát ad, azaz hosszát nem növeli. Ha G nem tartalmaz élt (minden csúcsa izolált), akkor egyetlen tartománya van, amely határának hossza 0.

(1) Ha egy tartomány határa egy 1 hosszú séta, akkor az egyetlen hurokél (élgörbéje egy záródó Jordan-görbe)

(2) Ha egy tartomány határa egy 2 hosszú séta, akkor az vagy egy párhuzamos élpár, vagy egy él oda-vissza bejárása. A második esetben az egész gráf két pont és egy összekötő él által alkotott gráf.

Könnyű látni, hogy páros gráf esetén minden tartomány határa páros hosszú. Igazából egy páros gráfban minden záródó séta páros hosszú.

Észrevétel

Összefoglalva kimondhatjuk a következő állítást.

Észrevétel

(i) Ha G egy legalább három pontú, egyszerű, összefüggő gráf, akkor minden tartományának határa legalább 3 hosszú.

(ii) Ha G egy legalább három pontú, egyszerű, összefüggő, páros gráf, akkor minden tartományának határa legalább 4 hosszú.

Euler tétele

Tétel (Euler tétele)

Legyen G összefüggő, szépen síkrarajzolt gráf (λ a szép lerajzolás). Ekkor

$$|T(G,\lambda)| - |E(G)| + |V(G)| = 2,$$

ahol $T(G,\lambda)$ a tartományok/országok halmaza.

1. Bizonyítás: Indukció

G összefüggő így gondolhatunk rá mint egy feszítőfa, amelyhez további éleket adtunk hozzá (új csúcsok bevezetése nélkül).

A hozzáadott élek h száma szerinti teljes indukcióval bizonyítunk.

Ha $h = 0$, akkor gráfunk egy fa, azaz $|T(G, \lambda) = 1|$ és $|E(G)| = |V(G)| - 1$. Az állítás egyszerű számtan.

1. Bizonyítás (folytatás)

Hogy viselkednek paramétereink, ha G felépítése közben egy R feszítő részgráfban két csúcs között behúzunk egy élt (legyen R^+ a bővített gráf).

Nyilván

$$|V(R^+)| = |V(R)|, |E(R^+)| = |E(R)| + 1, |T(R^+, \rho^+)| = |T(R, \rho)| + 1,$$

ahol ρ a λ szép lerajzolás megszorítása R-re, míg ρ^+ a ρ lerajzolás kiterjesztése a hozzáadott él élgörbéjével.

Csak az utolsó egyenlőség szorul magyarázatra: Az új él egyetlen régi tartományon belül halad (szép lerajzolással dolgozunk). A Jordan-tételre való hivatkozással adódik, hogy ezt a tartományt ketté osztja az új élgörbe.

2. Bizonyítás: Dualizálás

Legyen G a tételbeli gráf és λ a szép lerajzolása.

Tudjuk, hogy bevezethető a G^* duális gráf és ennek egy λ^* lerajzolása.

Minden $e \in E(G)$ élnek van egy e^* párja a duális gráfban.

G összefüggő, így van egy T feszítőfája.

Legyen

$$F = \{e \in E(G) : e \in E(T)\} = E(T), \quad F^* = \{e^* \in E(G) : e \notin E(T)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $|F| + |F^*| = |E(G)|$ és $|F| = |V(G)| - 1$.

Belátjuk, hogy F^* egy feszítőfa élhalmaza G^*-ban.

Ebből adódik a tétel: Valóban. Ekkor $|F^*| = |V(G^*)| - 1 = |T(G, \lambda)| - 1$ és egyszerű számtan adja a bizonyítandót.

2. Bizonyítás (folytatás)

A bizonyítandónk: F^* körmentes és az összes duális csúcsot egy komponensbe fűzi fel.

(1) Tegyük fel, hogy e^* egy kör egy éle F^*-ban. Ez egy szépen lerajzolt kör, azaz felosztja a síkot egy belső és külső tartományra.

Az e él egyik végpontja belül, a másik kívül van. Az eredeti csúcsok két (nem üres) osztályba sorolhatók a kör által definiált két tartomány alapján.

Ezen két csúcs-osztály között nem haladhat él T-ben, ami ellentmond annak, hogy T a G feszítőfája.

2. Bizonyítás (folytatás)

(2) F egy körmentes élhalmaz, azaz a megfelelő élgörbék nem osztják fel a síkot, a duális csúcspontok egy összefüggő tartományba esnek.

Tetszőleges kettőt összeköthetünk folytonos görbével amelyek elkerülik az F-beli élek élgörbéit.

Ez a folytonos vonal könnyen diszkretizálható egy G^*-beli sétává, ami csak F^* éleit tartalmazza.

Euler-tétel második forma

A tétel egy kicsit eklektikus. Gráfparaméterek és a geometriai/topológia környezettől függő paraméterek összefüggése.

A következő következmény csak gráfelméleti paramétereket használ, emiatt sokszor hasznosabb az eredeti Euler-tételnél.

Következmény

Legyen G egyszerű síkgráf, továbbá $|V(G)| \geq 3$. Ekkor

(i) $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$,

(ii) ha G ráadásul páros gráf, akkor $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

Bizonyítás (i)

Feltehető, hogy G összefüggő és egy λ szép lerajzolása is adott.

Minden tartományra adjuk össze a határának hosszát.

Egyrészt az élszám dupláját kapjuk.

Másrészt $|T(G,\lambda)|$ darab, legalább 3-as tag összege lesz az eredmény.

A kétféle gondolatmenet összevetéséből.

$$2|E(G)| \geq 3|T(G,\lambda)|.$$

Az Euler-tétel háromszorosa szerint

$$3|T(G,\lambda)| = 3|E(G)| - 3|V(G)| + 6.$$

A két egyenlőtlenség együtt adja a bizonyítandót.

Bizonyítás (ii)

A fenti gondolatmenet megismételhető azzal a különbséggel, hogy a határok hosszának összegében szereplő tagokról tudjuk, hogy legalább 4-ek.

A hiányzó számtant az érdeklődő olvasóra hagyjuk.

Euler tételének következményei

Tétel

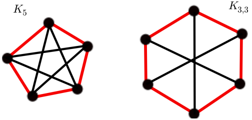
A K_5 és $K_{3,3}$ gráfok nem síkgráfok.

A $K_{3,3}$ gráf egy másik neve a három-ház-három-kút gráf.

Ez onnan ered, hogy a tétel állítása megfogalmazható úgy is, hogy nem tervezhető kilenc út három ház és három kút között (mindegyik háztól mindegyik kúthoz) úgy, hogy az utaknak a közös végpontokon (amennyiben van ilyen) ne legyen közös pontja.

1. Bizonyítás

A $K_{3,3}$ és K_5 gráf alábbi lerajzolásából indulunk ki.



Mindkét lerajzolás kiemel egy-egy gráfelméleti kört (piros színű élek). Ezeket a kör-részgráfokat lényegében egyféleképpen lehet szépen lerajzolni.

Egy lerajzolt kör a síkot belső (korlátos) és külső (nem korlátos) részre osztja.

Az ábrákon a kör mellett további élek szerepelnek (ezekre mint hidak hivatkozunk). Ezeket viszonyíthatjuk a kör lerajzolásához: lehetnek külsők és belsők. A két szerep (külső/belső) szimmetrikus. így feltehető, hogy többségük belül halad.

1. Bizonyítás (folytatás)

Tegyük fel, hogy a kör szép lerajzolása a két gráf teljes szép lerajzolásává terjeszthető ki. Ezek után a két gráfot külön kezeljük:

$K_{3,3}$: Feltevésünk szerint belül (ami topologikusan azonos egy körvonal belsejével) legalább két híd van, amik keresztezik egymást és átmetszés nélkül lerajzolhatók. Ez lehetetlen.

K_5: Feltevésünk szerint belül legalább három híd van. Bárhogy választjuk is ki a belülre kerülő három élt, lesz közöttük kettő, ami az előző esethez hasonlóan nem fut össze és keresztezi egymást. Ez lehetetlen.

2. Bizonyítás

Az Euler-tétel második alakájának (i) része adja, hogy K_5 nem síkgráf: Valóban K_5 nem teljesíti a $|E| \leq 3|V| - 6$ feltételt ($|E| = 10$ és $3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$).

A tétel (ii) része adja, hogy $K_{3,3}$ nem síkgráf: Valóban $K_{3,3}$ páros gráf és nem teljesíti a $|E| \leq 2|V| - 4$ feltételt ($|E| = 9$ és $2|V| - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$).

Szünet

Definíció: Él elhagyás operáció

Definíció

Legyen G egy gráf, $e = xy \in E$ egy éle.

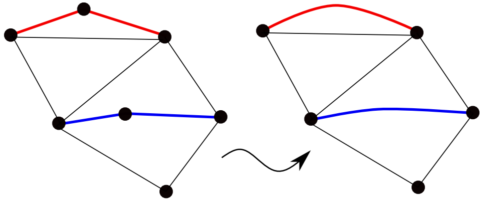
Ekkor $G - e$ (vagy más jelöléssel $G \backslash e$) azt a gráfot jelöli, amit G-ből az e él elhagyásával kapunk.

Élek összevonása operáció

Definíció

Legyen e és f a G gráf két éle, amely egy x másodfokú csúcsban fut össze. Az e és f élek összevonásával kapott gráfot úgy kapjuk G-ből, hogy elhagyjuk az $e = ux$, $f = vx$ éleket és x csúcsot, továbbá hozzáadunk egy új uv élet.

Az alábbi ábra két piros él és két kék él összevonását mutatja:



Az e és f élek összevonásával kapott gráf jelölése legyen $G(e \wr f)$.

Kontrakció operáció

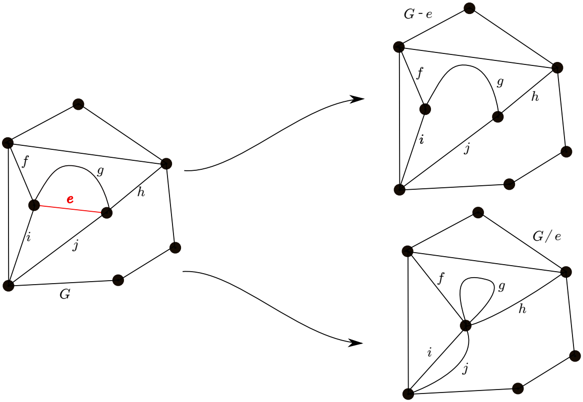
Definíció

Jelölje G/e az e él összehúzásával/kontrakciójával nyert gráfot, mely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- $V(G/e) = (V(G) - \{x, y\} \dot{\cup} \{[e]\}$,
- $E(G/e) = E(G) \setminus \{e\}$,
- $I(G/e)$ természetesen adódik: Amely él eddig x-re vagy y-ra illeszkedett, az most az x és y csúcsokat reprezentáló új ($[e]$) csúcsra illeszkedik. A többi illeszkedés marad.

Él elhagyása és a kontrakció operáció képen

Az alábbi ábrán egy G gráfbeli e (piros) élt emelünk ki, majd megmutatjuk az e elhagyása és e összehúzásával nyert gráfokat.



Ha a fent említett e él hurokél, akkor $G/e = G - e$.

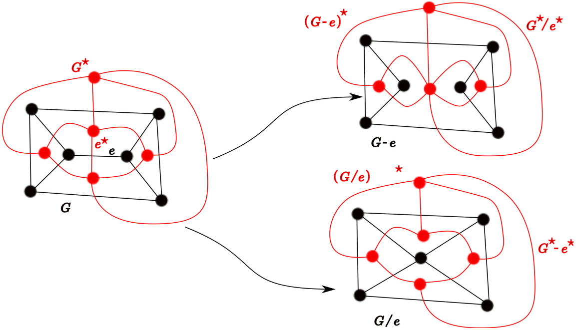
Dualitás

Emlékeztető

Legyen G egy síkrarajzolt gráf. Ekkor a G gráf duálisán azt a G^* gráfot értjük, melynek csúcsai G tartományai, élei pedig megfelelnek G éleinek úgy, hogy az e él e^* párja azon két tartományt reprezentáló csúcsokat köti össze, melyek e két oldalán szerepelnek (így speciálisan szomszédosak).

Dualitás és az operációk

A következő két ábra a fent ismertetett két operációt, az élelhagyást, illetve az élösszehúzást illusztrálja a G gráfon, illetve annak G^* duálisán.



Az operációk kapcsolatai

Az ábra azt sugallja, hogy $(G-e)^* = G^*/e^*$ és $(G/e)^* = G^* - e^*$.

Állítás

(i) $(G-e)^* = G^*/e^*$,

(ii) $(G/e)^* = G^* - e^*$.

Megjegyzés

$G(e \wr e') \simeq G/e \simeq G/e'$.

Az érdeklődő hallgató számára a fenti állítások bizonyítása egy lehetséges feladat.

Részgráf, topologikus részgráf, minor

Definíció

Legyen G egy gráf.

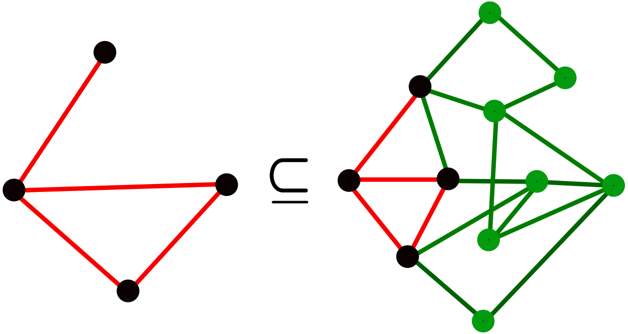
a) Ha a G gráfból az R gráf él- illetve csúcselhagyásoperációk segítségével megkapható, akkor R-et a G gráf részgráfjának nevezzük. Jelölésben: $R \subseteq G$.

b) Ha a G gráfból a T gráf él- illetve csúcselhagyás és élpár összevonása operációk alkalmazásával megkapható, akkor a G gráfban T a G gráf topologikus részgráfja. Jelölés: $T \leq G$.

c) Ha a G gráfból az M gráf élösszehúzás és él- illetve csúcselhagyás operációkkal nyerhető, akkor T minorként szerepel (H a G minorja). Jelölésben: $M \preceq G$.

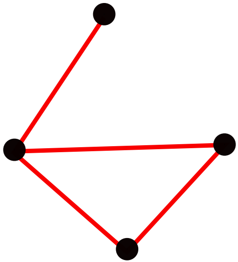
Részgráf: példa

A R piros gráf a G gráf részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva éppen az R gráfot kapjuk.

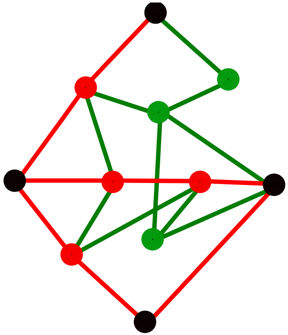


Topologikus részgráf: példa

A T piros gráf a G gráf topologikus részgráfja, hiszen a zölddel jelölt éleket és csúcsokat elhagyva, a pirossal jelölt éleket összevonva éppen a T gráfot kapjuk.

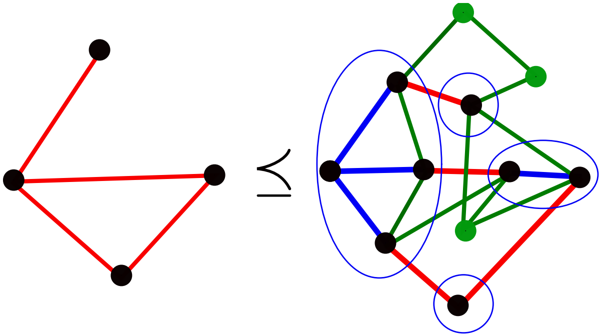


$\leq$



Minor: példa

Az M piros gráf a G gráf minorja, hiszen ha a zölddel jelölt éleket elhagyjuk, a kijelölt klaszterekben szereplő kék feszítőfa éleit éleit összehúzzuk, akkor éppen az M gráfhoz jutunk. (A klaszterek zsugorodnak össze M csúcsaivá.)



Kapcsolatok

Egy részgráf topologikus részgráf is egyben.

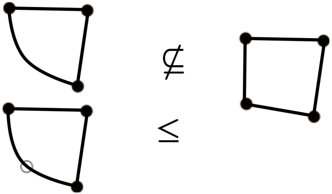
Egy topologikus részgráf minor is egyben.

Formálisan, ha G, R gráfok, akkor

$$G \supseteq R \Rightarrow G \geq R \Rightarrow G \succeq R.$$

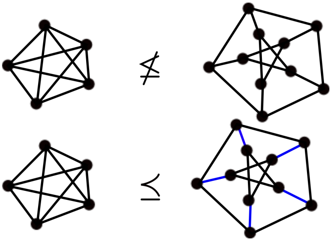
Visszafelé viszont egyik állítás sem érvényes (lásd alábbi példák).

Példa topologikus részgráfra, amely nem részgráf



C_4-ből C_3 bármely két összefutó e és e' élek összevonásával megkapható, vagyis C_3 C_4 topologikus részgráfja. C_4-nek több csúcsa van mint C_3-nak. Részgráfság esetén alkalmazni kellene a csúcselhagyás operációt, ami bármilyen végrehajtás esetén egy kételű gráfhoz vezetne. Tehát C_3 nem részgráfja C_4-nek.

Példa minorra, amely nem topologikus részgráf



A Petersen-gráfból K_5 a kék színnel jelölt élek összehúzásával adódik, tehát K_5 a Petersen-gráfban minor. K_5 nem topologikus részgráfja a Petersen-gráfnak, hiszen a Petersen- gráf minden csúcsának fokszáma 3, K_5 csúcsainak fokszáma viszont 4. Két másodfokú csúcsba futó él összevonásával, csúcs- illetve élelhagyás-operációval viszont nem lehet fokszámot növelni.

Észrevétel

Észrevétel

Ha G síkgráf, $R \subseteq G$; $T \preceq G$; $M \preceq G$ teljesül, akkor R, T, M is síkgráf.

Szünet

További nem-síkgráfok

Következmény

Ha G síkgráf, akkor K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet részgráf G-ben, K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet topologikus részgráf G-ben, illetve K_5 és $K_{3,3}$ nem lehet minor G-ben.

Ha K_5 vagy $K_{3,3}$ minden élére egy új csúcsot helyezünk, akkor ugyancsak nem síkgráfhoz jutunk, de részgráfként már nem találjuk a K_5, $K_{3,3}$ gráfokat. Azok csak topologikus részgráfként, illetve minorként lesznek G-ben.

Azaz az első állítás nem megfordítható. Az utolsó két állítás viszont megfordítható.

Kuratowski és Wagner tétele

Tétel

A következő három állítás ekvivalens:

(i) A G gráf síkgráf.

(ii) A G gráfnak nem topologikus részgráfja a K_5 és $K_{3,3}$ gráf ($G \not\succeq K_5; K_{3,3}$).

(iii) A G gráfban nincs K_5 és $K_{3,3}$ minor ($G \not\succeq K_5; K_{3,3}$).

A fenti hármas ekvivalencia két független eredmény összegzése: (i)⇔(ii) a Kuratowski-tétel, míg (i)⇔(iii) a Wagner-tétel.

Wagner tételének bizonyítása

Wagner-tételét indirekten bizonyítjuk. tegyük fel, hogy van G ellenpélda rá. Azaz G nem síkgráf és nincs benne sem K_5, sem $K_{3,3}$ minor. Ekkor van olyan G ellenpélda is, ami minimális ($|V| + |E|$ a lehető legkisebb). így G minden „csonkítása" elveszti ellenpélda mivoltát. Ez a csonkított rész egy minor, így ez csak úgy lehet, ha az már síkgráf. A bizonyítás hátralévő része „ellentmondás-vadászat".

Lemma

G 3-szorosan összefüggő egyszerű gráf.

Lemma

Ha H 3-szorosan összefüggő és $|V(H)| > 4$, akkor alkalmas e élére H/e is 3-szorosan összefüggő.

A Lemma következménye

A két lemma bizonyítása is csak egy technikai „kitérő” a Wagner-tétel gondolatmenetében. A következő fejezetre hagyjuk.

Következmény

Legyen H egyszerű, háromszorosan összefüggő gráf, melynek csúcsszáma legalább 5. Ekkor található olyan $xy \in E(H)$ él, melyre a $H - \{x, y\}$ gráf kétszeresen összefüggő.

A lemmában szereplő e él megfelelő, hiszen $H - \{x, y\} = (H/e) - [e]$ kétszeresen összefüggő lesz.

A Következmény a G ellenpéldára

Legyen e a Lemma és a Következmény közös éle. G/e nem tartalmaz K_5, illetve $K_{3,3}$ minort (minorjaik G-nek is minorjai), háromszorosan összefüggő, így az indukciós feltevés alapján G/e szépen lerajzolható.

Ebben a lerajzolásban ott van a $G - \{x, y\}$ gráf lerajzolása és a kontrahált élt reprezentáló $[e]$ csúcs is.

A $G - \{x, y\}$ gráf kétszeresen összefüggő, így lerajzolásának minden tartományát egy kör határolja.

Azt is amely belsejében ott van az $[e]$ csúcs. Legyen C ezen tartomány határoló körgráf.

A Következmény a G ellenpéldára (folytatás)

Legyen $P = N(x) \cap V(C)$, $K = N(y) \cap V(C)$, ahol $N(x)/N(y)$ az x/y csúcs szomszédainak halmaza.

P elemeire mint piros, K elemeire mint kék csúcsok hivatkozunk.

Fontos látni, hogy $P \cap K \neq \emptyset$ eset is előfordulhat, azaz a két szín nem két kizáró kategória.

A következő két fogalom és egy főlemma segítségével juthatunk el a bizonyítás befejezéséhez.

Ívek, szeparálhatóság

Definíció

Egy kört C kört u és v csúcsa $(u, v \in V(C))$ két zárt ívre bontja, mégpedig az $[u, v]^{\curvearrowright}$ és $[v, u]^{\curvearrowright}$ ívre. A két ív a két uv út csúcshalmaza. Körünk szépen lerajzolt a síkra, így az ívek megkülönböztethetők: a jelölésben az első csúcsból indulva, óramutató járása szerint haladva jutunk el a második csúcshoz. A két ív (csúcshalmaz) metszete az $\{u, v\}$ csúcsok. $(u, v)^{\curvearrowright}$ legyen $[u, v]^{\curvearrowright} - \{u, v\}$.

Definíció

Legyen A és B a C kör csúcshalmazának két részhalmaza. Azt mondjuk, hogy A és B szeparálható, ha megadhatóak olyan $u, v \in V(C)$ csúcsok, melyekre $A \subseteq [u, v]^{\curvearrowright}$ és $B \subseteq [v, u]^{\curvearrowright}$, vagyis létezik olyan felbontása a körnek, hogy A az egyik ív, B a másik ív csúcsainak részhalmaza.

A Főlemma

Megjegyezzük, hogy a két ív zárt, így végpontjaik közösek. A definíció megengedi, hogy nem-diszjunkt ponthalmazok is szeparálhatók legyenek.

Főlemma

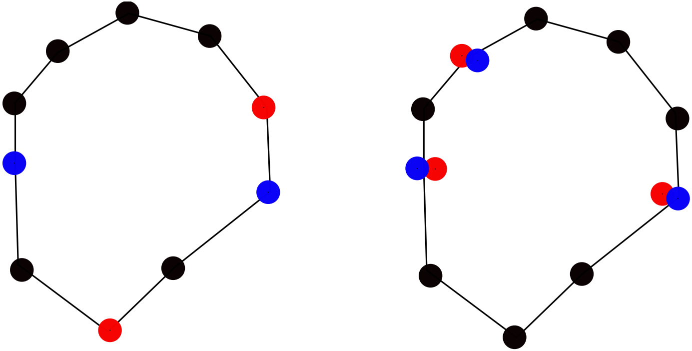
Legyen C egy kör és A és B a kör két véges részhalmaza. A és B pontosan akkor nem szeparálható, ha a következő két lehetőség valamelyike teljesül.

(i) Létezik olyan $a, a' \in A$ és $b, b' \in B$ négy különböző csúcs, melyek a körön felváltva helyezkednek el, azaz az $(a, a')^{\curvearrowright}$ ív b és b' közül pontosan egyet tartalmazzon.

(ii) $A = B$ és $|A| = |B| = 3$.

A Főlemma képen

A szeparálhatóságot megakadályozó konfigurációk a következő ábrán láthatók (A és B a piros/kék színekkel kódolt).

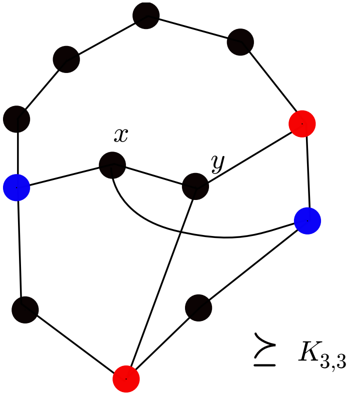


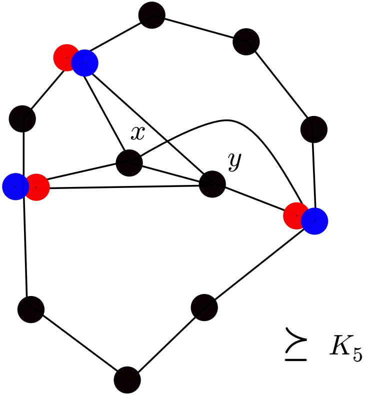
A lemma egyszerű eset analízissel ellenőrizhető. Ezt az érdeklődő hallgatóra bízzuk.

Wagner-tétel bizonyításának vége

1. eset: P és K nem szeparálhatóak a C kör mentén. A főlemma alapján az (i) vagy (ii) akadályok valamelyike fellép.

Wagner-tétel bizonyításának vége (folytatás)





Látható, hogy az (i) esetben $K_{3,3}$, az (ii) esetben K_5 jelenik meg minorként, ami ellentmondás, hiszen G-ről feltettük, hogy nincs benne K_5 illetve $K_{3,3}$ minor.

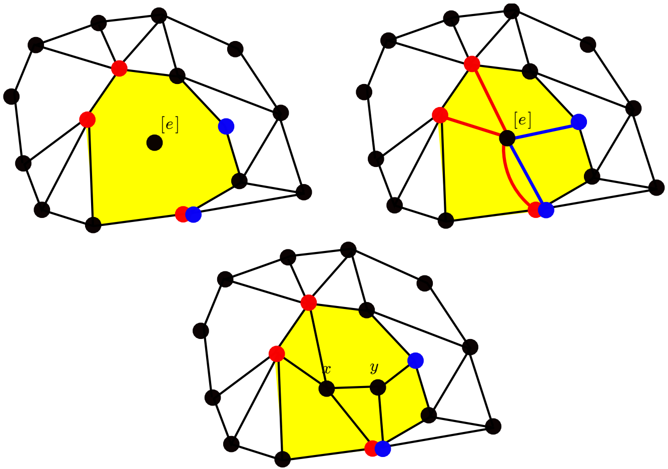
Wagner-tétel bizonyításának vége (folytatás)

2. eset: P és K szeparálhatóak a C kör mentén.

A P halmaz és a K halmaz pontjai ott vannak a C kör éleinek görbéjén (amely élgörbék egy Jordan-görbévé olvadnak össze). Ábrázoljuk a $G - \{x, y\}$ megfelelő tartományát és az $[e]$ csúcsot, ahol $[e]$ az összehúzott e élt reprezentáló csúcs pontja.

Az $[e]$ csúcsból kiinduló élek egy része eredetileg x-ből indult és P valamelyik eleméhez ment, másik részük eredetileg y-ból indult és K valamelyik eleméhez ment. Mivel P és K szeparált, ezért ezen éleknek megfelelő élgörbék megrajzolhatók átmetszés nélkül úgy, hogy az $[e]$-t reprezentáló csúcs körül a kiinduló görbék között egy blokkban legyenek a P-hez és egy blokkban legyenek a K-hez menő görbék.

Wagner-tétel bizonyításának vége (folytatás)



G/e ezen lerajzolásából G egy szép lerajzolása már könnyedén előállítható, ha a kontrakciót „visszavonjuk”.

Tételek lerajzolásokra

Végezetül néhány tétel kimondása következik bizonyítás nélkül.

Tétel (Fáry-tétel)

Ha G egyszerű síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbéje szakasz legyen.

Tétel (Tutte-tétel)

Ha G egyszerű, 3-szorosan összefüggő síkgráf, akkor lerajzolható úgy, hogy minden élgörbe egyenes szakasz, továbbá minden korlátos tartománya konvex sokszög.

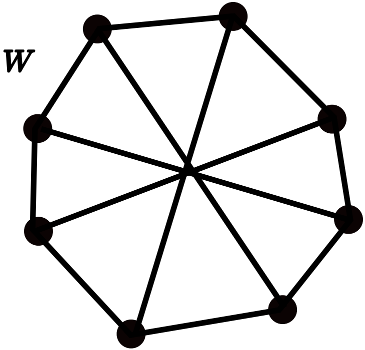
Tétel (Steinitz-tétel)

Egy G gráf pontosan akkor egy konvex poliéder élgráfja, ha 3-szorosan összefüggő egyszerű gráf.

Wagner struktúratétele

Tétel (Wagner struktúratétele)

A G gráf pontosan akkor nem tartalmaz K_5 minort, ha felépíthető síkgráfokból és W Wagner-gráfból (lásd alább) legfeljebb három pontú klikk menti összeragasztásokkal és csúcs- illetve élelhagyásokkal.



Wagner-tétel, 4CT

Következmény

(Wagner színezési tétele)] Ha a G gráf tartalmaz K_5 minort, akkor a kromatikus száma legfeljebb 4.

Wagner színezési tétele azt mondja, hogy a négy-szín-tétel ezen alakjában elég csak K_5-t minorként kizárni. Ez az élesítés nagyon fontos.

Bizonyítása a struktúratétel után, a négy-szín-tételre vonatkozó hivatkozással egyszerű: A síkgráfok és a Wagner-gráf 4-színezhető, a klikkek menti ragasztás nem növeli meg a kromatikus számot. Azaz az élesítés nem sokkal nehezebb mint a négy-szín-tétel.

Hadwiger-sejtés

Sejtés (Hadwiger-sejtés)

Ha a G gráf nem tartalmaz K_{k+1} minort, akkor G kromatikus száma legfeljebb k.

Illetve egy ekvivalens megfogalmazása:

Sejtés (Hadwiger-sejtés)

Ha a G gráf nem k-színezhető, akkor tartalmaz K_{k+1} minort.

Hadwiger-sejtés rokonai

BSc-s tanulmányainkból tudjuk, hogy a minorság helyett részgráfsággal dolgozva a megfelelő állítás „nagyon hamis”.

Nem annyira nyilvánvaló, hogy topologikus részgráfsággal dolgozva is (nagyon) hamis állításhoz jutunk (ezt láthatjuk, ha az interneten a ‘Hajós-conjecture’-re keresünk).

Hadwiger-sejtés részeredményei

A minorokat használó Hadwiger-sejtés $k = 2$ esetet triviális.

A $k = 3$ esete egyszerű.

A $k = 4$ eset igaz (Wagner színezési tétele), a négy-szín-tétellel ekvivalens (ahogy vázoltuk).

Ahogy k nő a sejtés nehezedik (miért?).

Ennek ellenére a $k = 5$ eset (a négy-szín-tétel élesítése) bizonyított.

A bizonyítása a négy-szín-tételre hivatkozik, de így is nagyon bonyolult.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!