Síkrarajzolt gráfok tartomány-színezései

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Négy-szín-tétel

A színezési problémák fontos alkalmazásokkal rendelkeznek.

A gráfelméleti vizsgálatuk mégis egy „fejtörővel" kezdődtek a XIX. században.

Az ösztönző probléma a négy-szín-sejtés volt.

Manapság már tételként ismerjük ezt (angolul 4-color-theorem, rövidítve 4CT).

Gráfok lerajzolása

Egy *G gráf ρ lerajzolása* egy (ρ_V, ρ_E) leképzés-pár, ahol a következők teljesülnek:

(i) $\rho_V : V(G) \to \mathbb{R}^2$ injenktív függvény, azaz a gráf minden csúcsához a sík egy-egy pontját rendeljük úgy, hogy különböző csúcsokhoz különböző pontok tartozzanak. // A leképzés értékkészletének pontjaira mint *csúcspontok* hivatkozunk.

(ii) $\rho_E : E(G) \to \mathcal{J}$, ahol $\mathcal{J}$ a sík folytonos, egyszerű (önmagát át nem metsző) görbéi. Feltesszük, hogy $e = xy$ esetén a $\rho_E(e)$ görbe a $\rho_V(x)$ és $\rho_V(y)$ csúcspontokat köti össze és más csúcsponton nem is halad át. // A leképzés értékkészletének görbéire mint *élgörbék* hivatkozunk.

Feltesszük, hogy két élgörbének véges sok közös pontja van. Továbbá ezek a közös pontok vagy közös végpontok, vagy átmetszések.

Síkgráfok

Emlékeztető

Egy gráf szépen síkrarajzolható, ha lerajzolható úgy, hogy semelyik két élgörbének a lehetséges közös végponton kívül nincs más közös pontja.

Egy gráf síkgráf, ha van szép síkrarajzolása.

Nem minden gráf síkgráf.

Tartományok

Egy G szépen síkrarajzolt gráf a síkot tartományokra osztja.

Definíció

A sík élgörbék által le nem fedett pontjai között bevezetünk egy relációt: $P \sim Q$, ha van olyan PQ folytonos görbe, amely elkerüli az élgörbéket.

Ez egy ekvivalencireláció.

Ekvivalenciaosztályai ponthalmazok, a lerajzolás tartományai.

Tétel

Legyen G egy tetszőleges körmentes gráf és λ egy szép lerajzolása. Ekkor egyetlen tartomány van.

Példa/Alaptétel: C_n

Tétel

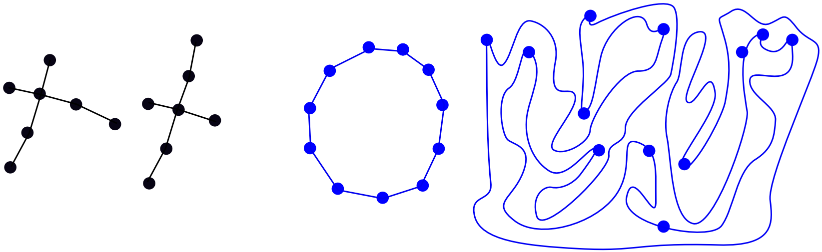
Legyen C_n az n pontú (és n élű) körgráf és λ egy szép lerajzolása. Ekkor pontosan két tartomány van: egy korlátos ($\equiv$ belső) és egy nem korlátos ($\equiv$ külső). Továbbá a leraizolás topológiai értelemben egyértelmű.

Egy $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképzés homeomorfia (topologikus izomorfia, ha bijekció és $h, h^{<-1>}$ is folytonos).

Egy ilyen H-ra úgy gondolunk mint a sík egy folytonos deformációjára.

Két lerajzolás topologikusan ugyanaz, ha a sík egy alkalmas homeomorfizmusa két lerajzolás megfelelő csúcspontjai és élgörbéi között is megfeleltetést létesít.

Példa



A baloldalon ugyanazon fa két topologikusan nem ekvivalens (miért?) lerajzolását látjuk (fekete ábra). A jobb oldalon ugyanazon kör két topologikusan ekvivalens lerajzolását látjuk (kék ábra). Azonosítsuk a jobb oldali lerajzolás belső tartományát.

Topológia és gráfelmélet

A második tétel neve Jordan—Schönflies-tétel és nem olyan egyszerű mint első látásra tűnik.

Az említett tétel egyértelműség nélküli része a nevezetes Jordan-féle görbe-tétel.

Vigyázni kell a tárgyalással: a pontos tárgyalás nehézkes és nem kombinatorikus. A pongyola tárgyalás veszélyes.

A fenti két tételt elfogadjuk, nem bizonyítjuk.

Tartomány határa

Definíció: Határél

Egy G gráf λ szép lerajzolásában vegyünk egy τ tartományt. Egy e élgörbe a τ tartomány *határéle*, ha az élgörbe egy pontjának minden környezete belemetsz a τ tartományba.

Szemléletesen a lerajzolást képzeljük el mint egy kerítés rendszer felülnézeti képe. Képzeljük magunkat az egyik tartomány beleséjébe. Menjünk az egyik határélhez, tegyük rá kezünket és járjuk körbe a tartományt. Ezzel egy ZÁRÓDÓ sétát járunk be. Elképzelhető, hogy nem mindegyik határélt érintettük. Ekkor további sétát teszünk egy, még nem érintett határélből kiindulva és ezt tesszük addig amíg az összes határélt bejártuk.

Definíció: Határ

A határ formálisan egy séta-halmaz. A határ hossza a séták hosszának összege.

Észrevételek

Észrevétel

Ha G izoláltcsúcs-nélküli nem összefüggő gráf egy szép lerajzolással, akkor van olyan tartománya, amely határélei között két komponensből is vannak pontok. Ekkor ezen tartomány határa több sétából áll.

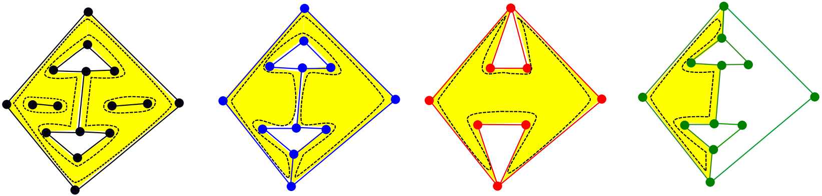
Megfordítva, ha G összefüggő egy szép lerajzolással, akkor minden tartományának határa egyetlen séta.

Észrevétel

Ha G egy összefüggő e elvágó élt tartalmazó gráf, akkor azon tartományának határa, amelyhez e határél egy olyan séta, amelyen az e él ismétlódik.

Megfordítva, ha G egy összefüggő elvágó él nélküli gráf, akkor minden tartományának határa egyetlen vonal.

Példák



Az ábra négy lerajzolást mutat négy színben. Mindegyik esetben kiemeltünk egy sárga τ tartományt és ennek szaggatott vonallal rajzolt határát, kissé elmozgatva a tartomány belsejébe a határtól. A fekete lerajzolás gráfja nem összefüggő, τ határa négy sétából áll. A kék lerajzolás gráfja összefüggő, de tartalmaz elvágó élt. Minden tartomány határa egyetlen séta. τ határában van él és csúcs ismétlődés is. A piros lerajzolás gráfja összefüggő, nincs benne elvágó él, de van benne elvágó pont. Minden határ egyetlen egy vonal, de τ határában van csúcs ismétlődés. A zöld lerajzolás gráfja összefüggő, nincs benne elvágó csúcs, elvágó él. Minden határ egy kör.

Síkra rajzolt gráfok: Dualizálás

Legyen (G, λ) egy szépen lerajzolt gráf.

Minden tartomány „közepén” létesítsünk egy „fővárost”.

Minden élgörbe „közepén” létesítsünk egy „határátkelőt”.

Minden határátkelőhöz állítsunk két embert, akik háttal állnak egymásnak és az élgörbénél találkozó két tartomány közül egy-egy felé néznek.

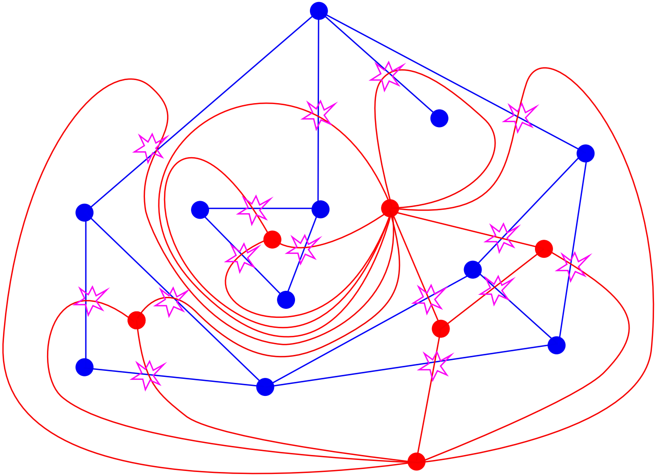
Minden ember „építsen” egy utat/félélt a helyétől a figyelt tartomány fővárosához (a tartományon belül).

A tartományon belüli félélek megvalósíthatók úgy, hogy ne messék egymást (a főváros közös végponton kívül ne találkozzanak).

Definíció

Legyen (G^*, λ^*) az a szépen lerajzolt gráf, amely csúcspontjai a fővárosok, élgörbéi a határátkelőkben összeragasztott félélek.

Példa



Az ábrán látható lila csillagok párbaállítják az eredeti és duális gráf éleit.

Hurokél, elvágóél, dualitás

Megjegyezzük, hogy egy τ tartomány határélei pontosan a duális gráf τ^* csúcsára illeszkedő e^* élek eredeti megfelelő élei.

Az eredeti e elvágóélek e^* hurokéleknek felenek meg a duálisban.

Ahogy ezek az e^* hurokélek a duális gráf τ^* csúcsának fokához kettővel járulnak hozzá, úgy az eredeti e él is kettővel járul hozzá a τ tartomány határának hosszához.

A τ tartomány határának hossza pontosan a duális τ^* csúcsának foka.

G és G^* síkrarajzolt gráfok közötti szótár

EREDETI	DUÁLIS
G síkra rajzolt gráf	G^* síkra rajzolt gráf
tartományok/országok	csúcsok/fővárosok
élek	élek
közös határéllel rendelkező (szomszédos) tartományok	szomszédos csúcsok
tartományszínezés	csúcsszínezés
jó tartományszínezés (szomszédos tartományok különböző színűek)	jó csúcsszínezés
jó színezhetőség feltétele: nincs olyan él, amely mindkét oldalán ugyanaz a tartomány fekszik	jó színezhetőség feltétele: nincs hurokél

G és G^* síkrarajzolt gráfok közötti szótár

EREDETI	DUÁLIS
csúcsok	tartományok
egy csúcsban összefutó élek	egy tartományt határoló élek
fokszám	határ bejárásának hossza
Négy-szín-tétel ($4CT$): kétszeresen élösszefüggő síkra rajzolt gráf tartományai négy színnel jól színezhetők	Négy-szín-tétel ($4CT$): hurokélmentes síkra rajzolt gráf csúcsai négy színnel jól színezhetők
Színezés esetén feltehető: G három-reguláris	Színezés esetén feltehető: minden tartomány háromszög (gráfunk triangulált)

Négy-szín-tétel: Klasszikus forma

Definíció

Egy *térkép* egy szépen (λ) lerajzolt G 2-szeresen élösszefüggő síkgráf.

4CT: tartományszínezési változat

Egy térkép tartományai 4 színnel jól kiszínezhetők.

Elég az alábbi esettel foglalkozni:

4CT: 3-reguláris tartományszínezési változat

Legyen (G, λ) egy térkép. Ha G egy három reguláris gráf, akkor térképünk tartományai 4 színnel jól kiszínezhetők.

Négy-szín-tétel: gráfelméleti forma

4CT: csúcsszínezési változat

Egy hurokélmentes G síkgráfra $\chi(G) \leq 4$.

Elég az alábbi esettel foglalkozni:

4CT: triangulált csúcsszínezési változat

Legyen (G, λ) egy hurokélmentes gráf és szép síkrarajzolása, amelyben minden tartomány háromszög (triangulált). Ekkor $\chi(G) \leq 4$.

Észrevétel

3-regularitás esetén a mohó algoritmus minden gráfot jól csúcsszínez egy 4 elemű palettával.

Triangulált síkrarajzolt gráf tartományai nyilvánvalóan jól 4-színezhetők.

Szünet

A négy-szín-sejtés mint élszínezési probléma

A következő tétel egy harmadik ekvivalens alakot ad, amely élszínezési problémaként fogalmazza meg a központi kérdést/tételt.

Tétel

A következő két állítás ekvivalens:

(i) Ha G 3-reguláris, 2-szeresen élösszefüggő síkgráf, akkor $\chi_e(G) = 3$.

(ii) 4CT.

Élszíntezési tétel $\Rightarrow$ 4CT

Legyen G egy a síkra szépen lerajzolt 3-reguláris kétszeresen élösszefüggő gráf. Elég ezekre belátni 4CT-t.

Tudjuk, hogy G élhalmaza M_1, M_2, M_3 teljes párosítások uniója.

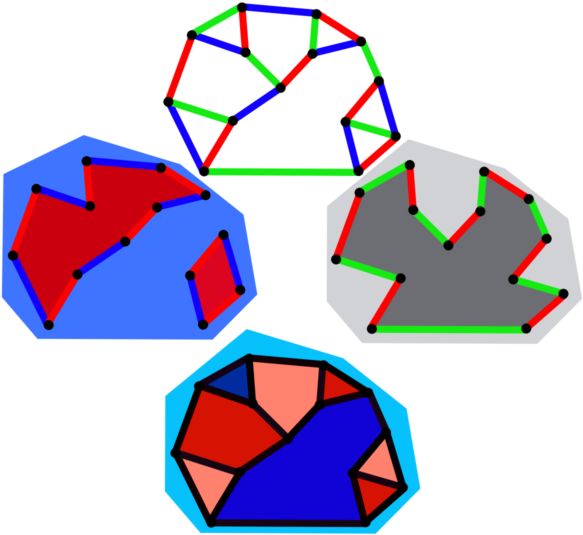
Legyen $M_1 + M_2$ az $M_1 \cup M_2$ élek által meghatározott feszítő részgráf G-ben.

$M_1 + M_2$ egy 2-reguláris részgráf, azaz komponensei körök. Nyilván a részgráfunknak is szépen lerajzolt.

Könnyen látható, hogy az $M_1 + M_2$ tartományai jól színezhetők két színnel (például a komponensek számára vonatkozó teljes indukcióval). Legyen ez a két szín „piros” és „kék”.

Hasonlóan $M_1 + M_3$ tartományai is jól színezhetők két színnel. Legyen ez „világos” és „sötét”.

A bizonyítás ábrán



Bizonyítás vége

Így a síkot kétszer is kiszíneztük, speciálisan a G gráf lerajzolásának minden tartománya kétszer is színt kapott.

Egy tartomány kapott színpárja négyféle lehet: „világoskék”, „világospiros”, „sötétkék”, „sötétpiros”.

Ez egy jó 4-színezése G-tartományainak, mivel bármelyik két szomszédos tartomány $M_1 + M_2$-ben vagy $M_1 + M_3$-ben is külöböző tartományba esik, így színeiknek már ezen komponense is megkülönbözteti őket.

4CT $\Rightarrow$ Élszíntezési tétel

Tudjuk, hogy a G kétszeresen élösszefüggő, 3-reguláris síkgráf tartományait jól 4-színezhetjük. Legyen $1, 2, 3, 4$ a felhasznált színek.

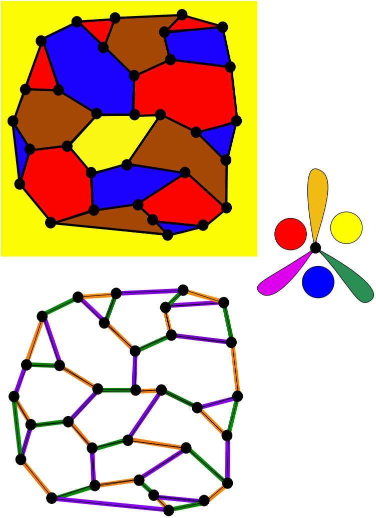
Legyen

$$M_1 := \{e \in E(G) | \text{ } e \text{ két oldalán } 1, 2 \text{ vagy } 3, 4 \text{ színt látjuk}\},$$

$$M_2 := \{e \in E(G) | \text{ } e \text{ két oldalán az } 1, 3 \text{ vagy } 2, 4 \text{ színt látjuk}\},$$

$$M_3 := \{e \in E(G) | \text{ } e \text{ két oldalán az } 1, 4 \text{ vagy } 2, 3 \text{ színt látjuk}\}.$$

A bizonyítás képen



A bizonyítás vége

Belátjuk, hogy ekkor M_1, M_2, M_3 teljes párosítások G-ben és diszjunktak.

A diszjunktság triviális a definíciókból.

Először azt igazoljuk, hogy M_1, M_2, M_3 párosítások:

Tegyük fel, hogy $e, f \in M_i$ valamely $i = 1, 2, 3$ esetén és az x csúcs illeszkedik e-re és f-re is.

x-ben három tartomány fut össze: τ_1, τ_2, τ_3. Ezek különböző színűek. Így e és f nem lehet ugyanabban az M_i élhalmazban.

Végül $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = E(G)$. Valóban, úgy definiáltuk az M_i-ket, hogy bármely két szín találkozik egy e él két oldalán az valamelyik M_i halmaz definíciójának eleget tesz. (A $\binom{4}{2} = 6$ lehetőség mindegyike szerepel a három definícióban.)

Ebből adódik az állítás.

A 4CT élszínezéses változata

A fenti három formája a négy-szín-sejtésnek a XIX. századi matematika eredménye.

A XX. század, benne a számítógépek elterjedésével elvezetett a négy-szín-sejtés igazolásához. A négy-szín-sejtés bizonyítása után a következő tételt mondhatjuk ki.

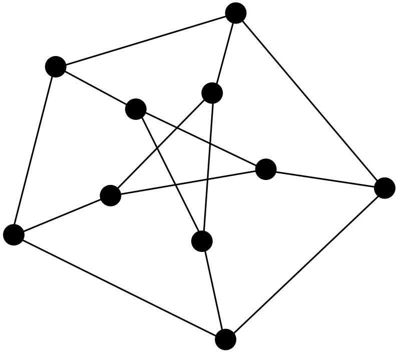
Tétel

Ha G 3 reguláris 2-szeresen élösszefüggő, továbbá síkgráf is, akkor

$$\chi_e(G) = 3.$$

A síkgráf feltétel szükséges.

Az ellenpéldát Petersen adta. Petersen-gráf: 3-reguláris, kétszeresen élösszefüggő, nem síkgráf, és élhalmaza nem áll elő $M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} M_3$ alakban, ahol az M_i-k párosítások.



Köszönöm a figyelmet!