Gráfok élszínezései

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Bevezetés

Definíció

G gráf élszínezése $c : E(G) \to \mathbb{N}^+$ függvény. c egy k-élszínezése G-nek, ha $c(E(G)) \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$.

Definíció

c jó élszínezése G-nek, ha minden x csúcsra az ott összefutó éleknek $d(x)$ darab különböző színe van.

Jelölés

$$\chi_e(G) := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : G\text{-nek van jó } k\text{-élszínezése}\}.$$

A hurokél akadálya a jó színezésnek. Ebben az előadásban minden gráfunk hurokél-mentes.

Emlékeztető

$\Delta(G) := \max_{x \in V(G)} d(x)$, a G gráf maximális fokszáma.

Észrevétel

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G).$$

Példa

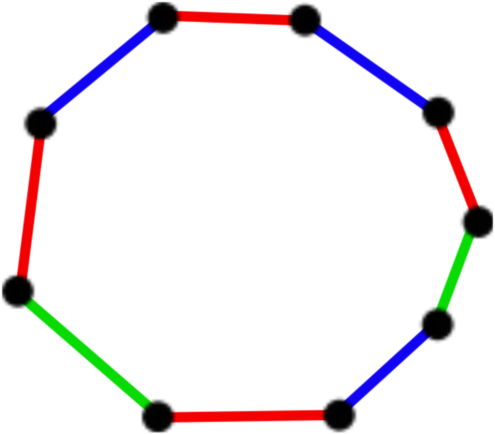


Figure: C_{2k+1} páratlan kör ($k \in \mathbb{Z}^+$) (az ábrán $k = 4$). Könnyen látható, hogy $\Delta(C_{2k+1}) = 2$ és $\chi_e(C_{2k+1}) = 3$.

Példa

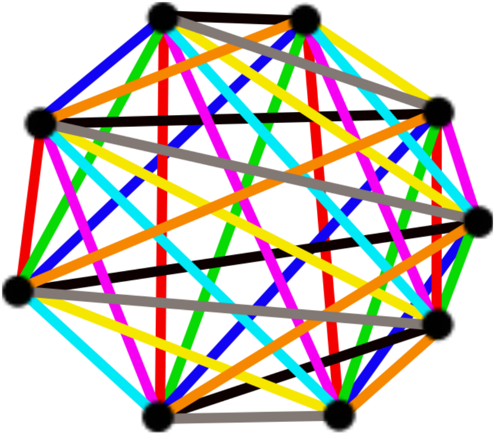


Figure: K_{2k+1} páratlan pontú teljes gráf (az ábrán $k = 4$). Ekkor $\Delta(K_{2k+1}) = 2k$ és $\chi_e(K_{2k+1}) = 2k + 1$.

Példa

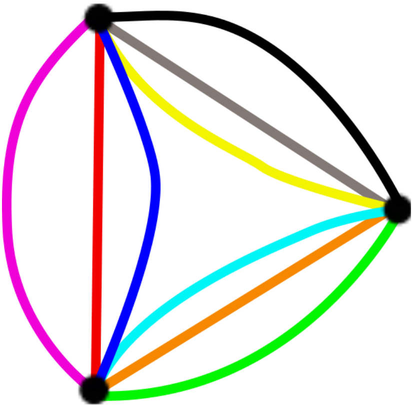


Figure: Legyen T_k az a gráf, amelynek három csúcsa és bármely kettőt k párhuzamos él köti össze (az ábrán $k = 3$). Ekkor bármély két él szomszédos. Így $\Delta(T_k) = 2k$ és $\chi_e(T_k) = 3k$.

Alaptételek

Tétel (Shannon tétele)

Legyen G hurokél-mentes gráf. Ekkor

$$\chi_e(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G).$$

Tétel (Vizing tétele)

Legyen G egyszerű gráf. Ekkor

$$\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk. c_0 lehet egy algoritmus futásának részeredménye, vagy egy indukció bizonyítás indukciós feltevése.

A színezetlen élekre szeretnénk kiterjeszteni c_0-t. Ennek leírása lehet algoritmusunk következő teendője, vagy az indukciós bizonyítás indukciós lépésének igazolása.

Minden v csúcsra legyen S_v a v körüli éleken nem használt palettabeli színek halmaza. Azaz $|S_v| = |P| - d_v$, ahol d_v a v-re illeszkedő színezett élek száma.

Ha egy színezetlen uv élre $S_u \cap S_v \neq \emptyset$, akkor tetszőleges $\gamma \in S_u \cap S_v$ színre az e élre kioszthatjuk a γ színt. Ezt a c_0 mohó kiterjesztésének nevezzük (a korábban színezett élek megtartják színüket).

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

Kiemelünk két színt: γ és γ'-t. $G_{\gamma,\gamma'}$-t alkossa G összes csúcsa és a γ, illetve γ' színű élek.

Ezen részgráf maximális foka 2. Azaz komponensei utak és körök. A körök páros hosszú körök, amelyeken a két szín alternál.

Egy P útkomponens mentén (legyen x és y az út két végpontja, amely csúcsokról feltesszük, hogy $x \neq y$) a γ, γ' színek felcserélése egy módosított jó élszínezéshez vezet, amelyben a színezett élek halmaza nem változott.

Könnyű látni, hogy az úton kívüli pontokban, az ott összefutó éleket látva semmi nem érzékelhető a színezés módosításából. Az út belső pontjaiban két él színe felcserélődött, de az S halmaz nem változott.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatások haszna

x-ben és y-ban S megváltozik, az új halmazok: $S_x \Delta \{\gamma, \gamma'\}$, $S_y \Delta \{\gamma, \gamma'\}$. Ez valódi változás.

x és y a $G_{\gamma,\gamma'}$ egy útkomponensének végpontjai, így γ, γ' színek egyike az út mentén illeszkedik rá, míg a másik szín szabad szín (a komponens „nem folytatódik tovább").

Ha a mohó kiterjesztés nem működik, akkor ez a kicsinek tűnő változtatás sokat jelenthet.

Szünet

Shannon tételének bizonyítása

A tétel $\Delta(G) \leq 1$ esete nyilvánvaló. Így feltesszük, hogy $\Delta(G) \geq 2$.

Most $P = \{1, 2, \ldots, \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor\}$. Legyen $e = uv$ egy tetszőleges él (tehát u és v különböző) és tegyük fel, hogy c_0 kiszínezi $G - e$-t. Célunk G teljes színezése.

$S_u \cap S_v \neq \emptyset$ eset: mohóság

Tudjuk, hogy
$|S_x| \geq |P| - \Delta(G) \geq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor - \Delta(G) = \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ teljesül minden csúcsra és minden parciális (vagy akár teljes) színezésre.

Sőt u és v körül vagy egy színezetlen él, azaz
$|S_u|, |S_v| \geq \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor + 1$.

Ha $S_u \cap S_v \neq \emptyset$, akkor a mohó színezés kiterjesztés működik.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$. Legyen *vw* egy α színű él.

Észrevétel

w szükségszerűen egy harmadik csúcs *u* és *v* mellett. // Ezt fontos meggondolni hiszen lehetnek párhuzamos élek gráfunkban!

Ha $P_v \cap P_w \neq \emptyset$, akkor a *vw* él átszínezhető P_v és P_w egy κ közös elemére.

Az átszínezés után az egyetlen változás, hogy az új P_v és P_w halmazok $P_v \Delta \{\alpha, \kappa\}$ és $P_w \Delta \{\alpha, \kappa\}$ lesznek.

Speciálisan az *uv* él már színezhető α színre, készen vagyunk.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset: javítgatás

A tétel érdekes esete: $S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$.

Egy kis számtan után azt kapjuk, hogy $|S_u| + |S_v| + |S_w| > |P|$:
Ha $\Delta(G) = 2k$ vagy $\Delta(G) = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor

$$\begin{aligned}
|S_u| + |S_v| + |S_w| \geq & \left(\left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor \\
= & 3k + 2 > |P| = \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor \\
= & \begin{cases} 3k, & |\Delta(G)| = 2k \\ 3k+1, & |\Delta(G)| = 2k+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $S_u \cap S_w = \emptyset$ nem lehetséges.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Legyen $\beta \in S_u \cap S_w$. Feltevéseink szerint $\beta \notin S_v$. Speciálisan léteznie kell egy vs élnek, ami β színű. Könnyen látható, hogy s egy eddig nem szerepelt, negyedik csúcs.

Tudjuk, hogy $S_v \neq \emptyset$, így alkalmas $\gamma \in P$ színre $\gamma \in S_v$.

Feltevéseink szerint $\gamma \notin S_u, S_w$.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Vizsgáljuk $G_{\beta,\gamma}$ w-t tartalmazó komponensét.

Ez szükségszerűen út: v-nél szabad β, így nem illeszkedik rá β színű él. w-ből indulva a v-re illeszkedő γ színű éllel indul.

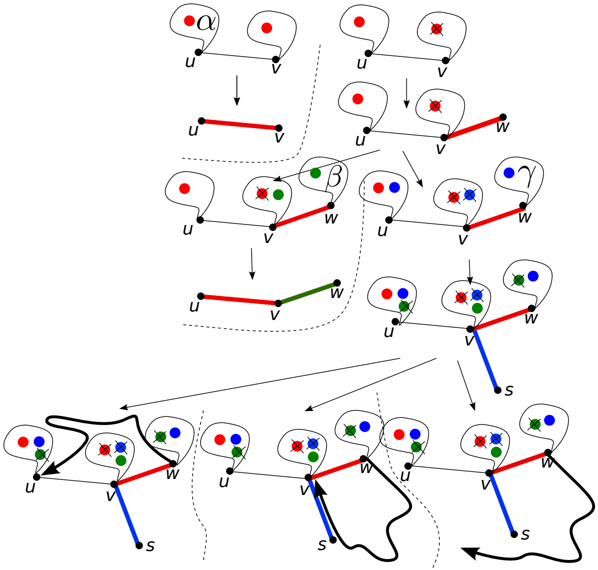
Végződésére több lehetőség van:

(1) u-ban fejeződik be γ színnel.

(2) v-ben fejeződik be az sv, β színű éllel.

(3) Egy eddig nem szereplő x csúcsban fejeződik be.

A bizonyítás képen



A bizonyítás vége

P mentén cseréljünk meg a β, γ színeket.

Egy módósított jó színezéshez jutunk. (1) és (3) esetén a *vw* él átszínezhető lesz γ színre, és a *v* mellett felszabadult α szín kiosztható *uv*-re.

(2) esetén a *v*-re illeszkedő β színű (nyilván egyetlen) él veszti el színét. Így *uv* a β színt kaphatja.

Szünet

Vizing tételének bizonyítása: Előkészületek

Színezendő G gráfunk egyszerű gráf, azaz ha két pont szomszédos, akkor egyetlen él köti őket össze.

Most a $P = \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ palettával dolgozunk.

Ismét feltesszük hogy G egyetlen $e = uv$ él kivételével színezett (c_0 a részleges színező függvény).

Tudjuk, hogy minden x csúcs esetén S_x nem üres.

Feltehetjük, hogy $S_u \cap S_v = \emptyset$.

Vizing tételének bizonyítása

Legyen $\alpha \in S_u$, így $\alpha \notin S_v$, azaz v-re illeszkedik α színű él: vu_1.

$u \neq u_1$, hiszen gráfunk egyszerű (a továbbiakban $v = v_0$ jelöléssel élünk).

Feltehetjük, hogy $S_{u_1} \cap S_v = \emptyset$.

Valóban, ha a fenti metszet nem üres, akkor az $u_1 v$ él átszínezhető, amiáltal az α szín szabaddá válik az uv élre és készen vagyunk.

Vizing tételének bizonyítása (folytatás)

Legyen $\alpha_2 \in S_{u_1}$ (a továbbiakban α-ra mint α_1 is hivatkozunk).

Tegyük fel, hogy $\alpha_2 \neq \alpha_1 = \alpha$. A fentiek során tett feltevéseink miatt $\alpha_2 \notin S_v$. Azaz lesz egy u_2 szomszédja v-nek, amelyre a vu_2 él színe α_2.

Folytassuk eljárásunkat, amíg tudjuk. Így kapjuk az $u_0, u_1, \ldots, u_\ell$ különböző csúcsokat és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ különböző színeket.

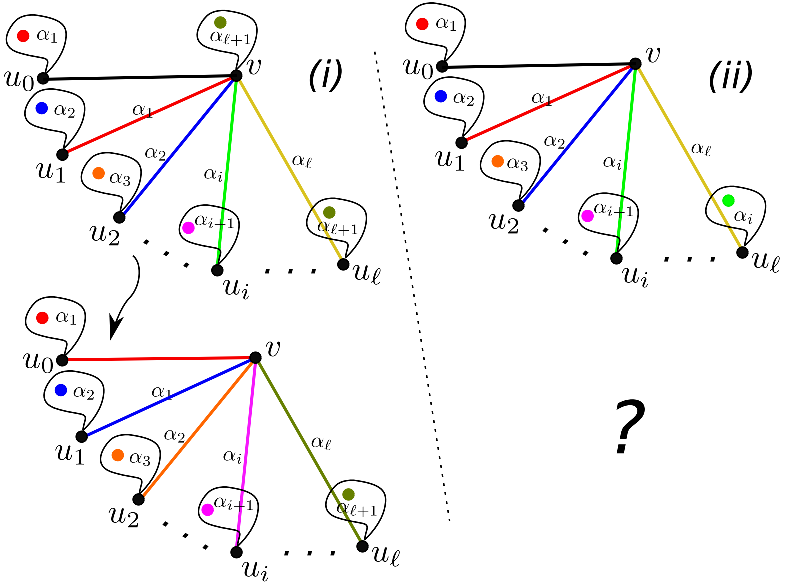
Elakadás

Egy véges gráfban el kell akadnunk. Hogy történhet ez meg? Két lehetőség van:

(i) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín lehet új az eddigi α_j színekhez képest, azonban lehet, hogy v-re nem illeszkedik ilyen színű él.

(ii) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín előfordulhat az eddigi α_j színek között. Legyen i az az index, amelyre $\alpha_{\ell+1} = \alpha_i$.

Elakadás képen



(i)

A vu_ℓ él átszínezhető $\alpha_{\ell+1}$-re, ezzel egy időben minden vu_i kaphatja az α_{i+1} színt $\big(i = 0, 1, \ldots, \ell - 1\big)$.

Speciálisan az uv kiszínezhető. Az (ii) eset a problémás.

(ii)

Ekkor vegyünk egy $b \in S_v$ színt. Feltehető, hogy β nem szerepel egyik S_{u_j} halmazban sem (lásd (i) eset).

Vegyük a $G_{\alpha_i \beta}$ gráf u_ℓ-et tartalmazó komponensét, ami nyilván út lesz.

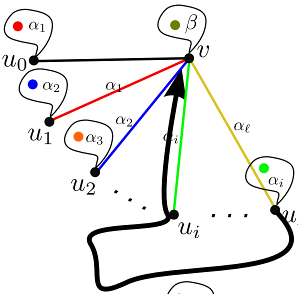
Három esetünk van:

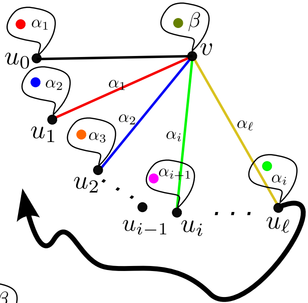
(iia) ez az út áthalad az u_i csúcson (amikor is áthalad az α_i színú $u_i v$ élen és v-ben végződik),

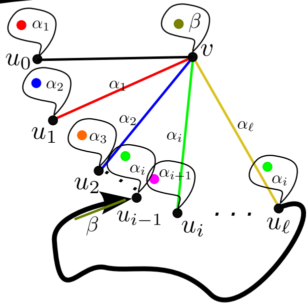
(iib) ez az út áthalad az u_{i-1} csúcson (amikor is ide egy β színű élen érkezett és itt végződik),

(iic) nem halad át sem az u_i, sem az u_{i-1} csúcsokon.

A bizonyítás vége esetei ábrán







A bizonyítás vége

Az út mentén hajtsuk végre az α_i/β színcserét.

A (iia) esetben $u_i v$ színe β lesz. Míg $u_1 v$, $u_2 v$, $\ldots$, $u_i v$ színeit „elforgathatjuk", amivel uv színt kap.

A (iib) esetben $u_{i-1}v$-nél felszabadul a β szín körül és az (iia) eset alapján dolgozhatunk.

A (iic) esetben az β szín szabadul fel a vu_ℓ élre. Ismét jövethetjük az (i) eset átszínezésének gondolatmenetét.

Kőnig tétele

Megemlítjük, hogy a BSc-ben tanult Kőnig-tétel egy egyszerű következménye a következő tétel.

Tétel

Ha G egy páros gráf, akkor

$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

Bonyolultságelmélet

A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy egyszerű gráfok élszínezése egy egyszerűbb feladat mint a csúcsszínezési probléma.

A látszat csal. A következő tétel erre világít rá azon hallgatók számára, akik bonyolultságelmélet alapfogalmait ismerik.

Tétel

Vizsgáljuk az alábbi döntési problémát: Adott G egyszerű gráfról döntsük el, hogy $\chi_e(G)$ értéke $\Delta(G)$ vagy $\Delta(G)+1$.

Ez a probléma $\mathcal{NP}$-nehéz.

Köszönöm a figyelmet!