Gráfok csúcsszínezései

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Emlékeztető

Definíció

Egy $c : V(G) \to P$ leképezést a G gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A $c(v)$ a v csúcs színe.

A P halmazt palettának nevezzük, elemei színek. Gondolhatunk $P = \{\text{piros}, \text{kék}\}$ hamazra, vagy $P = \mathbb{N}_+$ halmazokra.

Definíció

A G gráf egy színezése jó színezés, ha minden $e \in E(G)$ élre $e = uv$ esetén $c(u) \neq c(v)$.

Ebben a témakörben egyszerű gráfokkal dolgozunk, tehát csúcsszínezések vizsgálatánál MINDEN GRÁFON EGYSZERű GRÁFOT FOGUNK ÉRTENI.

Emlékeztető (folytatás)

Definíció

A G gráf egy színezése k-színezés, ha a paletta mérete k.

Definíció

Egy G gráf kromatikus száma

$$\chi(G) = \min\{k : G\text{-nek létezik jó } k\text{-színezése}\}.$$

Színezések és független ponthalmazok

Definíció

A G gráf esetén egy $F \subset V(G)$ csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két F-beli pont között sincs él.

Definíció

$\alpha(G) = \max\{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$

Egy színezés jó színezés, ha minden színosztály egy független halmaz.

Egy jó színezés felfogható úgy is mint a csúcshalmaz egy osztályozása független ponthalmazokra.

Színezések és klikkek

Definíció

A G gráf esetén egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két K-beli pont között van él.

Definíció

$\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}$.

Észrevétel

Tetszőleges G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Ez következik abból, hogy egy klikkben minden csúcsnak más-más színt kell adnunk jó színezésnél.

Szünet

Emlékeztető

Trivialitás

G nem 1-színezhető $\Longleftrightarrow$ G-ben létezik él.

Lemma

G nem 2-színezhető $\Longleftrightarrow$ G-ben létezik páratlan hosszú kör.

Észrevétel

G nem 3-színezhető $\Longleftarrow$ G-nek részgráfja a K_4 ($K_4 = 4$ csúcsú teljes gráf).

Az utolsó állításában a $\Longrightarrow$ irány nem teljesül.

4-klikk/K_4 részgráf felmutatása egy jó módszer nem-3-színezhetőség bizonyítására. (Jó és gyors, hatásos.) De a módszer NEM teljes.

Operációk

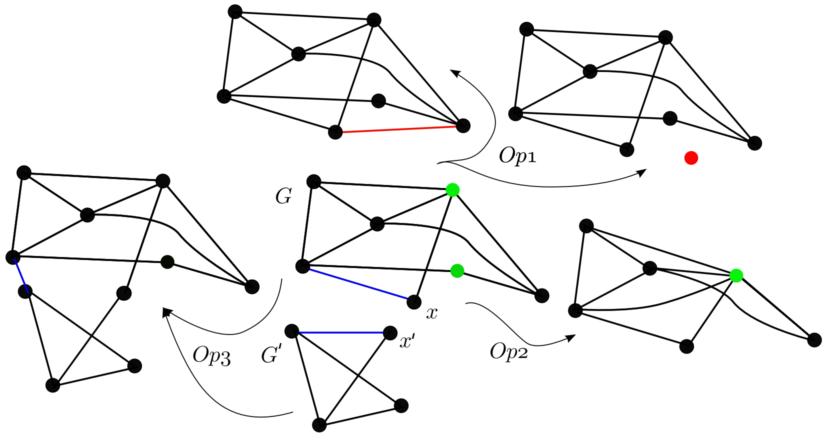
Definíció

(Op1) Bővítés: Él vagy csúcs hozzáadása a gráfhoz. Legyen G^+ a G-ből kapott gráf.

(Op2) Csúcsösszevonás: Két nem szomszédos csúcs (x, x') azonosítása. Ha x csúcs szomszédságát $N(x)$-szel jelöljük, akkor az összevonással keletkezett pont szomszédsága megegyezik $N(x) \cup N(x')$-vel. Legyen $\widetilde{G}$ a G-ből kapott gráf.

(Op3) Hajós-operáció: Legyen $e \in E(G), e' \in E(G')$, $\overrightarrow{e} = xy$, $\overrightarrow{e'} = x'y'$. Az operáció eredményét jelöljük
$H = \text{Hajós}_{\overrightarrow{e}, \overrightarrow{e'}}(G, G')$-val.
$V(H) = (V(G) - \{x\}) \dot\cup (V(G') - \{x'\}) \dot\cup \{[x]\}$,
$E(H) = (E(G) - \{e\}) \dot\cup (E(G') - \{e'\}) \dot\cup \{xx'\}$, az illeszkedés pedig természetes.

Példa



Észrevétel

Lemma

Ha G és G' nem k-színezhető, akkor G^+, $\widetilde{G}$ és Hajós(G, G') sem k-színezhető.

Lemma

Ha G^+és $\widetilde{G}$ k-színezhető, akkor G is az. Ha Hajós(G, G') k-színezhető, akkor G vagy G' is az.

G^+ a Lemma nyilvánvaló, ugyanis több objektum esetén nehezebbé válik a színezés. $\widetilde{G}$ és Hajós(G, G') esetén is egyszerű az állítás.

Az észrevétel kihasználása

Definíció

A G gráf Hajós-konstruálható K_{k+1}-ekből, ha létezik olyan $G_1, G_2, \ldots G_l$ sorozat, hogy mindegyik G_i vagy K_{k+1}, vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

Nyilván G_1 mindig csak K_{k+1} lehet, G_2 pedig csak K_{k+1} vagy egy olyan gráf, ami K_{k+1}-ből (Op1) operációval kapható ((Op2) nem alkalmazható teljes gráfokra, (Op3)-hoz szükséges két korábbi gráf).

Következmény

Ha G Hajós-konstruálható, akkor G nem k-színezhető.

A következmény bizonyítása teljes indukcióval történhet.

Példa: Az 5-kerék nem 3-színezhető.

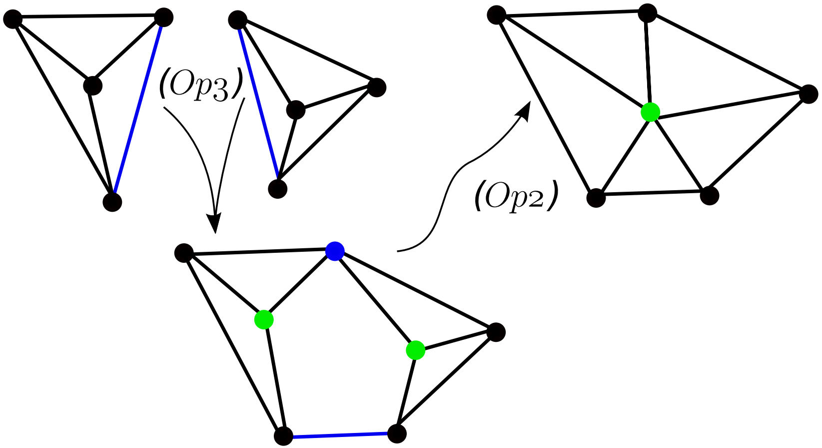


Figure: Először a G_1 és G_2 gráfokon (két négy pontú teljes) hajtjuk végre az (Op3) operációt. A G_3 gráfon pedig az (Op2) operációt hajtjuk végre, és az eredmény nem 3-színezhető G_4 gráf lesz, ami egy 5-kerék.

A főtétel

Tétel [Hajós György]

G akkor és csak akkor nem k-színezhető, ha G Hajós-konstruálható K_{k+1}-ből.

Az egyik irányt már láttuk. A tétel nehezebbik „felét” pedig indirekt módon bizonyítjuk.

Bizonyítás: A kezdet

- Tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, azaz létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható.

- Tegyük a G gráfot telítetté, azaz adjunk hozzá éleket mindaddig, amíg az ellenpéldára vonatkozó két tulajdonság teljesül. Így kapjuk a G^{tel} gráfot.

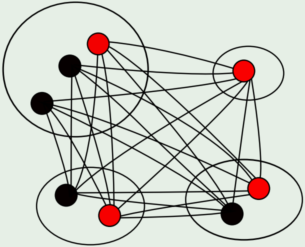
- A telítés során a nem k-színezhetőség megmarad. Így G^{tel} gráfhoz élet adva egy Hajós-konstruálható gráfot kell kapnunk.

Többrészes gráfok

Definíció

Egy G gráf teljes r-részes gráf, ha a $V(G)$ csúcshalmaz r darab osztály uniója, és az $E(G)$ élhalmaz pedig az összes „keresztél” az osztályok között.

Példa



Lemma

Definíció

A teljes r-részes gráf ekvivalens definíciója a következő: az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció ekvivalenciareláció, továbbá az ekvivaleciareláció osztályainak száma r.

Lemma

G^{tel} teljes r-részes gráf.

Lemma bizonyítás

A bizonyítás indirekt módon történik.

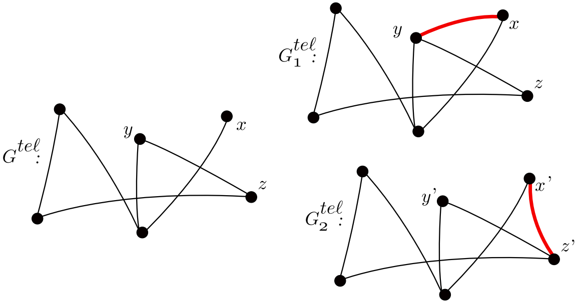
Tegyük fel, hogy G^{tel} nem teljes r-részes gráf, azaz az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció nem ekvivalencia.

Ekkor nyilván csak a tranzitivitás sérülhet, azaz léteznek olyan $x, y, z \in V(G^{tel})$ különböző pontok, hogy $xy, xz \notin E(G^{tel})$, de $yz \in E(G^{tel})$.

Ekkor az xy és xz él hiánya kétféle módot is ad a G^{tel} telített gráf bővítésére. mindkét esetben a telítettség definíciója alapján olyan gráfot kapunk, amely Hajós-konstruálható.

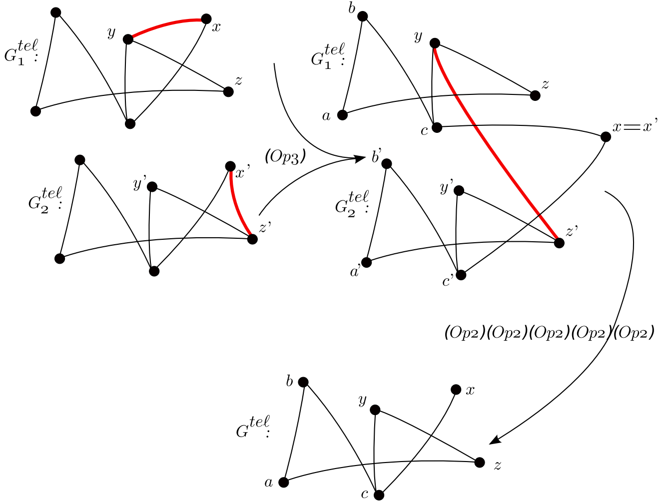
Lemma bizonyítás (folytatás)

Az egyértelműség végett a második gráf (amelyet az xz él hozzáadásával kapunk G^{tel}-ből) csúcsait vesszőkkel látjuk el.



Lemma bizonyítás (folytatás)

Ha erre két gráfra végrehajtjuk a $\text{Hajós}_{xy,x'z'}(G_1^{tel}, G_2^{tel})$ operációt, akkor a következő gráfot kapjuk:



Hajós-tétel bizonyításának folytatása

Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan G nem k-színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a G gráfot, és az így kapott G^{tel} gráfról beláttuk, hogy teljes r-részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

(1) Ha $r \geq k+1$, akkor G^{tel} gráfnak létezik egy $k+1$ pontú teljes részgráfja, ugyanis minden osztályból egy tetszőleges csúcsot kiválasztva egy ilyen részgráfot kapunk. A részgráfság miatt G^{tel} megkapható K_{k+1}-ből egyszerű bővítésekkel, azaz az (Op1) operáció többszöri alkalmazásával. Ez viszont ellentmond annak, hogy G^{tel} nem Hajós-konstruálható.

(2) Ha pedig $r \leq k$, akkor nyilvánvaló, hogy G^{tel} gráf k-színezhető, ami szintén ellentmondás.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, így ezzel a Hajós-tétel bizonyítása véget ért.

Szünet

Emlékeztető

Tétel (BSc)

Létezik olyan $\{G_n\}$ gráfsorozat, melyre teljesül, hogy $\omega(G_n) = 2$ (azaz G háromszögmentes), illetve $\chi(G_n) \to \infty$, ha $n \to \infty$.

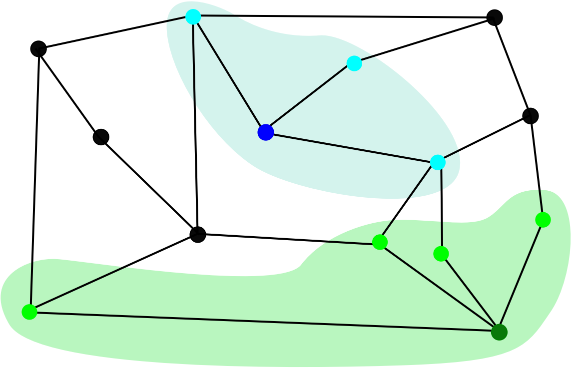


Figure: Háromszögmentes gráf

Lokális vs globális

Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk.

Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk a színezési problémaval kapcsolatban.

A gráf globális színezéséhez szükséges színszám tetszőlegesen nagy lehet. Ez rávilágít a probléma nehézségére. A nehézség formálisan is igazolható: ez az egyik alap $\mathcal{N}P$-teljes probléma (szerepel Richard Karp 1972-ben összegyűjtött 21 $\mathcal{NP}$-teljes problémája között).

Kiterjesztés

Definíció

Tetszőleges G gráf esetén rögzítsünk egy $o \in V(G)$ csúcsot, és tetszőleges $r \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a következő részgráfot:

$$B(o, r) = G \mid_{\{v \in V : d(o,v) \leq r\}},$$

ahol $d(o, v)$ a legrövidebb *ov* út hosszát jelöli.

Az, hogy minden $B(o, 1)$ csillag az azzal ekvivalens gráfunkban nincs háromszög.

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan $B(o, r)$-re tett egyszerűségi feltételekre több lehetőség van

(1) Minden o csúcsra $B(o, r)$ páros gráf. Ez azzal ekvivalens, hogy G-ben nem létezik $2r + 1$ hosszú, vagy rövidebb páratlan kör.

(2) Minden o csúcsra $B(o, r)$ fa (körmentes, hisz a gömbök öszefüggősége nyilvánvaló). Ez azzal ekvivalens, hogy G-ben nem létezik $2r + 1$ hosszú, vagy rövidebb kör.

Definíció

A G gráf derékbőségének (girth) nevezzük a következő gráfparamétert

$$g(G) = \min \{\ell : \ G\text{-ben létezik } \ell \text{ hosszú kör}\}.$$

Erdős Pál tétele

Adott egy γ és egy τ pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan G gráf, melyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$? Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e színezésre bonyolult gráf? A válasz igen.

Tétel (Erdős Pál)

Bármely $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$ számokhoz létezik olyan G gráf, amelyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$.

Nem konstruktív bizonyítást adunk a tételre. (Konstruktív bizonyítások is léteznek, de azok nehezebbek.)

A következőkben egy valószínűségszámítási módszeren alapuló bizonyítást mutatunk meg.

Véletlen gráfok

Legyen V egy n elemű csúcshalmaz. n értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk n-ről, hogy elég nagy.

Bármely V-beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt p valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége $1 - p$).

A p $(0 < p < 1)$ értékét később adjuk meg n, τ, γ függvényében.

Ezzel a módszerrel felépítünk egy gráf értékű valószínűségi változót. Ez az Erdős—Rényi-féle véletlengráf modell, jelölése $\underline{G}_{n,p}$.

Több ismeretlen paraméterünk is van. Ennek ellenére előre kijelentett „ígéreteket" teszünk, és ezeket vastag betűtípussal fogjuk jelölni. Majd a bizonyítás végén megmutatjuk, hogy ezek az ígéretek valóban teljesülnek/kielégíthetők.

Kromatikus szám helyett független halmazok

A kromatikus szám vizsgálata helyett a könnyebben kezelhető legnagyobb független halmaz méretét vizsgáljuk (szokásos jelölése $\alpha(G)$).

Észrevétel

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)| = n.$$

Azaz, „ha $\alpha(G)$ kicsi, akkor $\chi(G)$ nagy". Egyszerűbb nyelven: „ha csak kicsik lehetnek a színosztályok, akkor sok színre lesz szükség egy jó színezéshez".

Az $\mathcal{A}_t$ esemény

Jelölje $\mathcal{A}_t$ azt az eseményt, hogy $\alpha(G) < t$. Ez ekvivalens azzal, hogy G-ben nincs t elemű független ponthalmaz.

Jelölje $\mathcal{F}_R$ pedig azt az eseményt, hogy R független ponthalmaz G-ben. Ekkor

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1-p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

Érvényes továbbá az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{R\subseteq V\\|R|=t}} \mathcal{F}_R\right).$$

Valóban, korábbi megjegyzéseink alapján $\mathcal{A}_t$ az $\cup_{R\subseteq V, |R|=t}\mathcal{F}_R$ esemény komplementere.

Az $\mathcal{A}_t$ esemény valószínűségének becslése

Felhasználva azt a triviális tényt, hogy $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$ azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}}.$$

Felhasználtuk azt is, hogy $\binom{n}{t}$ tag unióját kell nézni, illetve az unió által leírt esemény valószínűségét egy olyan öszeggel becsülhetjük, amelyben minden $\mathbb{P}(\mathcal{F}_R)$ tag értéke közös: $(1-p)^{\binom{t}{2}}$.

A becslést egyszerűsíthetjük a $\binom{n}{t} < n^t$ durva és az $1-p < e^{-p}$ nem annyira durva becslésekkel (p pozitív és közel lesz 0-hoz)

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - n^t e^{-p\binom{t}{2}} = 1 - e^{t \log n} e^{-p\frac{t(t-1)}{2}} = 1 - e^{t \log n - p\frac{t(t-1)}{2}}.$$

t választása

Feltesszük, hogy $n/2t \geq \tau$ **és** $\mathcal{A}_t$ **valószínűségére adott alsó becslés legalább** $2/3$,

Derékbőség helyett rövid körök száma

Jelöljük $\xi_{\leq\gamma}$-val azt a valószínűségi változót, amely megadja a γ-nál nemhosszabb körök számát G-ben. Keressük ennek a várható értékét.

Ehhez vezessük be a

$$\xi_C = \begin{cases} 1, & \text{ha } C \subseteq G_{n,p} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

valószínűségi változót, ahol C egy lehetséges kör.

Ekkor

$$\mathbb{E}\left(\xi_{\leq\gamma}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{C \text{hossza} \leq \gamma} \xi_C\right) = \sum_{l=3}^{\gamma}\left(\sum_{C \text{hossza} = l} \mathbb{E}\left(\xi_C\right)\right).$$

Rövid körök számnak várható értékének becslése

Ha a C hossza ℓ, akkor $\mathbb{E}\left(\xi_C\right) = p^\ell$. Hány darab lehetséges ℓ hosszú kör van? A válasz $\binom{n}{\ell}\frac{(\ell-1)!}{2}$, ugyanis a csúcsokat $\binom{n}{l}$-féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott ℓ pontokat $\frac{(\ell-1)!}{2}$-féleképpen rendezhetjük körbe.

Felhasználva az

$$\binom{n}{\ell}\frac{(\ell-1)!}{2} = \frac{n\left(n-1\right)\ldots\left(n-\ell+1\right)}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{6}$$

egyenlőtlenséget, felírhatunk $\mathbb{E}\left(\xi_{\leq\gamma}\right)$-ra egy felső becslést:

$$\mathbb{E}\left(\xi_{\leq\gamma}\right) \leq \sum_{\ell=3}^{\gamma}\frac{n^\ell}{6}p^\ell = \sum_{\ell=3}^{\gamma}\frac{n^\ell p^\ell}{6} \overset{(!)}{\leq} \sum_{\ell=3}^{\gamma}\frac{(np)^\gamma}{6} \leq \gamma\frac{(np)^\gamma}{6}.$$

További feltevések

A becslésnél feltettük, hogy $np \geq 1$, így használhattuk, hogy az 1-nél nagyobb kvóciensű geometriai sorozat monoton nő, minden eleme az utolsóval felülről becsülhető.

A paramétereinket úgy fogjuk megválasztani, **hogy** $\gamma(np)^\gamma/6 \leq n/6$ **teljesüljön**.

A végső következtetés

A fenti választások után a Markov-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\leq\gamma} > \frac{n}{2}\right) < \mathbb{P}\left(\xi_{\leq\gamma} > 3\mathbb{E}\xi_{\leq\gamma}\right) < \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\leq\gamma} \leq \frac{n}{2}\right) > \frac{2}{3}.$$

Ezek után felírhatjuk a

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_t \wedge \left(\xi_{\leq\gamma} \leq \frac{n}{2}\right)\right) > 0$$

megállapítást, mivel a $\wedge$ két oldalán álló események valószínűsége külön-külön legalább $\frac{2}{3}$.

A keresett gráf létezik!

Ebből következik, hogy létezik olyan G gráf, amelynek n csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A G-ben lévő γ-nál nem hosszabb körök száma $\frac{n}{2}$-nél kevesebb, azaz alkalmas $n/2$ csúcs elhagyásával egy olyan G_0 gráfot kapunk, amely derékbősége legalább γ.
- G_0 minden színosztálya legfeljebb t méretű. Így $\chi(G_0) \geq |V(G_0)|/t \geq \tau$.

Azaz G_0 a tételt igazolja.

A paraméter választások konzisztenciája

Csak az van hátra, hogy a p, t paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy az ezekre tett ígéreteink igazak legyenek:

$$0 < 1 - e^{t \log n - p \frac{t(t-1)}{2}} < \frac{1}{3}, \qquad np > 1, \qquad \gamma(np)^\gamma \leq n,$$

és emellett $n \geq 2t\tau$.

Egy lehetséges választás: p legyen olyan, hogy $\gamma(np)^\gamma = n$. Azaz a harmadik feltétel igazsága „definiálja" p-t.

Ekkor $np = (n/\gamma)^{1/\gamma}$, azaz a második feltétel automatikusan igaz (n-et nagyon nagynak választjuk).

$$p = \frac{1}{n} \cdot (n/\gamma)^{1/\gamma} = c(\gamma) n^{-(1-1/\gamma)},$$

ahol $c(\gamma)$ csak a γ-tól függő konstans.

Paraméterek választása (folytatás)

Az első feltételben szereplő kitevő

$$t \log n - c(\gamma) n^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} t(t-1)/2.$$

Ennek negatív, kis abszolút értékű számnak kell lenni.

Ezt a

$$t = 3(\log n) n^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

választás (nagy n mellett) teljesíti.

$n \geq 2t\tau$ nyilván teljesül.

Köszönöm a figyelmet!