Javítgatásos párosítási algoritmusok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021. ősz

Bevezetés

Emlékeztető

Legyen G egy gráf, $E(G)$ a G élhalmaza, $V(G)$ gráfunk csúcshalmaza. Legyen $F \subseteq E(G)$. Ekkor $V(F) = \{x \in V : x \text{ illeszkedik egy } F\text{-beli élre}\}$.

- $V(F)$ egy v eleméről azt mondjuk, hogy F *lefedi* a v csúcsot.

Emlékeztető: Párosítás

M párosítás, ha $|V(M)| = 2|M|$ vagyis M nem-hurok élek végpont-diszjunkt halmaza.

- Egy M párosítás által lefedett v csúcsról azt mondjuk, hogy *párosított*.

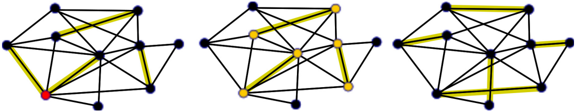
- Legyen $\overline{V}(M) = V(G) - V(M)$ az M által nem párosított/M-párosítatlan csúcsok halmaza. $|\overline{V}(M)| = |V(G)| - |V(M)| = |V(G)| - 2|M|$

Bevezetés (folytatás), példák

Emlékeztető: Teljes párosítás

Ha az M párosítás és $V(M) = V(G)$, akkor *teljes párosításról* beszélünk.

- Természetesen csak páros pontszámú gráfoknál lehetséges, hogy létezzen teljes párosítás.



Egy gráf egy élhalmazzal (sárgával kiemelt élek), ami nem párosítás (pirossal jelzett a csúcs, ahol két eleme összefut). Majd egy párosítás, ami nem teljes párosítás (sárgával jeleztük a párosított csúcsokat). Végül egy teljes párosítás.

Optimalizálás, algoritmusok

Definíció

$\nu(G)$ a G-beli párosítások között a legnagyobb méret.

• Ekkor $2\nu(G)$ a legtöbb csúcs, amit párosítani tudunk. $|V(G)| - 2\nu(G)$ a legkevesebb csúcs, ami kimarad egy párosításból.

• A fenti fogalmak természetes módon vezetnek a következő algoritmikus problémákhoz:

Párosítási problémák: Adott egy G gráf.

(1) Keressünk egy M maximális elemszámú/optimális párosítást.

(2) Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét.

(3) Döntsük el, van-e G-ben teljes párosítás.

(4) Keressünk minél nagyobb elemszámú párosítást.

A mohó algoritmus, bevezetés

• Az algoritmus mohó jelzője onnan ered, hogy nem vonjuk vissza soha a korábbi döntésünket, vagyis ha egy élt egyszer beválasztottunk a párosításba, már nem vesszük ki később.

• Azzal, hogy korábbi döntésünket nem bíráljuk felül egy nagyon hatékony, egyszerű eljárást kapunk. Sajnos nincs garancia, hogy az output optimális.

• Egy M párosítás kiszámítását elemi döntésekre bontjuk: minden élre el kell döntenünk, hogy beválasztjuk-e a párosításba vagy nem.

Mohó algoritmus

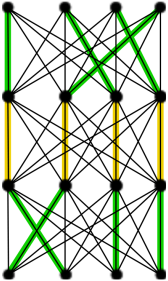
Mohó algoritmus nagy párosítás keresésére

(Inicializálás) Kiindul egy M párosításból
AMÍG létezik $e \in E(G) - M$ él úgy, hogy $M \cup \{e\}$ is párosítás
(Mohó növelés/bővítés) M-et lecseréljük $M \cup \{e\}$-re.
(Elakadás) Az aktuális párosítás az output
//Ekkor minden M-en kívüli él összefut valamelyik M-beli éllel

• Megjegyezzük, hogy nincs ciklizálási veszély: bármely javítás garantáltan növeli a párosítás élszámát, ezért az algoritmus szükségszerűen leáll.

• Elakadás esetén tudjuk, hogy párosításunk egy speciális módon, a mohó módon nem javítható. Ez nem jelenti azt, hogy ettől eltérő módon nem tudunk nagyobb párosításhoz jutni.

Példa



Gráfunknak négy ugyanannyi csúcsot (legyen ez n, az ábrán $n = 4$) tartalmazó „emelete” van. Két szomszédos emelet között minden élt behúztunk, további élek nincsenek. A sárga élek egy teljes párosítást alkotnak a két középső szint között. Ha a mohó algoritmus ezeket választja ki először, akkor elakad: n élt tartalmaz outputja. A zöld élek egy teljes párosítást alkotnak ($2n$ darab él).

Analízis

- Megemlítünk egy, a fenti algoritmussal kapcsolatos alaptételt. Ez azt garantálja, hogy a nagyon egyszerű algoritmus outputja nem olyan rossz.

Tétel

Legyen $\nu_{\text{mohó}}(G)$ a mohó algoritmus egy tetszőleges futásának mérete. Legyen $\nu(G)$ a legnagyobb párosítás mérete. Ekkor

$$\frac{\nu(G)}{2} \leq \nu_{\text{mohó}}(G) \leq \nu(G).$$

A második egyenlőtlenség nyilvánvaló abból, hogy a mohó algoritmus egy párosítást számol ki.

Analízis: indoklás

- Legyen $M_{\text{mohó}}$ a mohó algoritmus outputja.
- $L = V(M_{\text{mohó}})$ a mohó algoritmus otputja által párosított pontok halmaza.
- Nyilvánvaló, hogy L lefogó ponthalmaz és $|L| = 2\nu_{\text{mohó}}(G)$.
- Így L mérete minden párosítás méretét felülről becsli, speciálisan $\nu(G) \leq |L| = 2\nu_{\text{mohó}}(G)$.

Szünet

Javítgatásos algoritmusok: Bevezetés

- A következőkben ezeket az algoritmikus problémákra ajánlunk megoldási módszereket különböző megközelítések segítségével.

- A javítgatásos kombinatorikus módszerek mind egy-egy javítási (nagyobbítási) módszeren alapulnak.

- Egy kiinduló párosítást javítunk, amíg tudjuk.

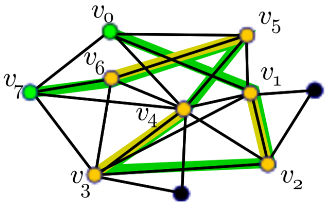
- Az eljárás végén egy nem javítható párosításhoz jutunk, ami az output.

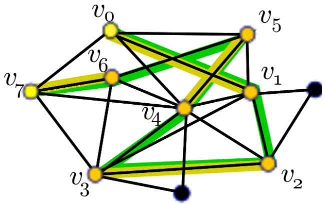
- A továbbiakban mindig egy G gráf és egy M párosítás lesz számunkra adott.

A javító út fogalma

Definíció

Legyen G gráf M párosítás G-ben, $P: v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ egy út. P út javító út M-re nézve, ha v_0 és v_k nem párosítottak, k páratlan és a páros sokadik élek elemei M-nek.





A sárga párosításra nézve a zöld út javító út. A második ábrán a javított párosítás látható.

A javítás

Észrevétel

A P javító út segítségével kapott
$M' = (M \backslash E(P)) \cup (E(P) \backslash M) = M \triangle E(P)$ élhalmaz párosítás.

• Azaz M'-be P mentén pontosan azon P-beli éleket rakjuk, melyek eredetileg nem voltak M-ben, P-n kívül a párosítás nem változik.

• Könnyen látható, hogy így mindig eggyel nagyobb élszámú párosítást kapunk. Ezt nevezzük M javító utas javításának.

Az algoritmikus séma

- Ezzel sémát kaptunk nagy párosításokat kereső algoritmusokra, amiket javító utas algoritmusoknak nevezünk. Ezek általános vázlata:

Javító utas algoritmusok sémája

Adott egy G gráf és benne egy M párosítás

AMÍG találunk M-re vonatkozó javító utat
(Javító utas növelés) M-et lecseréljük $M \Delta E(P)$-re.

(Elakadás) Az aktuális párosítás az output
// Ekkor nem létezik M-re vonatkozó javító út.

Megjegyzések

• Itt sincs ciklizálási veszély, mert bármely javítás garantáltan növeli a párosítás élszámát, ezért az algoritmus szükségszerűen leáll.

• Az 1 hosszú javító út menti javítás a mohó javítás.

• Azaz a javító utas algoritmusok a mohó algoritmus kiterjesztései.

• A mohó algoritmus elkadására korábban láttunk példát.

• Könnyű ellenőrizni, hogy azon futva a javító utas algoritmusok megtalálják a teljes párosítást. Ez nem véletlen.

Berge-tétel

Tétel (Berge-tétel)

G gráf, M párosítás. Ha M nem optimális, akkor létezik rá javító út.

Vagyis elakadás esetén az aktuális párosítás optimális.

„Következmény”

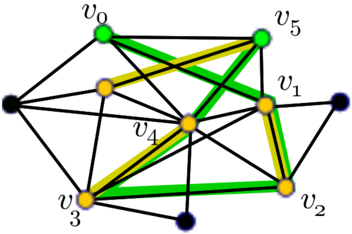
A továbbiakban a feladatunk: Adott (G, M) esetén keressünk a G gráfban az M párosításra vonatkozó javító utat.

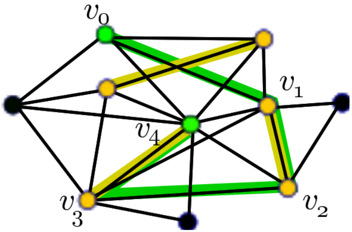
- A javító utak hatékony keresése nem egyszerű!
- Keresésünknek olyanak kell lenni, ha sikertelen, akkor ne is legyen javító út. (Teljesség.)
- Egy gráfban az utak teljes sokasága hatalmas lehet. Így ennek végignézése általában túl sokáig tart.
- A következőkben a javító út keresésre mutatunk egy mohó változatot.

Javító út kezdemény, definíció, példa

Definíció

P javító út kezdemény, ha $P: v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ út, és $v_0 \notin V(M)$, valamint a páros indexű élek elemei M-nek.





Egy öt hosszú javító út kezdemény, ami nem javító út, mert v_5 párosított. A második ábrán egy négy hosszú javító út kezdemény, ami nem lehet javító út, hiszen hossza páros.

Az alapok

- Javító út kezdeményeket keresünk és ezeket párhuzamosan növeljük annak reményében, hogy javító úttá terjesztjük ki őket.

- Keresésünk megvalósítása egy címkézés lesz: A csúcsokra címkéket helyezünk, aminek jelentése: oda vezető javító út kezdeményt találtunk.

- Ezen címkék egy kicsit több információt tartalmaznak mint az odavezető javító út kezdemény megtalálásának ténye. Ha a megtalált javító út kezdeménye páros hosszú akkor a csúcs `külső` címkét kap, ha pedig páratlan hosszú, akkor `belső` címkét kap.

Alapok (folytatás)

- Legyen C a címkézett csúcsok halmaza és K a külső, B a belső címkézett pontok halmaza. Nyilván $C = K \dot\cup B$.

- A mohóság abban nyilvánul meg, hogy a címkehalmaz folyamatosan bővül, és nincs felülírás. Azaz, ha azt tapasztaljuk, hogy már címkézett pontba egy eddig nem látott javító út kezdemény halad, akkor ezt elvetjük („későn vettük észre"). Az eredeti javító út kezdemény (amire a címkézést korábban alapítottuk) lesz az amit folytatni próbálunk.

- Kiinduló címkehalmazt választunk (ezek pontok lesznek, amikbe egy 0 hosszú javító út kezdeményt találtunk, azaz $\overline{V}(M)$ egy részhalmaza). Ezek elemei a keresés „gyökerei". Halmazukat R-rel jelöljük. Ezek nyilván külső pontok.

Mohó javító út keresés

Mohó javító út kereső algoritmus

(Inicializálás) Kiindulunk $\overline{V}(M)$ egy R részhalmazából.
// Kezdetben $K = R$, $B = \emptyset$, $C = K$.

AMÍG találunk $k \in K$ csúcsot és s címkézetlen szomszédját

Ha s nem párosított csúcs, akkor
(Sikeres keresés) a k-ba vezető javító út kezdemény s-be meghosszabbítva egy javító utat kapunk.

Ha s párosított csúcs, akkor
(Mohó címkenövelés) legyen s' az M-beli párja. $K \leftarrow K \cup \{s'\}$, $B \leftarrow B \cup \{s\}$, $C \leftarrow C \cup \{s, s'\}$.

(Elakadás) Ha a fenti ciklusból nem 'sikeres kereséssel' jöttünk ki, akkor 'sikertelen kereséssel' állunk le.
// Sikertelen keresés esetén minden külső pont összes szomszédja címkézett.

A kereső erdő

- A címkenövelések minden címkekiosztásához egy „felelős" rendelhető: az s csúcs k miatt kapja címkéjét, s' pedig s miatt. A megfelelő élek mentén terjed ki a címke.

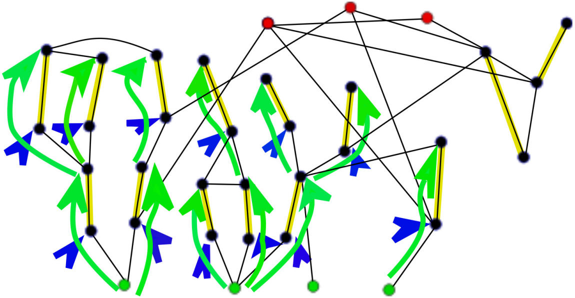
- Így a címketerjedést/keresést gyökeres erdő írja le. A gyökerek az inicializálás során kiválasztott R pontjai.

- A címkék további terjedése dupla ághajtásokkal történik.

- A kettő hosszú ágak belső pontjai kapják a belső címkét. A végső pontjai a külső címkét kapott pontok, ahonnan a keresés/címkekiosztás továbbléphet.

- A kereső erdő minden pontjához tartozik egy gyökér és egy út ami összeköti őket. Ez a gyökérből indulva egy javító út kezdemény.

A kereső erdő képen



A sárga élek alkotják párosításunkat. A zöld csúcsok azok a párosítatlan csúcsok, amelyek kiinduláskor külső címkét kaptak (R elemei). A piros csúcsok azok a párosítatlan csúcsok, amelyek kiinduláskor nem lettek megcímkézve ($\overline{V}(M) - R$, a célcsúcsok, amiket szeretnénk keresésünkkel elérni). A zöld nyilak a dupla ághajtások (a külső címke terjedése). Közben a kék nyíl mutatja a kiosztott belső címkét.

Egy fontos észrevétel

• Kezdetben a címkezett pontok nem párosított csúcsok és mind külső címkét kap, majd egyszerre két párosított csúcs kap címkét, egyik külsőt, másik belsőt. Ennek két következményét emeljük ki.

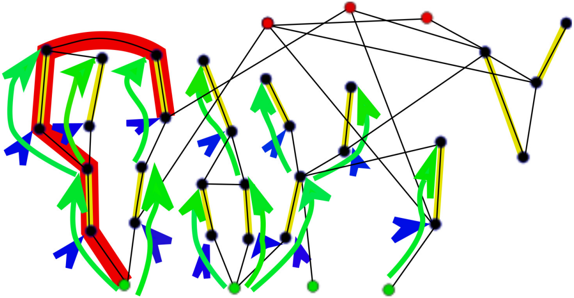
Észrevétel

(1) s-et úgy választottuk, hogy ne legyen címkezett. Így automatikusan teljesül, hogy s' se címkézett. Azaz korábbi ígéretünk (nincs újracímkézés) teljesül.

(2) A címkézés minden címkekiterjesztése után $|K| - |B| = |R|$. Valóban: A kezdetben ez teljesült, majd mindig eggyel növeltük $|K|$-t és $|B|$-t is, azaz különbségük azonos marad.

Egy fontos példa

- Előfordulhat, hogy a keresés belső pontként ér el egy x pontot és ekkor a keresés x-nek az x' párja felé megy, és x más szomszédja felé nem. Egy másik javító út kezdemény viszont külső pontként érné el x-et.



Az ábrán egy ilyen rossz fázisban elért javító út kezdeményt emel ki a piros út. Ezt be is fejezhetnénk javító úttá, ha megtaláltuk volna. Azaz a mohó javító út keresés nem teljes.

Tétel

- Egy speciális gráfosztályra azonban a mohó javító út keresés működik.

Tétel (Harold Kuhn, Kőnig Dénes—Egerváry Jenő/Magyar módszer)

Ha G páros gráf (A alsó és F felső színosztályokkal), M párosítás. Legyen $R = A \cap \overline{V}(M)$. Ekkor ha a mohó javító út kereső algoritmus sikertelen kereséssel ér véget, akkor M optimális, azaz nincs rá vonatkozó javító út.

Mohó javító út keresés: páros gráfok esete

- Kezdetben $K \subseteq A$, $B \subseteq F$.

- Címkekiosztásnál külső címkét egy belső címkéjű pont szomszédja kap és belső címkét egy külső címkéjű pont szomszédja kap.

- Így a fenti tulajdonság öröklődik. Mindig (így az algoritmus végén is) $K \subseteq A$, $B \subseteq F$.

- Azaz a külső és alsó kategóriák ugyanazok. Hasonlóan a belső és felső kategóriák ugyanazok.

Mohó javító út keresés: kezdeti megjegyzések

- Feltevésünk szerint sikertelen kereséssel állunk le. Így a külső pontok szomszédai mind címkézettek.

Jelölés

X szomszédsága:
$N(X) = \{s \in V,\ s \text{ szomszédos valamely } X\text{-belivel}\}$.

- Tehát az algoritmus végén $N(K) \subset C$.
- A tétel nagyon fontos, két bizonyítást is közlünk rá.

I. bizonyítás: Jelölések

elölés

Legyen $S \subset A$. Legyen $\epsilon(S) = |S| - |N(S)|$. Azaz S elemszámának többlete szomszédainak számához képest (ami persze lehet negatív is).

Jelölés

$\delta_A(P) = |A| - |P|$ (nem párosított pontok száma A-ban).

I. bizonyítás: Észrevétel

Észrevétel

Legyen S egy tetszőleges alsó pontokat tartalmazó halmaz, P egy párosítás. Ekkor

$$\delta_A(P) \geq \epsilon(S).$$

- Tetszőleges P párosítás esetén S-beli csúcsok párjai $N(S)$-ból kerülnek ki. Így legalább $|S| - |N(S)| = \epsilon(S)$ csúcs párosítatlan marad A-ban (már csak S-et figyelembe véve is). Ezek után az észrevételbeli egyeblőtlenség nyilvánvaló.
- Persze az észrevétel csak akkor nem semmitmondó, ha $\epsilon(S) > 0$.

I. bizonyítás

Következmény

Legyen S alsó pontok egy halmaza, amelyre $\epsilon(S) > 0$. Ekkor G-ben nincs teljes párosítás.

- A fenti tulajdonságú S halmazokat hasznos külön névvel ellátni.

Definíció

Alsó pontok egy S halmaza *Kőnig-akadály*, ha $\epsilon(S) > 0$, azaz S szomszédainak száma kisebb mint elemeinek száma.

I. bizonyítás

Következmény

Legyen S alsó pontok egy halmaza és P egy párosítás. Ha $\epsilon(S) = \delta_A(P)$, akkor P egy optimális párosítás.

A fenti esetben azt mondjuk, hogy S egy bizonyító alsó-Kőnig-halmaz P optimalitására.

I. bizonyítás

- Térjünk vissza a G páros gráfunkhoz, amelyben az M párosítással a magyar módszert futtatva sikertelen keresést folytattunk.

- Tudjuk, hogy leálláskor $N(K) \subset C$. Páros gráfban azt is tudjuk, hogy $K \subset A$, így $N(K) \subset F$. Azaz $N(K) \subset C \cap F = B$.

- Igazából belső címkét csak úgy kaphat egy csúcs, hogy egy már külső címkéjű csúcs szomszédja. Azaz $N(K) = B$.

- Tehát

$$\epsilon(K) = |K| - |N(K)| = |K| - |B| = |R| = |A \cap \overline{V}(M)| = \delta_A(M).$$

- Azaz K egy bizonyító alsó-Kőnig-halmaz M optimalitására.

II. bizonyítás

Emlékeztető

Egy L csúcshalmaz lefogó ponthalmaz, ha minden él legalább egy L-beli pontra illeszkedik.

Egy a fogalmat megvilágító „mese": Legyen a gráf egy múzeum tervrajza, amiben képek vannak a folyosókon (éleken). Ezeket őrökkel őriztetjük, akik csúcspontokban ülhetnek, ahol az ott összefutó összes folyosót ellenőrzik. Minél kevesebb őrrel akarjuk az összes élt/folyosót ellenőrizni.

II. bizonyítás

Észrevétel

Ha L lefogó ponthalmaz, és P párosítás: $|L| \geq |P|$.

A „mese” szerepkiosztását használó magyarázat: P össze nem futó folyosórendszer, így mindegyik eleme külön őrt követel. Azaz tetszőleges jó őrelhelyezésben legalább $|P|$ darab őr szerepel.

II. bizonyítás

Következmény

Legyen L egy lefogó ponthalmaz és M egy párosítás. Ha $|L| = |P|$, akkor P a lehető legnagyobb párosítás G-ben és L a lehető legkisebb lefogó ponthalmaz G-ben.

A következményben szereplő L, P pár esetén azt mondjuk, hogy L egy bizonyító lefogó ponthalmaz P optimalitására és P egy bizonyító párosítás L optimalitására.

II. bizonyítás

- Most térjünk vissza G páros gráfunkhoz benne egy M párosítással, ahol a magyar módszer sikertelen kereséssel állt le.

- Az M-beli élek két csoportra, címkézett és címkézetlen élekre osztható. (A címkézett élek mindkét végpontja, a címkézetteknek egyik végpontja sem címkézett.)

- Jelöljük a címkézett felső végpontok halmazát L_C-vel, a címkézetlen alsó végpontok halmazát $L_{\overline{C}}$-vel.

- Vegyük észre, hogy $L_C = B$. Legyen $L = L_C \cup L_{\overline{C}}$. Ekkor $|L| = |M|$, hiszen minden M-beli él egy csúccsal járul hozzá L-hez, amit ezek a hozzájárulások adnak ki.

II. bizonyítás

Észrevétel

L lefogó ponthalmaz G-ben.

- Valóban: Legyen $e = af$ egy tetszőleges él ($a \in A, f \in F$).
- (1) Ha f címkézett, akkor $f \in B$ és így $f \in L_C$.
- (2) Ha f nem címkézett, akkor a sem címkézett (hiszen, ha a címkézett, azaz külső pont lenne, akkor szomszédja nem lehetne címkézetlen a címkekiosztás elakadásánál). Speciálisan $a \notin C_0$. Azaz a párosított alsó pont címkézetlen M-beli élen: $a \in L_{\overline{C}}$.
- Tehát $L = L_C \cup L_{\overline{C}}$ valóban lefogó ponthalmaz.
- Az észrevétel azt adja, hogy az L, M pár olyan, hogy L bizonyítja M optimalitását (természetesen M is bizonyítja L optimalitását).

Végső megjegyzések

• Mindkét bizonyítás többet állít mint az M optimalitása.

• Az is adódott, hogy M optimalitására van bizonyító lefogó ponthalmaz és bizonyító alsó-Kőnig-halmaz.

• Ezek konstruktív módon adódnak a magyar módszer „melléktermékeként” .

• Az is adódott, hogy a második bizonyításban kiolvasott L lefogó halmaz optimális. Azaz a magyar módszer alkalmazható a legkisebb méretű lefogó ponthalmaz meghatározására páros gráfokban.

Szünet

Az általános eset: A kiindulás

- Az előző tétel páros gráfokra működik csak. A következő részben az általános esetben vizsgáljuk a problémát, azaz nem szükségszerűen páros gráfokban keresünk javító utat egy adott párosításra nézve.

- A magyar módszerben az alsó párosítatlan pontokból indítottuk a keresésünket. Általában nincs ilyen fogalmunk, mint „alsó pontok".

- Most kiindulásnak $K = \overline{V}(M)$, $B = \emptyset$ címkézést választjuk.

- Azaz az összes párosítatlan pontot 0 hosszú javító út kezdeményeknek tekintjük és alkalmazzuk a mohó címkenövelő eljárást elakadásig.

- Ez biztosan elakad, hiszen a növelés mohón történik és kezdetben minden lehetséges javító út végpont „lehetséges javító út kezdőpont" címkét kap.

Edmonds-algoritmus: Kezdeti forma

(Inicializálás) Legyen $R = \overline{V}(M)$. Kezdetben $K = R$, $B = \emptyset$, $C = K = R$.
(Címkenövelés) Mohó címkenövelés elakadásig
// Ekkor a külső csúcsok mindegyik szomszédja címkézett.
Kialakul egy F kereső erdő. A kereső erdő mindegyik komponense egy-egy R-beli pontban gyökerezett.
Ha K-n belül nincs él, akkor (Sikertelen keresés)
Ha $e = kk' \in E$, ahol $k, k' \in K$:
// Legyen r és r' azon R-beli elemek, amelyekből induló/amelyekben gyökerező keresések megcímkézik k-t és k'-t.
Ha $r \neq r'$, akkor (Sikeres keresés) a k-ba vezető javító út kezdemény után e-n keresztül k-ba lépve, majd bejárva az ehhez vezető javító út kezdeményt fordítva r és r' közötti javító utat találtunk.
Ha $r = r'$, akkor (Edmonds-eset) $\star$ // Később tárgyaljuk.

Edmonds-eset: Fogalmak

- Legyen P az r-ből k-ba vezető javító út kezdemény, ami a címkézéséért felel. Hasonlóan legyen P' az $r(= r')$-ből k'-be vezető javító út kezdemény, ami a címkézéséért felel.
- Legyen a_e az elágazás pontja, azaz az utolsó csúcs, amíg a két út közösen halad.

Észrevétel

a_e-ben a kereső erdő szétágazik vagy P és P' közül valamelyik út leáll (azaz $a_e \in \{k, k'\}$). Mindkét esetben a_e egy külső pont a felépített kereső erdőben.

P-n a_e-től k-ig, illetve P'-n a_e-től k'-ig dupla ághajtásokkal ért el a keresés. Azaz az odavezető két út mindegyike páros hosszú, amit e egy páratlan körré, C_e fűz össze.

Edmonds-eset: Észrevétel

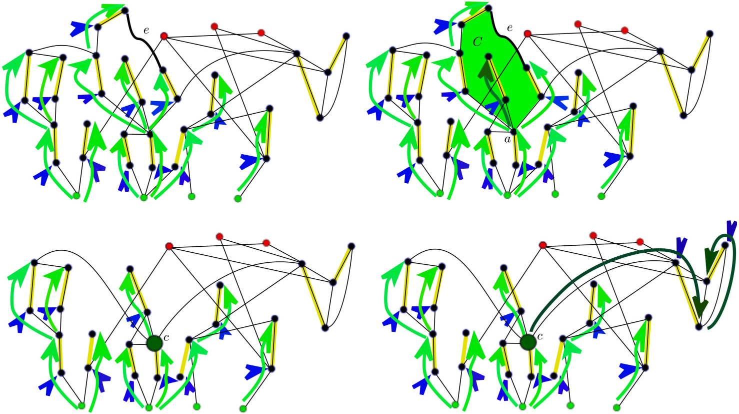
Észrevétel

C_e összes pontjába vezet páros hosszú javító út kezdemény is.

Definíció

G-ben a C_e kör zsugorítása (a kör ponthalmazát egy pontba húzzuk össze) a $\widetilde{G}$ gráfhoz vezet. Formálisan:
$V(\widetilde{G}) = V(G) \setminus V(C_e) \dot{\cup} \{c\}$ (c egy új pont, ami a kör összes csúcsát reprezentálja). $E(\widetilde{G}) = E(G) \setminus \{C_e\text{-n belüli élek}\}$. $I(\widetilde{G})$ természetes módon definiált.
$\widetilde{M} = M \cap E(\widetilde{G})$.
$\widetilde{F}$: a C_e-n kívüli dupla ághajtásokkal felépülő kereső erdő.

Példa



Az első ábra a keresést és az e élt mutatja. A második ábra a C kört és annak a pontját mutatja. A harmadik ábrán a zsugorítás utáni helyzet látható. Végül azt mutatjuk meg, hogy a címkézés, hogyan terjed a zsugorítás után.

Lemma

Lemma

(i) $\widetilde{M}$ párosítás $\widetilde{G}$-ben
(ii) $\widetilde{F}$ keresőerdő $\widetilde{M}$-ra
(iii) c külső pont $\widetilde{F}$-ben.

- Legyen C egy kör G-ben és M egy párosítás. M egy $e = xy$ élét C tüskéjének nevezzük, ha x és y közül az egyik C-re, a másik C-n kívülre esik. Zsugorításnál a C_e körünk olyan, hogy 1 vagy 0 M-beli tüskéje van.

- Könnyen látható, hogy két vagy több tüskés körök zsugorítása után a megmaradt M-beli élek nam alkotnak párosítást.

- A C_e kör tüskéinek száma attól függ, hogy a_e gyökér-e vagy nem.

Az Edmonds-eset

Edmonds-eset

(Kör keresés) A megfelelő e él megtalálása után határozzuk meg a C_e kört.
(Zsugorítás) Zsugorítsuk ezt.
(Az információk átmentése) A zsugorítás egy $\widetilde{G}$ gráfhoz, $\widetilde{M}$ párosításhoz és az erre vonatkozó $\widetilde{F}$ kereső erdőhöz vezet.
(Iteráció) Ezzel térjünk vissza a (Címkenövelés) lépéshez

- A zsugorított kört reprezentáló csúcs külső pont.

- A körre estek eredetileg belső címkét kapott csúcsok is.

- Tehát a zsugorítás egy címke felülírás. Itt lépünk ki a korábbi mohó keresés kereteiből.

Hol is tartunk?

- Hogyan néz ki az eddig leírt lépések végrehajtása?

- Az algoritmusunk „generikus futása” során egy

$$(G, M) = (G_0, M_0) \to (G_1, M_1) \to \ldots \to (G_\ell, M_\ell)$$

zsugorítás sorozatot hajt végre, majd sikeres vagy sikertelen kereséssel leáll.

- A sikeres keresés esete sem világos. A látható javító út egy M_ℓ-re vonatkozó javító út G_ℓ-ben. Nekünk egy M-re vonatkozó javító út kell G-ben.

Hogyan tovább?

Hiányzó Tétel

Legyen P javító út M_ℓ-re G_ℓ-ben. Ekkor létezik javító út M-re G-ben.

Hiányzó Lemma

Legyen P javító út $\widetilde{M}$-ra $\widetilde{G}$-ben. Ekkor létezik javító út M-re G-ben.

Hiányző Tétel

Ha az Edmonds-algoritmus „Sikertelen kereséssel” áll le, akkor M optimális, azaz nem létezik rá vonatkozó javító út.

Igazából a hiányzó lemma konstruktív bizonyítása szükséges.

Az Edmonds-algoritmus vége

Az Edmonds-algoritmus vége

(Sikeres keresés lezárása) Ha sikeres kereséssel léptünk ki az algoritmus fő vázából, akkor a fenti lemma ℓ-szeres alkalmazásával vetítsük ezt vissza az eredeti gráfba.
Az így kapott P javító út lesz algoritmusunk outputja.

(Sikertelen keresés lezárása) Ha sikertelen keresés történt az ℓ-szeresen zsugorított gráfban, akkor az output: "Nincs javító út".

A hiányzó tétel: Definíciók

Definíció

Legyen $R \subset V(G)$. Ekkor

$$\beta(R) = c_1(G - R) - |R|,$$

ahol c_1 a páratlan pontszámú komponensek számát adja meg egy gráfra. Ez az R ponthalmaz Berge—Tutte-paramétere.

• Azaz a ponthalmaz β-értéke megadja milyen többlettel rendelkeznek a ponthalmaz elhagyásával keletkező páratlan pontszámú komponensek száma az elhagyott pontokkal szemben.

A hiányzó tétel: Észrevétel

A paraméter azért fontos, mert tetszőleges P párosításra és R csúcshalmazra teljesülnek a következők.

- $G - R$ minden páratlan pontszámú komponensében lesz legalább egy csúcs, amit P a komponensen belül nem párosíthat.
- Ezek lehetnek még P által párosítva, de párjuk csak R-ből kerülhet ki.
- Ha a fenti β többlet pozitív, akkor legalább annyi párosítatlan csúcsunk lesz.
- Általában tetszőleges $R \subset V(G)$ és P párosítás esetén

$$\beta(R) \leq \delta(P),$$

ahol δ a párosításhoz a párosítatlan csúcsok számát rendeli.

A hiányzó tétel: Az észrevétel következményei

- Ez az összefüggés két nagyon fontos észrevételhez vezet.
-

Definíció

$T \subset V(G)$ csúcshalmazt Tutte-akadálynak nevezzük, ha $\beta(T) > 0$.

Észrevétel

Ha G-ben van Tutte-akadály, akkor nem lehet teljes párosítása.

Észrevétel: Berge-párok, Berge-bizonyíték

Ha $R \subset V(G)$ és P párosítás olyan, hogy

$$\beta(R) = \delta(P),$$

akkor P optimális párosítás.

A hiányzó tétel: Emlékeztető, jelölések

- Az algoritmus futása során egy

$$(G, M) = (G_0, M_0) \to (G_1, M_1) \to \ldots \to (G_\ell, M_\ell)$$

zsugorítás-sorozat történik.

- G_i-ben egy M_i-re vonatkozó kereső erdő épül fel, amelyben B_i a belső és K_i a külső csúcsok halmaza.

- Megjegyezzük, hogy K_{i+1} csúcshalmaz van egy csúcs, ami nem szerepel G_i-ben: az éppen zsugorított kört reprezentáló csúcs egy új csúcs. B_{i+1} azonban G_i-ben is „ott van". Például B_ℓ mindegyik G_i gráfnak egy csúcshalmaza.

A hiányzó tétel: A lényeg

Tétel

Sikertelen keresés esetén mindegyik G_i-ben B_ℓ, M_i egy Berge-pár.

A tétel nyilvánvalóan adja, hogy M_i optimális G_i-ben, azaz $i = 0$ esetén kapjuk az Edmonds-algoritmus korrektségéhez szükséges állítást.

A bizonyítandó egy állítás-sorozat. Ezt $i = \ell, \ell - 1, \ell - 2, \ldots, 2, 1, 0$ sorrendben igazoljuk teljes indukcióval.

A hiányzó tétel: Elindul az indukció

- $i = \ell$ esetén azt kell észrevennünk, hogy $G_\ell - B_\ell$-ben K_ℓ elemei izolált csúcsok.
- Valóban: Köztük nem mehet él mert vagy sikeres lenne a keresés vagy további zsugorítás történne.
- K_ℓ csúcsaiból csak B_ℓ-hez vezet él, hiszen a címkekiterjesztés elakadásig történt.
- Így speciálisan $c_1(G_\ell - B_\ell) \geq |K_\ell|$, továbbá

$$\beta(B_\ell) = c_1(G_\ell - B_\ell) - |B_\ell| \geq |K_\ell| - |B_\ell| = \delta(M_\ell).$$

A hiányzó tétel: Az indukciós lépés

- Az indukciós lépéshez azt kell észrevenni, hogy a $G_{i+1} \to G_i$ ugrásban az összezsugorodott kör, c_{i+1} a K_{i+1} külső ponthalmaz egy eleme, azaz egy $G_{i+1} - B_\ell$-beli csúcs egy páratlan körré „fújodik fel".

- Ez csak egyetlen komponensre hat. Azaz $G_i - B_\ell$ komponensei egy kivételével megegyeznek $G_{i+1} - B_\ell$ komponenseivel egy kivételével.

- $G_i - B_\ell$ kivételes koponense $G_{i+1} - B_\ell$ kivételes (a c_{i_1} csúcsot tartalmazó) komponenséből keletkezik.

- Az új komponens pontszámának paritása megegyezik a felfújodott komponens pontszámának paritásával (egy csúcsot helyettesítettünk páratlan sokkal). Speciálisan $c_1(G_i - B_\ell) = c_1(G_{i+1} - B_\ell)$.

A hiányzó tétel: Az indukciós lépés (folytatás)

- Azaz B_ℓ a G_i gráfban felvett β paramétere (az indukciós feltevést használva)

$$c_1(G_i - B_\ell) - |B_\ell| = c_1(G_{i+1} - B_\ell) - |B_\ell| = \delta(M_{i+1}).$$

- A bizonyítás befejezéséhez azt kell észrevenni, hogy $\delta(M_i) = |V(G_i)| - 2|M_i|$ az algoritmus futása során nem változik.
- Valóban, egy $2k+1$ hosszú kör zsugorítása a csúcsok számát $2k$-val, a párosított élek számát k-val csökkenti. Azaz $\delta(M_{i+1}) = \delta(M_i)$.

Következmények

Tétel (Tutte-tétel, 1947)

Egy gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha nem tartalmaz Tutte-akadályt.

Tétel (Berge-formula, 1958)

Legyen G egy tetszőleges gráf. Ekkor

$$\max\{\beta(T) : \ T \subset V(G)\} = \min\{\delta(P) : \ P \text{ párosítás}\}.$$

A Tutte-tétel ekvivalenciájának egyik iránya, illetve a Berge-fomulában az egyik oldal nem-kisebb volta nyilvánvaló, nem kíván a fogalmak ismereténél és „józan paraszti észnél" többet. Ezen „fél állítások" felismerése és indoklása teszteli a hallgató megértésének mélységét.

Petersen tétele

- A Tutte-tétel szokásos alkalmazása a következő tétel.

- Petersen tételét több mint egy félévszázaddal a párosítások elméletének kialalkulása előtt közölte. Bizonyítása nem alapult korábbi gráfelméleti vizsgálatokon.

Tétel (Petersen-tétel, 1891)

Egy kétszeresen élösszefüggő, 3-reguláris gráfban van teljes párosítás.

Szünet

Az alábbiakban egy tetszőleges G gráf $V(G)$ ponthalmazának csak G-től függő három diszjunkt halmazra való felosztását írjuk le. A három osztály jelentősége a későbbiekből lesz világos.

Definíció

Legyen

$$D_G = \{x \in V(G) : \ G\text{-ben van } x\text{-et elkerülő optimális párosítás}\},$$

$$A_G = N(D_G) = \ D_G \text{ szomszédainak halmaza},$$

$$C_G = V(G) - (D_G \cup A_G).$$

Legyen G egy gráf egy M optimális/maximális elemszámú párosítással. Futassuk az Edmonds-algoritmust, amely sikertelen kereséssel áll le: Egy — esetleg G-ből többszörös zsugorítással kapott — gráfban az aktuális külső pontok K halmazában nincs él, továbbá K-ból nem vezet él címkézetlen csúcsokhoz (azaz $V_{\text{aktuális}} - (K \cup B)$-hez, ahol B az aktuális belső pontok halmaza).

Tétel

A fenti definiált K és B halmazokra teljesülnek a következők.

a) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek a zsugorítások során K egy elemére képződnek éppen D_G.

b) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek az egész algoritmus során belső pontok maradnak (azaz B elemei) éppen A_G.

c) Azon pontok halmaza G-ben, amelyek az egész algoritmus során címkézetlenek maradnak éppen C_G.

Azaz speciálisan az a)-c) pontokban leírt, látszólag az Edmonds-algoritmus futásától (amelyben sok nem-determinisztikus

A tétel bizonyítása az Edmonds-algoritmus ismeretén és a helyességének bizonyításán alapul. Nem végezzük el, az érdeklődő hallgató megpróbálhatja az igazolást.
A fenti tétel könnyű következménye az alábbi.

Tétel (Gallai—Edmonds-struktúratétel)

a) $G|_{D_G}$ komponensei faktor-kri- tikusak, azaz nincs bennük teljes párosítás, de bármelyik pontjuk elhagyása után már lesz bennük.

b) Legyen S az a páros segédgráf, amely egyik színosztályának elemei A_G pontjai, másik színosztályának elemei $G|_{D_G}$ komponensei; élei a D_G és A_G közti élek (természetes illezkedéssel: xy él ($x \in D_G$, $y \in A_G$) esetén a két végpont y, illetve x komponense $G|_{D_G}$-ben. Ekkor az S páros gráfra minden $\emptyset \subsetneq X \subset A_G$ esetén ennek szomszédsága több elemű mint $|X|$.

c) $G|_{C_G}$ egy teljes párosítással rendelkező gráf.

Végül a struktúratétel egy egyszerű következményét adjuk.

Tétel

Legyen G egy pont-tranzitív összefüggő gráf (azaz $\mathbb{A}ut(G)$, G automorfizmus csoportja tranzitíven hat $V(G)$-n, azaz minden $u, v \in V(G)$ esetén található olyan automorfizmusa G-nek, amely u-t v-be viszi). Ekkor G-ben van teljes párosítás vagy majdnem teljes párosítás (azaz olyan párosítás, amely egyetlen csúcsot hagy párosítatlan).

Pont-tranzitivitás esetén két lehetőség van. Vagy $D_G = V(G)$ (ekkor $A_G = C_G = \emptyset$) vagy $D_G = \emptyset$ (ekkor $A_G = \emptyset, C_G = V(G)$). A Gallai—Edmonds-struktúratétel mindkét esetben adja az állítást.

A Gallai—Edmonds-struktúratétel egy gráfot háromféle összetevőre bont: faktor-kritikus gráfok, elemi páros gráf, teljes párosítással rendelkező gráf. Az állítás bizonyos értelemben megfordítható: Ha faktor-kritikus gráfok egy családját elemi páros gráf szerint összekötünk egy A csúcshalmazzal, amely csúcsait egymás közt és egy P teljes párosítással rendelkező gráf pontjaival kötünk össze, akkor egy olyan G gráfhoz jutunk, amely Gallai—Edmonds-felbontása visszaadja a kiinduló (tetszőlegesen választott) összetevőket.
Fontos az összetevők mély megértése. Az alábbi (bizonyítás nélkül közölt) tétel ezen irányba tett első lépés.

Definíció

Legyen H egy gráf. H egy fülragasztással történő bővítése alatt azt értjük, hogy $f_1, \ldots, f_{\ell-1}$ új pontot adunk gráfunkhoz. Továbbá $V(H)$-ból kijlölolünk f_0, f_l csúcsokat (amik egybe is eshetnek) és gráfunkhoz hozzáadjuk az új $f_0 f_1, f_1 f_2, \ldots, f_{\ell-1} f_\ell$ éleket. Azaz egy utat vagy egy kört ragasztunk H-hoz. ℓ a fül hossza.

Tétel

G akkor és csak akkor faktor-kritikus, ha megkapható az egy pontú gráfból pártalan hosszú fülek ragasztásával.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!