Halmazrendszerek és alapvető extremális problémáik

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Sperner-rendszer

Definíció

$\mathcal{S}$ Sperner-rendszer V $(n := |V|)$ felett, ha bármely $E, E' \in \mathcal{S}$-re $E \not\subset E'$.

Sperner-rendszer

Definíció

$\mathcal{S}$ Sperner-rendszer V ($n := |V|$) felett, ha bármely $E, E' \in \mathcal{S}$-re $E \not\subset E'$.

A témakör fő kérdése: Mekkora lehet V felett a legnagyobb elemszámú Sperner-rendszer?

Sperner-tétel

Sperner-tétel

Példa

Bármely $0 \leq k \leq n$ esetén $S = \binom{V}{k} = \{R \subset V : |R| = k\}$ Sperner-rendszer. Ennek $\binom{n}{k}$ eleme van. $k = [n/2]$ esetén kapjuk a legnagyobb elemszámú rendszert.

Sperner-tétel

Példa

Bármely $0 \leq k \leq n$ esetén $S = \binom{V}{k} = \{R \subset V : |R| = k\}$ Sperner-rendszer. Ennek $\binom{n}{k}$ eleme van. $k = [n/2]$ esetén kapjuk a legnagyobb elemszámú rendszert.

(Sperner-tétel)

A V feletti Sperner-rendszerek maximális elemszáma $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

I. Bizonyítás

I. Bizonyítás

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy n elemű V feletti halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{H}$ f-vektora az a $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ vektor, amely f_i komponense megmondja, hogy hány i elemű él szerepel $\mathcal{H}$-ban.

I. Bizonyítás

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy n elemű V feletti halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{H}$ f-vektora az a $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ vektor, amely f_i komponense megmondja, hogy hány i elemű él szerepel $\mathcal{H}$-ban.

(LYM-egyenlőtlenség)

Legyen S egy Sperner-rendszer V felett. Ekkor f-vektorára

$$\sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq 1.$$

I. Bizonyítás

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ egy n elemű V feletti halmazrendszer. Ekkor $\mathcal{H}$ f-vektora az a $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ vektor, amely f_i komponense megmondja, hogy hány i elemű él szerepel $\mathcal{H}$-ban.

(LYM-egyenlőtlenség)

Legyen S egy Sperner-rendszer V felett. Ekkor f-vektorára

$$\sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \leq 1.$$

A lemma elnevezése onnan ered, hogy Lubell, Yamamoto és Meshalkin bizonyította egymástól függetlenül. Neveik kezdőbetűiből állították össze a hivatkozást. Gyakran Bollobás Béla nevét is a lemmához fűzik, aki egy rokon állítást igazolt

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása

Legyen π egy tetszőleges $V \to [n]$ bijekció, és $E \in S$ tetszőleges elem. Számoljuk össze azon (π, E) párokat, melyekre $\pi(E)$ $[n]$-nek egy kezdőszelete.

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása

Legyen π egy tetszőleges $V \to [n]$ bijekció, és $E \in S$ tetszőleges elem. Számoljuk össze azon (π, E) párokat, melyekre $\pi(E)$ $[n]$-nek egy kezdőszelete.

Ha minden egyes $E \in S$-hoz megszámoljuk az összes jó π sorbarendezést, akkor azt kapjuk, hogy $\sum_{E\in S} |E|! \cdot (n - |E|)!$ ilyen pár van.

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása

Legyen π egy tetszőleges $V \to [n]$ bijekció, és $E \in S$ tetszőleges elem. Számoljuk össze azon (π, E) párokat, melyekre $\pi(E)$ $[n]$-nek egy kezdőszelete.

Ha minden egyes $E \in S$-hoz megszámoljuk az összes jó π sorbarendezést, akkor azt kapjuk, hogy $\sum_{E \in S} |E|! \cdot (n - |E|)!$ ilyen pár van.

Legyen most π tetszőleges sorbarendezés. Mivel a tartalmazás reláció teljes rendezés $[n]$ kezdőszeletein, ezért ha $\pi(E_1), \pi(E_2)$ kezdőszelete $[n]$-nek, akkor $E_1 \subset E_2$ vagy $E_2 \subset E_1$. Így ha π sorbarendezés, akkor legfeljebb egy E halmaz esetén lehet $\pi(E)$ kezdőszelete $[n]$-nek.

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása: befejezés

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása: befejezés

A két választ vessük össze.

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása: befejezés

A két választ vessük össze.

$$\sum_{E \in S} |E|! \cdot (n - |E|)! \leq n!$$

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása: befejezés

A két választ vessük össze.

$$\sum_{E \in S} |E|! \cdot (n - |E|)! \leq n!$$

Mindkét oldalt $n!$-sal osztva kapjuk a lemma állítását.

LYM-egyenlőtlenség bizonyítása: befejezés

A két választ vessük össze.

$$\sum_{E\in S} |E|!\cdot(n-|E|)! \leq n!$$

Mindkét oldalt $n!$-sal osztva kapjuk a lemma állítását.

$$1 \geq \sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{i}} \geq \sum_{i=0}^{|V|} \frac{f_i}{\binom{n}{[n/2]}} = \frac{|\mathcal{S}|}{\binom{n}{[n/2]}}.$$

Részbenrendezett halmazok

Részbenrendezett halmazok

Definíció

Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $L \subset P$ lánc, ha L bármely két eleme összehasonlítható.

Részbenrendezett halmazok

Definíció

Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $L \subset P$ lánc, ha L bármely két eleme összehasonlítható.

Definíció

Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $A \subset P$ antilánc, ha A elemei páronként nem összehasonlíthatók.

Részbenrendezett halmazok

Definíció

Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $L \subset P$ lánc, ha L bármely két eleme összehasonlítható.

Definíció

Legyen $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaz. Ekkor $A \subset P$ antilánc, ha A elemei páronként nem összehasonlíthatók.

A $(\mathcal{P}(V), \subset)$ feletti antiláncok pontosan a V feletti Sperner-rendszerekkel egyeznek meg.

II. Bizonyítás Sperner-tételre

Észrevétel

Bármely L láncra és A antiláncra $|P \cap A| \leq 1$.

Állít

Amennyiben adott $L_1, L_2, \ldots, L_k$ láncok, melyek lefedik P-t, akkor bármely P feletti antilánc legfeljebb k elemű lehet.

Következmény

$$\max_{A \text{ antilánc}} (|A|) \leq \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

Lemma

Lemma

Lemma

$(\mathcal{P}(V), \subset)$-en létezik $\binom{n}{[n/2]}$ láncot tartalmazó lefedés.

Lemma

Lemma

$(\mathcal{P}(V), \subset)$-en létezik $\binom{n}{[n/2]}$ láncot tartalmazó lefedés.

Definíció

$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V)$, $\mathcal{L} : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_t$ szimmetrikus lánc, ha van olyan i, hogy $|L_1| = i, |L_2| = i + 1, \ldots, |L_t| = |V| - i$.

Lemma

Lemma

$(\mathcal{P}(V), \subset)$-en létezik $\binom{n}{[n/2]}$ láncot tartalmazó lefedés.

Definíció

$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V)$, $\mathcal{L} : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_t$ szimmetrikus lánc, ha van olyan i, hogy $|L_1| = i, |L_2| = i+1, \ldots, |L_t| = |V| - i$.

Lemma

$(\mathcal{P}(V), \subset)$-nak létezik diszjunkt szimmetrikus láncokkal való fedése.

Lemma

Lemma

$(\mathcal{P}(V), \subset)$-en létezik $\binom{n}{[n/2]}$ láncot tartalmazó lefedés.

Definíció

$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(V)$, $\mathcal{L} : L_1 \subset L_2 \subset ... \subset L_t$ szimmetrikus lánc, ha van olyan i, hogy $|L_1| = i, |L_2| = i+1, \ldots, |L_t| = |V| - i$.

Lemma

$(\mathcal{P}(V), \subset)$-nak létezik diszjunkt szimmetrikus láncokkal való fedése.

A szimmetrikusság miatt minden láncban szerepel egy $[n/2]$ elemszámú halmaz. Így a felhasznált láncok száma szükségszerűen $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

$|V| = 1, 2, 3$ esetén triviálisan teljesül az állítás. Az indukciós lépéshez legyen $|V| > 1$. Ekkor: $V = V_0 \dot{\cup} \{u\}$, ahol V_0-ról már tudjuk hogy létezik ilyen fedés.

Lemma bizonyítása

$|V| = 1, 2, 3$ esetén triviálisan teljesül az állítás. Az indukciós lépéshez legyen $|V| > 1$. Ekkor: $V = V_0 \dot\cup \{u\}$, ahol V_0-ról már tudjuk hogy létezik ilyen fedés.

$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V_0) \dot\cup \{R \subset V : u \in R\}$. Legyen $\mathcal{P}(V_0) = \mathcal{L}_1 \dot\cup \mathcal{L}_2 \dot\cup ... \dot\cup \mathcal{L}_k$ az indukciós feltevésből. Ekkor az $\mathcal{L}_t : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j$ láncból az alábbi láncok képezhetők:

$$\mathcal{L}'_t : L_1 \cup \{u\} \subset L_2 \cup \{u\} \subset \ldots \subset L_{j-1} \cup \{u\},$$

valamint

$$\mathcal{L}''_t : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j \subset L_j \cup \{u\}.$$

Lemma bizonyítása

$|V| = 1, 2, 3$ esetén triviálisan teljesül az állítás. Az indukciós lépéshez legyen $|V| > 1$. Ekkor: $V = V_0 \dot\cup \{u\}$, ahol V_0-ról már tudjuk hogy létezik ilyen fedés.

$\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V_0) \dot\cup \{R \subset V : u \in R\}$. Legyen $\mathcal{P}(V_0) = \mathcal{L}_1 \dot\cup \mathcal{L}_2 \dot\cup ... \dot\cup \mathcal{L}_k$ az indukciós feltevésből. Ekkor az $\mathcal{L}_t : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j$ láncból az alábbi láncok képezhetők:

$$\mathcal{L}'_t : L_1 \cup \{u\} \subset L_2 \cup \{u\} \subset \ldots \subset L_{j-1} \cup \{u\},$$

valamint

$$\mathcal{L}''_t : L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_j \subset L_j \cup \{u\}.$$

Látható, hogy ezek szimmetrikusak a $V_0 \cup \{u\}$ alaphalmazra, páronként diszjunktak. Így a tétel állítását igazolják. Ebből adódik a lemma és így a Sperner-tétel is.

Megjegyzés

Megjegyzés

Úgy tűnik mintha induktív/rekurzív konstrukciónk közben láncaink száma mindig megduplázódott volna. Pedig a láncok száma nem kettő hatványként növekszik, számuk $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Megjegyzés

Úgy tűnik mintha induktív/rekurzív konstrukciónk közben láncaink száma mindig megduplázódott volna. Pedig a láncok száma nem kettő hatványként növekszik, számuk $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

A látszólagos ellentmondás feloldása, hogy $\mathcal{L}_i'$ lehet üres is.

Szünet

title

title

A második bizonyítás mélyén a részbenrendezett halmazok matematikai elmélete húzódik meg.

title

A második bizonyítás mélyén a részbenrendezett halmazok matematikai elmélete húzódik meg.

Tétel

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.

title

A második bizonyítás mélyén a részbenrendezett halmazok matematikai elmélete húzódik meg.

Tétel

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.

(i)

$$\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \min_{A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ antiláncfedés}} k$$

title

A második bizonyítás mélyén a részbenrendezett halmazok matematikai elmélete húzódik meg.

Tétel

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.

(i)

$$\max_{L \text{ lánc}} (|L|) = \min_{A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ antiláncfedés}} k$$

(ii) (Dilworth-tétel)

$$\max_{A \text{ antilánc}} (|A|) = \min_{L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

title

A második bizonyítás mélyén a részbenrendezett halmazok matematikai elmélete húzódik meg.

Tétel

Legyen $(P, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz.

(i)

$$\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \min_{A_1, A_2, \dots, A_k \text{ antiláncfedés}} k$$

(ii) (Dilworth-tétel)

$$\max_{A \text{ antilánc}}(|A|) = \min_{L_1, L_2, \dots, L_k \text{ láncfedés}} k$$

Mindkét esetben csak azt kell igazolnunk, a maximalizálási feladat optimuma nagyobb a minimalizálásai feladaténál.

Bizonyítás (i)

Bizonyítás (i)

Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Bizonyítás (i)

Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét.

Bizonyítás (i)

Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét. (Jól definiált az érték, hiszen $\{x\}$ mindig egy x-et maximális elemként tartalmazó lánc.)

Bizonyítás (i)

Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét. (Jól definiált az érték, hiszen $\{x\}$ mindig egy x-et maximális elemként tartalmazó lánc.)

A hozzárendelés értékkészlete $\{1, 2, \ldots, M\}$.

Bizonyítás (i)

Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét. (Jól definiált az érték, hiszen $\{x\}$ mindig egy x-et maximális elemként tartalmazó lánc.)

A hozzárendelés értékkészlete $\{1, 2, \ldots, M\}$. Legyen A_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ azon P-beli elemek halmaza, amikhez az i értéket rendeljük hozzá.

Bizonyítás (i)

Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét. (Jól definiált az érték, hiszen $\{x\}$ mindig egy x-et maximális elemként tartalmazó lánc.)

A hozzárendelés értékkészlete $\{1, 2, \ldots, M\}$. Legyen A_i ($i = 1, 2, \ldots, M$) azon P-beli elemek halmaza, amikhez az i értéket rendeljük hozzá.

Így M halmazzal fedjük le P-t. Ha belátjuk, hogy mindegyik A_i antilánc, akkor készen vagyunk.

Bizonyítás (i)

Legyen $M = \max_{L \text{ lánc}}(|L|)$

Minden $x \in P$-hez rendeljük hozzá az x-et maximális elemként tartalmazó láncok között a legnagyobb méretét. (Jól definiált az érték, hiszen $\{x\}$ mindig egy x-et maximális elemként tartalmazó lánc.)

A hozzárendelés értékkészlete $\{1, 2, \ldots, M\}$. Legyen A_i $(i = 1, 2, \ldots, M)$ azon P-beli elemek halmaza, amikhez az i értéket rendeljük hozzá.

Így M halmazzal fedjük le P-t. Ha belátjuk, hogy mindegyik A_i antilánc, akkor készen vagyunk.

Ez indirekten könnyen adódik, ha $x < y$ és $x, y \in A_i$, akkor az $x \in A_i$-t bizonyító i elemű lánchoz y-t adva egy olyan $i + 1$ elemű láncot kapunk, amely ellentmond az $y \in A_i$ feltevésnek.

Bizonyítás (ii): A terv

Bizonyítás (ii): A terv

Legyen $M = \max\{|A| : A \text{ antilánc}\}$ és
$m = \min\{k : L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ fedő láncok}\}$.

Bizonyítás (ii): A terv

Legyen $M = \max\{|A| : A \text{ antilánc}\}$ és
$m = \min\{k : L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ fedő láncok}\}$.

$(P, \leq)$ alapján definiálunk egy B páros gráfot.

Bizonyítás (ii): A terv

Legyen $M = \max\{|A| : A \text{ antilánc}\}$ és
$m = \min\{k : L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ fedő láncok}\}$.

$(P, \leq)$ alapján definiálunk egy B páros gráfot.

V A két színosztálya $F = \{p^+ : p \in P\}$ és $A = \{p^- : p \in P\}$.

Bizonyítás (ii): A terv

Legyen $M = \max\{|A| : A \text{ antilánc}\}$ és
$m = \min\{k : L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ fedő láncok}\}$.

$(P, \leq)$ alapján definiálunk egy B páros gráfot.

V A két színosztálya $F = \{p^+ : p \in P\}$ és $A = \{p^- : p \in P\}$.

E p^+ és q^- akkor és csak akkor van összekötve, ha $p > q$.

Bizonyítás (ii): A terv

Legyen $M = \max\{|A| : A \text{ antilánc}\}$ és
$m = \min\{k : L_1, L_2, \ldots, L_k \text{ fedő láncok}\}$.

$(P, \leq)$ alapján definiálunk egy B páros gráfot.

V A két színosztálya $F = \{p^+ : p \in P\}$ és $A = \{p^- : p \in P\}$.

E p^+ és q^- akkor és csak akkor van összekötve, ha $p > q$.

Célunk, hogy belássuk $\nu(B) = |P| - m$ és $\tau(B) = |P| - M$.

Bizonyítás (ii): A terv

Legyen $M = \max\{|A| : A \text{ antilánc}\}$ és
$m = \min\{k : L_1, L_2, \dots, L_k \text{ fedő láncok}\}$.

$(P, \leq)$ alapján definiálunk egy B páros gráfot.

V A két színosztálya $F = \{p^+ : p \in P\}$ és $A = \{p^- : p \in P\}$.

E p^+ és q^- akkor és csak akkor van összekötve, ha $p > q$.

Célunk, hogy belássuk $\nu(B) = |P| - m$ és $\tau(B) = |P| - M$.

Ezek után már adódik az állítás Kőnig tételéből.

$\nu(B) = |P| - m$

$\nu(B) = |P| - m$

Egy láncfedésben szereplő $L : \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_s$ láncnak megfeleltethetők az $\ell_1^+\ell_2^-, \ell_2^+\ell_3^-, \ldots, \ell_{s-1}^+\ell_s^-$ élek.

$\nu(B) = |P| - m$

Egy láncfedésben szereplő $L : \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_s$ láncnak megfeleltethetők az $\ell_1^+\ell_2^-, \ell_2^+\ell_3^-, \ldots, \ell_{s-1}^+\ell_s^-$ élek.

Ezt az összes láncra megtéve $|P| - m$ élt kapunk, amelyek egy párosítást alkotnak.

$\nu(B) = |P| - m$

Egy láncfedésben szereplő $L : \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_s$ láncnak megfeleltethetők az $\ell_1^+\ell_2^-, \ell_2^+\ell_3^-, \ldots, \ell_{s-1}^+\ell_s^-$ élek.

Ezt az összes láncra megtéve $|P| - m$ élt kapunk, amelyek egy párosítást alkotnak.

A konstrukciónk megfordítható: egy M párosítás p^+q^- éleiből képezzük a P csúcshalmazon a pq éleket.

$\nu(B) = |P| - m$

Egy láncfedésben szereplő $L : \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_s$ láncnak megfeleltethetők az $\ell_1^+\ell_2^-, \ell_2^+\ell_3^-, \ldots, \ell_{s-1}^+\ell_s^-$ élek.

Ezt az összes láncra megtéve $|P| - m$ élt kapunk, amelyek egy párosítást alkotnak.

A konstrukciónk megfordítható: egy M párosítás p^+q^- éleiból képezzük a P csúcshalmazon a pq éleket.

Az így kapott gráf utak egy rendszere lesz.

$\nu(B) = |P| - m$

Egy láncfedésben szereplő $L : \ell_1 > \ell_2 > \ldots > \ell_s$ láncnak megfeleltethetők az $\ell_1^+\ell_2^-, \ell_2^+\ell_3^-, \ldots, \ell_{s-1}^+\ell_s^-$ élek.

Ezt az összes láncra megtéve $|P| - m$ élt kapunk, amelyek egy párosítást alkotnak.

A konstrukciónk megfordítható: egy M párosítás p^+q^- éleiből képezzük a P csúcshalmazon a pq éleket.

Az így kapott gráf utak egy rendszere lesz.

A komponensek ponthalmazai láncok, amelyek lefedik P-t. Így adódik a $\nu(B) = |P| - m$ összefüggés.

$\tau(B) = |P| - M$

$\tau(B) = |P| - M$

Legyen A egy maximális elemszámú antilánc.

$\tau(B) = |P| - M$

Legyen A egy maximális elemszámú antilánc.

$P - A$ elemeit osszuk két részbe:

$\tau(B) = |P| - M$

Legyen A egy maximális elemszámú antilánc.

$P - A$ elemeit osszuk két részbe: L^--t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél kisebbek.

$\tau(B) = |P| - M$

Legyen A egy maximális elemszámú antilánc.

$P - A$ elemeit osszuk két részbe: L^{-}-t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél kisebbek. L^{+}-t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél nagyobbak.

$\tau(B) = |P| - M$

Legyen A egy maximális elemszámú antilánc.

$P - A$ elemeit osszuk két részbe: L^--t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél kisebbek. L^+-t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél nagyobbak.

Nyilván L^+ és L^- diszjunkt, továbbá együtt kiadja $P - A$-t.

$\tau(B) = |P| - M$

Legyen A egy maximális elemszámú antilánc.

$P - A$ elemeit osszuk két részbe: L^--t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél kisebbek. L^+-t alkossák azok a csúcsok, amelyek valamelyik A-beli elemnél nagyobbak.

Nyilván L^+ és L^- diszjunkt, továbbá együtt kiadja $P - A$-t.

$R = \{p^+ : p \in L^+\} \dot\cup \{p^- : p \in L^-\}$ egy $|P| - M$ méretű lefogó halmaz.

$\tau(B) = |P| - M$ (folytatás)

$\tau(B) = |P| - M$ (folytatás)

A gondolatmenet megfordítható:

$\tau(B) = |P| - M$ (folytatás)

A gondolatmenet megfordítható: Minden $R \subset V(B)$ meghatározza P egy felosztását négy részre

$$P = P^{+}(R)\dot{\cup}P^{-}(R)\dot{\cup}P^{\pm}(R)\dot{\cup}P^{0}(R)$$

aszerint, hogy $p \in P$ esetén $\{p^{+}, p^{-}\}$ hogy viszonyul R-hez.

$\tau(B) = |P| - M$ (folytatás)

A gondolatmenet megfordítható: Minden $R \subset V(B)$ meghatározza P egy felosztását négy részre

$$P = P^+(R) \dot\cup P^-(R) \dot\cup P^\pm(R) \dot\cup P^0(R)$$

aszerint, hogy $p \in P$ esetén $\{p^+, p^-\}$ hogy viszonyul R-hez.

Ekkor

$$R = \{p^- : p \in P^+(R)\} \dot\cup \{p^+ : p \in P^-(R)\} \dot\cup \{p^-, p^+ : p \in P^\pm(R)\}.$$

$\tau(B) = |P| - M$ (folytatás)

A gondolatmenet megfordítható: Minden $R \subset V(B)$ meghatározza P egy felosztását négy részre

$$P = P^+(R) \dot\cup P^-(R) \dot\cup P^\pm(R) \dot\cup P^0(R)$$

aszerint, hogy $p \in P$ esetén $\{p^+, p^-\}$ hogy viszonyul R-hez.

Ekkor

$$R = \{p^- : p \in P^+(R)\} \dot\cup \{p^+ : p \in P^-(R)\} \dot\cup \{p^-, p^+ : p \in P^\pm(R)\}.$$

Ha R lefogó, akkor $P^0(R)$-nek antiláncnak kell lennie.

$\tau(B) = |P| - M$ (folytatás)

A gondolatmenet megfordítható: Minden $R \subset V(B)$ meghatározza P egy felosztását négy részre

$$P = P^+(R) \dot\cup P^-(R) \dot\cup P^\pm(R) \dot\cup P^0(R)$$

aszerint, hogy $p \in P$ esetén $\{p^+, p^-\}$ hogy viszonyul R-hez.

Ekkor

$$R = \{p^- : p \in P^+(R)\} \dot\cup \{p^+ : p \in P^-(R)\} \dot\cup \{p^-, p^+ : p \in P^\pm(R)\}.$$

Ha R lefogó, akkor $P^0(R)$-nek antiláncnak kell lennie.

Ha $|R|$-t minimálisnak szeretnénk, akkor $P^\pm(R)$ optimális választása $\emptyset$.

Részbenrendezett halmazok és gráfok

Részbenrendezett halmazok és gráfok

A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak megfeleltetünk egy G_p összehasonlítási gráfot: Ennek az egyszerú gráfnak a csúcshalmaza P és két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha összehasonlíthatók.

Részbenrendezett halmazok és gráfok

A $(P, \leq)$ részbenrendezett halmaznak megfeleltetünk egy G_p összehasonlítási gráfot: Ennek az egyszerű gráfnak a csúcshalmaza P és két csúcs akkor és csak akkor összekötött, ha összehasonlíthatók.

Észrevétel

$$\max_{L \text{ lánc}}(|L|) = \omega(G_P),$$

$$\min_{A_1, A_2, \dots, A_k \text{ antilánc fedés}} k = \chi(G_P),$$

$$\max_{A \text{ antilánc}}(|A|) = \alpha(G_P) = \omega(\overline{G_P}),$$

$$\min_{L_1, L_2, \dots, L_k \text{ lánc fedés}} k = \chi(\overline{G_P}).$$

Gráfelmélet

Az előző tétel kapcsolatai vezetnek el a következő gráfelméleti fogalomhoz:

Definíció

Egy G gráf perfekt, ha minden F feszített részére (csak csúcselhagyásokkal nyerhető részgráfja)

$$\omega(F) = \chi(F).$$

Gráfelmélet

Az előző tétel kapcsolatai vezetnek el a következő gráfelméleti fogalomhoz:

Definíció

Egy G gráf perfekt, ha minden F feszített részére (csak csúcselhagyásokkal nyerhető részgráfja)

$$\omega(F) = \chi(F).$$

Tétel

Legyen G_P egy $(P, \leq)$ egy részben rendezett halmaz összehasonlítási gráfja. Ekkor

Gráfelmélet

Az előző tétel kapcsolatai vezetnek el a következő gráfelméleti fogalomhoz:

Definíció

Egy G gráf perfekt, ha minden F feszített részére (csak csúcselhagyásokkal nyerhető részgráfja)

$$\omega(F) = \chi(F).$$

Tétel

Legyen G_P egy $(P, \leq)$ egy részben rendezett halmaz összehasonlítási gráfja. Ekkor

(i) G_P perfekt,

Gráfelmélet

Az előző tétel kapcsolatai vezetnek el a következő gráfelméleti fogalomhoz:

Definíció

Egy G gráf perfekt, ha minden F feszített részére (csak csúcselhagyásokkal nyerhető részgráfja)

$$\omega(F) = \chi(F).$$

Tétel

Legyen G_P egy $(P, \leq)$ egy részben rendezett halmaz összehasonlítási gráfja. Ekkor

(i) G_P perfekt,

(ii) $\overline{G_P}$ perfekt.

Szünet

Metsző halmazrendszerek

Metsző halmazrendszerek

Definíció

Egy halmazrendszert metszőnek nevezünk, ha bámely két éle metszi egymást.

Metsző halmazrendszerek

Definíció

Egy halmazrendszert metszőnek nevezünk, ha bámely két éle metszi egymást.

Azaz egy halmazrendszer metsző, ha tiltjuk a diszjunkt élpárokat.

Metsző halmazrendszerek

Definíció

Egy halmazrendszert metszőnek nevezünk, ha bámely két éle metszi egymást.

Azaz egy halmazrendszer metsző, ha tiltjuk a diszjunkt élpárokat.

Az alap extremális kérdés, hogy milyen sok éle lehet egy n elemű ponthalmaz feletti metsző halmazrendszernek.

Metsző halmazrendszerek: Példák

Metsző halmazrendszerek: Példák

Példa

Legyen $x \in V$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes x-et tartalmazó halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Metsző halmazrendszerek: Példák

Példa

Legyen $x \in V$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes x-et tartalmazó halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Példa

Legyen V egy n elemű halmaz, ahol n páratlan, $n = 2k + 1$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes legalább $k + 1$ elemű halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Metsző halmazrendszerek: Példák

Példa

Legyen $x \in V$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes x-et tartalmazó halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Példa

Legyen V egy n elemű halmaz, ahol n páratlan, $n = 2k + 1$. $\mathcal{H}$ alkossa az összes legalább $k + 1$ elemű halmazt. $\mathcal{H}$ nyilván metsző és $|\mathcal{H}| = 2^{|V|-1} = 2^{n-1}$.

Példa

Ha az alaphalmaz pontszáma páros és a pontosan $|V|/2$ elemű halmazok által alkotott komplementer párok mindegyikéből csak egyiket rakjuk $\mathcal{H}$-ba, a több mint $|V|/2$ elemű halmazok mellé.

Egy középiskolás feladat

Egy középiskolás feladat

Észrevétel

Egy n elemű V halmaz feletti metsző halmazrendszerek legfeljebb 2^{n-1} élt tartalmaznak.

Egy középiskolás feladat

Észrevétel

Egy n elemű V halmaz feletti metsző halmazrendszerek legfeljebb 2^{n-1} élt tartalmaznak.

A fenti példák extremálisak.

Egy középiskolás feladat

Észrevétel

Egy n elemű V halmaz feletti metsző halmazrendszerek legfeljebb 2^{n-1} élt tartalmaznak.

A fenti példák extremálisak.

Valóban: V 2^n darab részhalmazát 2^{n-1} darab komplementer halmazpárra oszthatjuk. Ezek mindegyikéből legfeljebb egyet tartalmazhat metsző halmazrendszerünk.

A valódi probléma

A valódi probléma

Jóval nehezebb kérdést kapunk, ha k uniform halmazrendserekkel dolgozunk.

A valódi probléma

Jóval nehezebb kérdést kapunk, ha k uniform halmazrendserekkel dolgozunk.

$k > |V|/2$ esetben itt sem lesz gond: az összes k-as metsző rendszert alkot.

A valódi probléma

Jóval nehezebb kérdést kapunk, ha k uniform halmazrendserekkel dolgozunk.

$k > |V|/2$ esetben itt sem lesz gond: az összes k-as metsző rendszert alkot.

$k \leq |V|/2$ esetben azonban egy alaptétel válaszolja meg kérdésünket.

A valódi probléma

Jóval nehezebb kérdést kapunk, ha k uniform halmazrendserekkel dolgozunk.

$k > |V|/2$ esetben itt sem lesz gond: az összes k-as metsző rendszert alkot.

$k \leq |V|/2$ esetben azonban egy alaptétel válaszolja meg kérdésünket.

Tétel (Erdős—Ko—Rado-tétel)

Legyen $k \leq n/2$. Legyen $\mathcal{H}$ egy k uniform metsző halmazrendszer egy n elemű V csúcshalmaz felett. Ekkor

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

A valódi probléma

Jóval nehezebb kérdést kapunk, ha k uniform halmazrendserekkel dolgozunk.

$k > |V|/2$ esetben itt sem lesz gond: az összes k-as metsző rendszert alkot.

$k \leq |V|/2$ esetben azonban egy alaptétel válaszolja meg kérdésünket.

Tétel (Erdős—Ko—Rado-tétel)

Legyen $k \leq n/2$. Legyen $\mathcal{H}$ egy k uniform metsző halmazrendszer egy n elemű V csúcshalmaz felett. Ekkor

$$|\mathcal{H}| \leq \binom{n-1}{k-1}$$

Becslésünk a lehető legjobb, amit egy x elemet tartalmazó összes k elemű halmaz mutat.

Körszerúen rendezett halmazok, ívek

Körszerúen rendezett halmazok, ívek

K-t alkossa egy kör n pontja.

Körszerűen rendezett halmazok, ívek

K-t alkossa egy kör n pontja. Ezen pontok között van egy óra mutató járása szerinti rákövetkezés, ami pontjaink egy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sorrendjét eredményezi, ahol az indexek aritmetikája modulo n értendő.

Körszerűen rendezett halmazok, ívek

K-t alkossa egy kör n pontja. Ezen pontok között van egy óra mutató járása szerinti rákövetkezés, ami pontjaink egy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sorrendjét eredményezi, ahol az indexek aritmetikája modulo n értendő.

$I \subset K = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ esetén azt mondjuk, hogy I az $[a, z]$ ív, ha I tartalmazza a-t és rákövetkezőit, z-ig bezárólag,

Körszerűen rendezett halmazok, ívek

K-t alkossa egy kör n pontja. Ezen pontok között van egy óra mutató járása szerinti rákövetkezés, ami pontjaink egy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sorrendjét eredményezi, ahol az indexek aritmetikája modulo n értendő.

$I \subset K = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ esetén azt mondjuk, hogy I az $[a, z]$ ív, ha I tartalmazza a-t és rákövetkezőit, z-ig bezárólag, azaz létezik $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ és $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $I = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+\ell-1}\}$.

Körszerúen rendezett halmazok, ívek

K-t alkossa egy kör n pontja. Ezen pontok között van egy óra mutató járása szerinti rákövetkezés, ami pontjaink egy $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ sorrendjét eredményezi, ahol az indexek aritmetikája modulo n értendő.

$I \subset K = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ esetén azt mondjuk, hogy I az $[a, z]$ ív, ha I tartalmazza a-t és rákövetkezőit, z-ig bezárólag, azaz létezik $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ és $\ell \in \{1, \ldots, n\}$, hogy $I = \{v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+\ell-1}\}$.

$\ell = |I|$ az I ív hossza.

Körszerűen rendezett halmazok, ívek

K-t alkossa egy kör n pontja. Ezen pontok között van egy óra mutató járása szerinti rákövetkezés, ami pontjaink egy $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ sorrendjét eredményezi, ahol az indexek aritmetikája modulo n értendő.

$I \subset K = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ esetén azt mondjuk, hogy I az $[a, z]$ ív, ha I tartalmazza a-t és rákövetkezőit, z-ig bezárólag, azaz létezik $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ és $\ell \in \{1, \dots, n\}$, hogy $I = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+\ell-1}\}$.

$\ell = |I|$ az I ív hossza.

Hány k hosszú ív választható ki úgy, hogy metsző rendszert alkossanak?

Megoldás

Megoldás

k ív kiválasztható (például $[a_1, a_k], [a_2, a_k], \ldots, [a_k, a_{2k-1}]$), több nem.

Megoldás

k ív kiválasztható (például $[a_1, a_k], [a_2, a_k], \ldots, [a_k, a_{2k-1}]$), több nem.

Valóban:

Megoldás

k ív kiválasztható (például $[a_1, a_k], [a_2, a_k], \ldots, [a_k, a_{2k-1}]$), több nem.

Valóban: Ha $I = [a_i, \ldots, a_{i+k-1}]$ egy ív rendszerünkből, akkor a többi ívünk mindegyik metszi I-t.

Megoldás

k ív kiválasztható (például $[a_1, a_k], [a_2, a_k], \ldots, [a_k, a_{2k-1}]$), több nem.

Valóban: Ha $I = [a_i, \ldots, a_{i+k-1}]$ egy ív rendszerünkből, akkor a többi ívünk mindegyik metszi I-t.

Az I-t metsző íveink $k-1$ komplementerpárba oszthatók: egy tipikus pár az a_j-ben végződő és a_{j+1}-ben kezdődő két ív. (Itt használjuk, hogy $2k \leq n$.)

Megoldás

k ív kiválasztható (például $[a_1, a_k], [a_2, a_k], \dots, [a_k, a_{2k-1}]$), több nem.

Valóban: Ha $I = [a_i, \dots, a_{i+k-1}]$ egy ív rendszerünkből, akkor a többi ívünk mindegyik metszi I-t.

Az I-t metsző íveink $k-1$ komplementerpárba oszthatók: egy tipikus pár az a_j-ben végződő és a_{j+1}-ben kezdődő két ív. (Itt használjuk, hogy $2k \leq n$.)

Így valóban nem lehet $1 + (k-1)$-nél több ívünk.

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer.

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer.

Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között.

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer.

Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között.

Számoljuk össze azon (π, E) párokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $\pi(E)$ egy ív.

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer.

Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között.

Számoljuk össze azon (π, E) párokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $\pi(E)$ egy ív. Az összeszámolást kétféleképpen végezzük el.

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer.

Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között.

Számoljuk össze azon (π, E) párokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $\pi(E)$ egy ív. Az összeszámolást kétféleképpen végezzük el.

Először adott E-hez nézzük meg hányféleképpen választható olyan π, hogy a megfelelő pár számolandó legyen.

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer.

Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között.

Számoljuk össze azon (π, E) párokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $\pi(E)$ egy ív. Az összeszámolást kétféleképpen végezzük el.

Először adott E-hez nézzük meg hányféleképpen választható olyan π, hogy a megfelelő pár számolandó legyen.

Egyszerű látni, hogy $\pi(E)$ egy k hosszú ív, amire n lehetőség van. Ennek lerögzítés után $k! \cdot (n-k)!$ darab jó bijekció lesz.

Katona Gyula bizonyítása a tételre

Legyen $\mathcal{H}$ egy k-uniform metsző halmazrendszer.

Legyen π egy bijekció V ($\mathcal{H}$ alaphalmaza) és az előző körszerűen rendezett K halmaz között.

Számoljuk össze azon (π, E) párokat, ahol $E \in \mathcal{H}$ és $\pi(E)$ egy ív. Az összeszámolást kétféleképpen végezzük el.

Először adott E-hez nézzük meg hányféleképpen választható olyan π, hogy a megfelelő pár számolandó legyen.

Egyszerű látni, hogy $\pi(E)$ egy k hosszú ív, amire n lehetőség van. Ennek lerögzítés után $k! \cdot (n-k)!$ darab jó bijekció lesz.

Az összes pár számára

$$\sum_{E \in \mathcal{H}} n \cdot k!(n-k)! = |\mathcal{H}| n \cdot k!(n-k)!$$

adódik.

A bizonyítás vége

A bizonyítás vége

Másodszor adott π-hez nézzük meg hány él vezet összeszámolandó párhoz.

A bizonyítás vége

Másodszor adott π-hez nézzük meg hány él vezet összeszámolandó párhoz.

Itt lesz hasznos a korábbi egyszerűsítés. Az alapján legfeljebb k-t kapunk.

A bizonyítás vége

Másodszor adott π-hez nézzük meg hány él vezet összeszámolandó párhoz.

Itt lesz hasznos a korábbi egyszerűsítés. Az alapján legfeljebb k-t kapunk.

Azaz az összes pár számára LEGFELJEBB

$$kn!$$

adódik.

A bizonyítás vége

Másodszor adott π-hez nézzük meg hány él vezet összeszámolandó párhoz.

Itt lesz hasznos a korábbi egyszerűsítés. Az alapján legfeljebb k-t kapunk.

Azaz az összes pár számára LEGFELJEBB

$$kn!$$

adódik.

A kétféle válasz összevetése rendezés után adja a tételt.

Szünet

Napraforgók

Napraforgók

Definíció

$H_1, \ldots, H_s$ egy *s szirmú napraforgó* (vagy Δ-rendszer), ha minden $i \neq j$ esetén $(i, j \in \{1, \ldots, s\})$ $H_i \cap H_j = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$. A $T = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$ halmazt a napraforgó *tányérjának* nevezzük.

Napraforgók

Definíció

$H_1, \ldots, H_s$ egy *s szirmú napraforgó* (vagy Δ-rendszer), ha minden $i \neq j$ esetén $(i, j \in \{1, \ldots, s\})$ $H_i \cap H_j = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$. A $T = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$ halmazt a napraforgó *tányérjának* nevezzük.

Így például s darab páronként diszjunkt halmaz rendszere s szirmú napraforgó.

Napraforgók

Definíció

$H_1, \ldots, H_s$ egy *s szirmú napraforgó* (vagy Δ-rendszer), ha minden $i \neq j$ esetén ($i, j \in \{1, \ldots, s\}$) $H_i \cap H_j = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$. A $T = \bigcap_{k=1}^{s} H_k$ halmazt a napraforgó *tányérjának* nevezzük.

Így például s darab páronként diszjunkt halmaz rendszere s szirmú napraforgó.

A napraforgók témakörének az alapkérdése az, hogy ha adott egy k-uniform halmazrendszer, amiben nincs s szirmú napraforgó, akkor annak legfeljebb hány éle lehet?

Erdős—Rado-tétel

Erdős—Rado-tétel

Erdős—Rado-tétel

Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz s szirmú napraforgót. Ekkor

$$|\mathcal{H}| \leq (s-1)^k k!.$$

Bizonyítás: Az indukció eleje

Bizonyítás: Az indukció eleje

k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk, mégpedig a tétel következő alakját: Ha $\mathcal{H}$ k-uniform és $|\mathcal{H}| > (s-1)^k k!$, akkor $\mathcal{H}$-ban van s szirmú napraforgó.

Bizonyítás: Az indukció eleje

k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk, mégpedig a tétel következő alakját: Ha $\mathcal{H}$ k-uniform és $|\mathcal{H}| > (s-1)^k k!$, akkor $\mathcal{H}$-ban van s szirmú napraforgó.

A $k = 1$ eset triviális, figyelembe véve, hogy egy 1-uniform halmazrendszer elemei diszjunkt egy-egy pontot tartalmazó élek és így bármelyik s él s szirmú napraforgót alkot.

Bizonyítás: Az indukció eleje

k szerinti teljes indukcióval bizonyítunk, mégpedig a tétel következő alakját: Ha $\mathcal{H}$ k-uniform és $|\mathcal{H}| > (s-1)^k k!$, akkor $\mathcal{H}$-ban van s szirmú napraforgó.

A $k = 1$ eset triviális, figyelembe véve, hogy egy 1-uniform halmazrendszer elemei diszjunkt egy-egy pontot tartalmazó élek és így bármelyik s él s szirmú napraforgót alkot.

Tegyük fel, hogy $(k-1)$-re igazoltuk az állítást. A k-ra való lépéshez szükség lesz a következő lemmára.

Bizonyítás: A Lemma

Bizonyítás: A Lemma

Lemma

Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer és $t \in \{2, 3, \ldots\}$. Ekkor a következők valamelyike teljesül:

Bizonyítás: A Lemma

Lemma

Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer és $t \in \{2, 3, \ldots\}$. Ekkor a következők valamelyike teljesül:

(i) létezik t diszjunkt él,

Bizonyítás: A Lemma

Lemma

Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer és $t \in \{2, 3, \ldots\}$. Ekkor a következők valamelyike teljesül:

(i) létezik t diszjunkt él,

(ii) van olyan $v \in V$, hogy v-n legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{(t-1)k}$ él halad át.

Bizonyítás: A Lemmából következik a Tétel

Bizonyítás: A Lemmából következik a Tétel

Alkalmazzuk $t = s$-re a lemmát.

Bizonyítás: A Lemmából következik a Tétel

Alkalmazzuk $t = s$-re a lemmát.

Ha *(i)* teljesül, akkor van s diszjunkt él, ami egy s szirmú napraforgót jelent.

Bizonyítás: A Lemmából következik a Tétel

Alkalmazzuk $t = s$-re a lemmát.

Ha *(i)* teljesül, akkor van s diszjunkt él, ami egy s szirmú napraforgót jelent.

Ha *(ii)* teljesül, akkor legyen $\widetilde{\mathcal{H}} = \{E \setminus \{v\} : v \in E \in \mathcal{H}\}$. (Vagyis a v-t tartalmazó élekből kivesszük v-t.)

Bizonyítás: A Lemmából következik a Tétel

Alkalmazzuk $t = s$-re a lemmát.

Ha *(i)* teljesül, akkor van s diszjunkt él, ami egy s szirmú napraforgót jelent.

Ha *(ii)* teljesül, akkor legyen $\widetilde{\mathcal{H}} = \{E \backslash \{v\} : v \in E \in \mathcal{H}\}$. (Vagyis a v-t tartalmazó élekből kivesszük v-t.)

Nyilvánvalóan $\widetilde{\mathcal{H}}$ $(k-1)$-uniform és

$$\widetilde{\mathcal{H}} \geq \frac{|\mathcal{H}|}{k(t-1)} > \frac{(s-1)^k k!}{k(s-1)} = (s-1)^{k-1}(k-1)!$$

Bizonyítás: A Lemmából következik a Tétel

Alkalmazzuk $t = s$-re a lemmát.

Ha *(i)* teljesül, akkor van s diszjunkt él, ami egy s szirmú napraforgót jelent.

Ha *(ii)* teljesül, akkor legyen $\widetilde{\mathcal{H}} = \{E \backslash \{v\} : v \in E \in \mathcal{H}\}$. (Vagyis a v-t tartalmazó élekből kivesszük v-t.)

Nyilvánvalóan $\widetilde{\mathcal{H}}$ $(k-1)$-uniform és

$$\widetilde{\mathcal{H}} \geq \frac{|\mathcal{H}|}{k(t-1)} > \frac{(s-1)^k k!}{k(s-1)} = (s-1)^{k-1}(k-1)!$$

Az indukciós feltevés alapján $\widetilde{\mathcal{H}}$-ban van s szirmú napraforgó, jelölje ezt $S_1, \ldots, S_s$. Ekkor $S_1 \cup \{v\}, \ldots, S_s \cup \{v\}$ s szirmú napraforgó $\mathcal{H}$-ban.

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel).

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Ha $\tau \geq t$, akkor következik *(i)*.

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Ha $\tau \geq t$, akkor következik *(i)*.

Ha $\tau < t$, akkor legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\tau} E_i$.

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Ha $\tau \geq t$, akkor következik *(i)*.

Ha $\tau < t$, akkor legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\tau} E_i$.

Nyilván $|A| = \tau k$, így létezik olyan $\widehat{A} \supseteq A$, hogy $|\widehat{A}| = (t-1)k$.

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Ha $\tau \geq t$, akkor következik *(i)*.

Ha $\tau < t$, akkor legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\tau} E_i$.

Nyilván $|A| = \tau k$, így létezik olyan $\widehat{A} \supseteq A$, hogy $|\widehat{A}| = (t-1)k$.

Legyen $v \in \widehat{A}$ olyan csúcs, amin maximális számú él halad át.

Bizonyítás: A Lemma bizonyítása

Válasszunk maximális számú páronként diszjunkt élt (vagyis minden élnek legyen nemüres a metszete valamely kiválasztot éllel). Legyenek ezek $E_1, E_2, \ldots, E_\tau$.

Ha $\tau \geq t$, akkor következik *(i)*.

Ha $\tau < t$, akkor legyen $A = \bigcup_{i=1}^{\tau} E_i$.

Nyilván $|A| = \tau k$, így létezik olyan $\widehat{A} \supseteq A$, hogy $|\widehat{A}| = (t-1)k$.

Legyen $v \in \widehat{A}$ olyan csúcs, amin maximális számú él halad át. A skatulyelv alapján ezen a v-n legalább $\frac{|\mathcal{H}|}{|\widehat{A}|}$ él halad át, tehát ekkor *(ii)* teljesül.

Megjegyzések

Megjegyzések

A tétel $s = 3$ esetén $2^k k!$-t ad felső becslésként az élek számára. Ez exponenciálisnál gyorsabb növekedésű becslés. A legjobb konstrukció exponenciális sok k-élt tartalmaz.

Megjegyzések

A tétel $s = 3$ esetén $2^k k!$-t ad felső becslésként az élek számára. Ez exponenciálisnál gyorsabb növekedésű becslés. A legjobb konstrukció exponenciális sok k-élt tartalmaz.

Konstrukció: Nincs három szirmú napraforgó

Legyen $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \dot\cup \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. $\mathcal{H}$ tartalmazza azokat az éleket, amelyek minden $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ halmazt pontosan egy elemben metszenek. Könnyű látni, hogy $\mathcal{H}$ egy 2^k élű k uniform halmazrendszer.

Megjegyzések

A tétel $s = 3$ esetén $2^k k!$-t ad felső becslésként az élek számára. Ez exponenciálisnál gyorsabb növekedésű becslés. A legjobb konstrukció exponenciális sok k-élt tartalmaz.

Konstrukció: Nincs három szirmú napraforgó

Legyen $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \dot{\cup} \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$. $\mathcal{H}$ tartalmazza azokat az éleket, amelyek minden $\{a_i, b_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ halmazt pontosan egy elemben metszenek. Könnyű látni, hogy $\mathcal{H}$ egy 2^k élű k uniform halmazrendszer.

Rao, Alweiss–Lovett–Wu–Zhang 2019

Legyen $\mathcal{H}$ k-uniform halmazrendszer, ami nem tartalmaz s szirmú napraforgót. Ekkor

$$|\mathcal{H}| \leq \mathcal{O}((s \log(sk))^k).$$

Szünet

λ-metsző halmazrendszerek

λ-metsző halmazrendszerek

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ halmazrenszer V felett. $\mathcal{H}$ λ-metsző, ha tetszőleges különböző $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $|A \cap B| = \lambda$.

λ-metsző halmazrendszerek

Definíció

Egy $\mathcal{H}$ halmazrenszer V felett. $\mathcal{H}$ λ-metsző, ha tetszőleges különböző $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $|A \cap B| = \lambda$.

Természetes az alapkérdés: maximum hány él lehet egy λ-metszó hamazrendszerben?

$\lambda = 0$ eset

$\lambda = 0$ eset

Példa

Legyen $\lambda = 0$ és $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{v_1\}, \ldots, \{v_n\}\}$.

$\lambda = 0$ eset

Példa

Legyen $\lambda = 0$ és $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{v_1\}, \ldots, \{v_n\}\}$.

Könnyen belátható, hogy $|V| = n$ és $\lambda = 0$ esetén ez a legnagyobb halmazrendszer ami 0-metsző.

$\lambda = 0$ eset

Példa

Legyen $\lambda = 0$ és $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{v_1\}, \ldots, \{v_n\}\}$.

Könnyen belátható, hogy $|V| = n$ és $\lambda = 0$ esetén ez a legnagyobb halmazrendszer ami 0-metsző.

A továbbiakban $\lambda \geq 1$.

Példák

Példák

Példa

$\lambda = 1$,
$V = \{\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, \{v_1, v_n\}, \{v_2, v_n\}, \{v_3, v_n\}, \ldots \{v_{n-1}, v_n\}\}$

Példák

Példa

$\lambda = 1$,
$V = \{\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, \{v_1, v_n\}, \{v_2, v_n\}, \{v_3, v_n\}, \ldots \{v_{n-1}, v_n\}\}$

Példa: $\lambda = 1$ és a Fano-sík

Hét pontunk van $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7\}$ és
$\mathcal{H} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_3, P_4, P_5\}, \{P_1, P_5, P_6\}, \{P_1, P_4, P_7\}, \{P_3, P_6, P_7\}, \{P_2, P_5, P_7\}, \{P_2, P_4, P_6\}\}$.

Példák

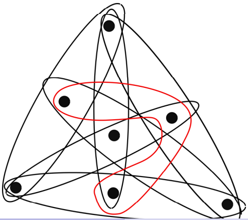
Példa

$\lambda = 1$,

$V = \{\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}, \{v_1, v_n\}, \{v_2, v_n\}, \{v_3, v_n\}, \ldots \{v_{n-1}, v_n\}\}$

Példa: $\lambda = 1$ és a Fano-sík

Hét pontunk van $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_7\}$ és
$\mathcal{H} = \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_3, P_4, P_5\}, \{P_1, P_5, P_6\}, \{P_1, P_4, P_7\}, \{P_3, P_6, P_7\}, \{P_2, P_5, P_7\}, \{P_2, P_4, P_6\}\}$.



Az alaptétel

Az alaptétel

Tétel

Legyen $\lambda \geq 1$ és $\mathcal{F}$ egy λ-metsző halmazrendszer egy V alaphalmaz fölött. Ekkor

$$|\mathcal{F}| \leq |V|.$$

Bizonyítás kezdete

Bizonyítás kezdete

Ha van olyan él $\mathcal{F}$-ben, amely elemszáma kisebb mint λ, akkor más él nem is lehet $\mathcal{F}$-ben, az állítás triviális.

Bizonyítás kezdete

Ha van olyan él $\mathcal{F}$-ben, amely elemszáma kisebb mint λ, akkor más él nem is lehet $\mathcal{F}$-ben, az állítás triviális.

Ha van olyan F él, amely elemszáma éppen λ, akkor minden más él tartalmazza F-et.

Bizonyítás kezdete

Ha van olyan él $\mathcal{F}$-ben, amely elemszáma kisebb mint λ, akkor más él nem is lehet $\mathcal{F}$-ben, az állítás triviális.

Ha van olyan F él, amely elemszáma éppen λ, akkor minden más él tartalmazza F-et. A többi E él esetén az $E \setminus F$ halmazok páronként diszjunkt, nem üres részhalmazai $V \setminus F$-nek.

Bizonyítás kezdete

Ha van olyan él $\mathcal{F}$-ben, amely elemszáma kisebb mint λ, akkor más él nem is lehet $\mathcal{F}$-ben, az állítás triviális.

Ha van olyan F él, amely elemszáma éppen λ, akkor minden más él tartalmazza F-et. A többi E él esetén az $E \setminus F$ halmazok páronként diszjunkt, nem üres részhalmazai $V \setminus F$-nek. Így legfeljebb $|V| - |F|$ ilyen halmaz lehet.

Bizonyítás kezdete

Ha van olyan él $\mathcal{F}$-ben, amely elemszáma kisebb mint λ, akkor más él nem is lehet $\mathcal{F}$-ben, az állítás triviális.

Ha van olyan F él, amely elemszáma éppen λ, akkor minden más él tartalmazza F-et. A többi E él esetén az $E \setminus F$ halmazok páronként diszjunkt, nem üres részhalmazai $V \setminus F$-nek. Így legfeljebb $|V| - |F|$ ilyen halmaz lehet. Az összes él száma legfeljebb $1 + (|V| - \lambda) \leq |V|$.

Bizonyítás kezdete

Ha van olyan él $\mathcal{F}$-ben, amely elemszáma kisebb mint λ, akkor más él nem is lehet $\mathcal{F}$-ben, az állítás triviális.

Ha van olyan F él, amely elemszáma éppen λ, akkor minden más él tartalmazza F-et. A többi E él esetén az $E \setminus F$ halmazok páronként diszjunkt, nem üres részhalmazai $V \setminus F$-nek. Így legfeljebb $|V| - |F|$ ilyen halmaz lehet. Az összes él száma legfeljebb $1 + (|V| - \lambda) \leq |V|$.

A továbbiakban feltesszük, hogy minden él több mint λ (legalább $\lambda + 1$) elemű.

Lineáris algebra

Lineáris algebra

Egy $F \in \mathcal{F}$ esetén χ_F az $F \subset V$ halmaz karakterisztikus vektora ($\chi_F \in \mathbb{R}^V \equiv \mathbb{R}^n$). Belátjuk, hogy a χ_F vektorok ($F \in \mathcal{F}$) lineárisan függetlenek. Ebből nyilván következik az állítás.

Lineáris algebra

Egy $F \in \mathcal{F}$ esetén χ_F az $F \subset V$ halmaz karakterisztikus vektora ($\chi_F \in \mathbb{R}^V \equiv \mathbb{R}^n$). Belátjuk, hogy a χ_F vektorok ($F \in \mathcal{F}$) lineárisan függetlenek. Ebből nyilván következik az állítás.

Legyen $M_{\mathcal{F}}$ az a mátrix, amely sorait a χ_F ($F \in \mathcal{F}$) vektorok alkotják. Mérete $|\mathcal{F}| \times |V|$.

Lineáris algebra

Egy $F \in \mathcal{F}$ esetén χ_F az $F \subset V$ halmaz karakterisztikus vektora ($\chi_F \in \mathbb{R}^V \equiv \mathbb{R}^n$). Belátjuk, hogy a χ_F vektorok ($F \in \mathcal{F}$) lineárisan függetlenek. Ebből nyilván következik az állítás.

Legyen $M_\mathcal{F}$ az a mátrix, amely sorait a χ_F ($F \in \mathcal{F}$) vektorok alkotják. Mérete $|\mathcal{F}| \times |V|$.

Mi lesz az $M_\mathcal{F} \cdot M_\mathcal{F}^T$ mátrix?

Lineáris algebra

Egy $F \in \mathcal{F}$ esetén χ_F az $F \subset V$ halmaz karakterisztikus vektora ($\chi_F \in \mathbb{R}^V \equiv \mathbb{R}^n$). Belátjuk, hogy a χ_F vektorok ($F \in \mathcal{F}$) lineárisan függetlenek. Ebből nyilván következik az állítás.

Legyen $M_{\mathcal{F}}$ az a mátrix, amely sorait a χ_F ($F \in \mathcal{F}$) vektorok alkotják. Mérete $|\mathcal{F}| \times |V|$.

Mi lesz az $M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ mátrix?

A mátrix elemei a $\chi_F \chi_{F'} = |F \cap F'|$ skalárszorzatok lesznek.

Lineáris algebra

Egy $F \in \mathcal{F}$ esetén χ_F az $F \subset V$ halmaz karakterisztikus vektora ($\chi_F \in \mathbb{R}^V \equiv \mathbb{R}^n$). Belátjuk, hogy a χ_F vektorok ($F \in \mathcal{F}$) lineárisan függetlenek. Ebből nyilván következik az állítás.

Legyen $M_{\mathcal{F}}$ az a mátrix, amely sorait a χ_F ($F \in \mathcal{F}$) vektorok alkotják. Mérete $|\mathcal{F}| \times |V|$.

Mi lesz az $M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ mátrix?

A mátrix elemei a $\chi_F \chi_{F'} = |F \cap F'|$ skalárszorzatok lesznek. Mivel $\mathcal{F}$ egy λ-metsző halmazrendszer, ezért a főatlón kívül λ-k szerepelnek.

Lineáris algebra

Egy $F \in \mathcal{F}$ esetén χ_F az $F \subset V$ halmaz karakterisztikus vektora ($\chi_F \in \mathbb{R}^V \equiv \mathbb{R}^n$). Belátjuk, hogy a χ_F vektorok ($F \in \mathcal{F}$) lineárisan függetlenek. Ebből nyilván következik az állítás.

Legyen $M_\mathcal{F}$ az a mátrix, amely sorait a χ_F ($F \in \mathcal{F}$) vektorok alkotják. Mérete $|\mathcal{F}| \times |V|$.

Mi lesz az $M_\mathcal{F} \cdot M_\mathcal{F}^\intercal$ mátrix?

A mátrix elemei a $\chi_F \chi_{F'} = |F \cap F'|$ skalárszorzatok lesznek. Mivel $\mathcal{F}$ egy λ-metsző halmazrendszer, ezért a főatlón kívül λ-k szerepelnek. A főátlóban éleink méretei szerepelnek.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ $(m = |\mathcal{F}|)$.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\intercal}$

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ ($m = |\mathcal{F}|$).

$$\begin{pmatrix} |A_1| & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & |A_2| & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & |A_3| & \ldots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & |A_{m-1}| & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & |A_m| \end{pmatrix}$$

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\intercal}$

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ $(m = |\mathcal{F}|)$.

$$\begin{pmatrix} |A_1| & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & |A_2| & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & |A_3| & \ldots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & |A_{m-1}| & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & |A_m| \end{pmatrix}$$

Belátjuk, hogy ezen mátrix sorai lineárisan függőek.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ $(m = |\mathcal{F}|)$.

$$\begin{pmatrix} |A_1| & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & |A_2| & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & |A_3| & \ldots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & |A_{m-1}| & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & |A_m| \end{pmatrix}$$

Belátjuk, hogy ezen mátrix sorai lineárisan függőek. Ebből következik az állítás.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\intercal}$

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ ($m = |\mathcal{F}|$).

$$\begin{pmatrix} |A_1| & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & |A_2| & \lambda & \ldots & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & |A_3| & \ldots & \lambda & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & |A_{m-1}| & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda & |A_m| \end{pmatrix}$$

Belátjuk, hogy ezen mátrix sorai lineárisan függőek. Ebből következik az állítás.

Valóban χ_F-ek (azaz $M_{\mathcal{F}}$ sorai) közötti nem triviális lineáris összefüggés öröklődik $M_{\mathcal{F}} M_{\mathcal{F}}^{\intercal}$ soraira is.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\intercal}$ sorai lineárisan függetlenek

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ sorai lineárisan függetlenek

Vegyük a fenti mátrix sorainak egy lineáris kombinációját (az i-edik sor együtthatója legyen α_i).

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\intercal}$ sorai lineárisan függetlenek

Vegyük a fenti mátrix sorainak egy lineáris kombinációját (az i-edik sor együtthatója legyen α_i). A lineáris kombináció j-edik komponenese:

$$\begin{aligned}\alpha_j|A_j| + \sum_{i:i\neq j}\alpha_i\lambda =& \alpha_j|A_j| - \alpha_j\lambda + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda = \alpha_j(|A_j| - \lambda) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda \\ =& \alpha_j(|A_j| - \lambda) + \Lambda.\end{aligned}$$

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\intercal}$ sorai lineárisan függetlenek

Vegyük a fenti mátrix sorainak egy lineáris kombinációját (az i-edik sor együtthatója legyen α_i). A lineáris kombináció j-edik komponenese:

$$\begin{aligned}\alpha_j|A_j| + \sum_{i:i\neq j}\alpha_i\lambda =& \alpha_j|A_j| - \alpha_j\lambda + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda = \alpha_j(|A_j|-\lambda) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda \\ =& \alpha_j(|A_j|-\lambda) + \Lambda.\end{aligned}$$

Ebből, ha a 0-vektort kombináltuk ki, akkor

$$\alpha_j = \frac{-\Lambda}{|A_j|-\lambda}.$$

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ sorai lineárisan függetlenek

Vegyük a fenti mátrix sorainak egy lineáris kombinációját (az i-edik sor együtthatója legyen α_i). A lineáris kombináció j-edik komponenese:

$$\begin{aligned}\alpha_j|A_j| + \sum_{i:i\neq j} \alpha_i\lambda =& \alpha_j|A_j| - \alpha_j\lambda + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\lambda = \alpha_j(|A_j| - \lambda) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\lambda \\ =& \alpha_j(|A_j| - \lambda) + \Lambda.\end{aligned}$$

Ebből, ha a 0-vektort kombináltuk ki, akkor

$$\alpha_j = \frac{-\Lambda}{|A_j| - \lambda}.$$

A 0-vektor kikombinálásánál nyilván nem használhattunk olyan együtthatókat, amelyek előjele ugyanaz volt. Így szükségszerű (a törtek nevezőiről tudjuk, hogy pozitívak), hogy $\Lambda = 0$.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\mathsf{T}}$ sorai lineárisan függetlenek

Vegyük a fenti mátrix sorainak egy lineáris kombinációját (az i-edik sor együtthatója legyen α_i). A lineáris kombináció j-edik komponenese:

$$\begin{aligned}\alpha_j|A_j| + \sum_{i:i\neq j}\alpha_i\lambda =& \alpha_j|A_j| - \alpha_j\lambda + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda = \alpha_j(|A_j|-\lambda) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda \\ =& \alpha_j(|A_j|-\lambda) + \Lambda.\end{aligned}$$

Ebből, ha a 0-vektort kombináltuk ki, akkor

$$\alpha_j = \frac{-\Lambda}{|A_j|-\lambda}.$$

A 0-vektor kikombinálásánál nyilván nem használhattunk olyan együtthatókat, amelyek előjele ugyanaz volt. Így szükségszerű (a törtek nevezőiről tudjuk, hogy pozitívak), hogy $\Lambda = 0$. Így minden α_i értéke is 0.

$M_{\mathcal{F}} \cdot M_{\mathcal{F}}^{\intercal}$ sorai lineárisan függetlenek

Vegyük a fenti mátrix sorainak egy lineáris kombinációját (az i-edik sor együtthatója legyen α_i). A lineáris kombináció j-edik komponenese:

$$\begin{aligned}\alpha_j|A_j| + \sum_{i:i\neq j}\alpha_i\lambda =& \alpha_j|A_j| - \alpha_j\lambda + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda = \alpha_j(|A_j|-\lambda) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\lambda \\ =& \alpha_j(|A_j|-\lambda) + \Lambda.\end{aligned}$$

Ebből, ha a 0-vektort kombináltuk ki, akkor

$$\alpha_j = \frac{-\Lambda}{|A_j|-\lambda}.$$

A 0-vektor kikombinálásánál nyilván nem használhattunk olyan együtthatókat, amelyek előjele ugyanaz volt. Így szükségszerű (a törtek nevezőiről tudjuk, hogy pozitívak), hogy $\Lambda = 0$. Így minden α_i értéke is 0. Ez éppen a sorok lineáris függetlensége.

Lineáris algebrai módszer

Lineáris algebrai módszer

Az Erdős—Ko—Rado-tétel és a Fisher-egyenlőtlenség is „metszet-feltételekkel” rendelkező halmazrendszerekről szóló tétel.

Lineáris algebrai módszer

Az Erdős—Ko—Rado-tétel és a Fisher-egyenlőtlenség is „metszet-feltételekkel” rendelkező halmazrendszerekről szóló tétel.

A témakör nagyon virágzó, sok fontos eredmény született az ilyen kérdések vizsgálatából.

Lineáris algebrai módszer

Az Erdős—Ko—Rado-tétel és a Fisher-egyenlőtlenség is „metszet-feltételekkel” rendelkező halmazrendszerekről szóló tétel.

A témakör nagyon virágzó, sok fontos eredmény született az ilyen kérdések vizsgálatából.

Ezen tételek a kombinatorikán kívül is nagy hatásúak.

Lineáris algebrai módszer

Az Erdős—Ko—Rado-tétel és a Fisher-egyenlőtlenség is „metszet-feltételekkel" rendelkező halmazrendszerekről szóló tétel.

A témakör nagyon virágzó, sok fontos eredmény született az ilyen kérdések vizsgálatából.

Ezen tételek a kombinatorikán kívül is nagy hatásúak.

A kombinatorikában különösen jelentős ezen lineáris algebrai módszer (például a Fisher-egyenlőtlenség bizonyítása). Egy fontos bizonyítási technikává vált.

Szünet

Nyom

Nyom

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer V felett, A pedig V egy részhalmaza. Ekkor legyen $Tr_A\mathcal{H} = \{E \cap A : E \in \mathcal{H}\}$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer A-ra vett *nyoma*.

Nyom

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer V felett, A pedig V egy részhalmaza. Ekkor legyen $Tr_A\mathcal{H} = \{E \cap A : E \in \mathcal{H}\}$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer A-ra vett *nyoma*.

Világos, hogy $Tr_A\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Abban az esetben, amikor $Tr_A\mathcal{H} = \mathcal{P}(A)$, azt mondjuk, hogy A *telített*.

Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzió

Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzió

A $\mathcal{H}$ halmazrendszer *Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenziója*

$$\dim_{VCs}\mathcal{H} = \max\{|A| : \ A \subset V \text{ telített}\}.$$

Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenzió

A $\mathcal{H}$ halmazrendszer *Vapnyik—Cservonyenkisz-dimenziója*

$$\dim_{VCs}\mathcal{H} = \max\{|A| : \ A \subset V \text{ telített}\}.$$

(Vapnyik—Cservonyenkisz)

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ felett, t pedig pozitív egész úgy, hogy teljesüljön $\mathcal{H}$ elemszámára a $|\mathcal{H}| > 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{t-1}$ egyenlőtlenség. Ekkor $\dim_{VCs}\mathcal{H} \geq t$. Más szavakkal megfogalmazva létezik t elemű telített halmaz $\mathcal{H}$-ban.

A korlát éles

A korlát éles

Tekintsük azt a halmazrendszert, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{H} = \{R \subseteq [n] : |R| < t\}$.

A korlát éles

Tekintsük azt a halmazrendszert, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{H} = \{R \subseteq [n] : |R| < t\}$.

Világos, hogy

$$|\mathcal{H}| = 1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{t-1},$$

A korlát éles

Tekintsük azt a halmazrendszert, amelyre teljesül, hogy $\mathcal{H} = \{R \subseteq [n] : |R| < t\}$.

Világos, hogy

$$|\mathcal{H}| = 1 + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{t-1},$$

Ugyanakkor $\mathcal{H}$-ban nincs t elemű telített A halmaz, ehhez ugyanis $Tr_A\mathcal{H}$ definíciójára gondolva A-t tartalmazó él megléte szükséges feltétele A telítettségének, de $|A| = t$, így ez a feltétel nem teljesül.

1. Bizonyítás

1. Bizonyítás

n szerinti teljes indukcióval dolgozunk.

1. Bizonyítás

n szerinti teljes indukcióval dolgozunk.

$n = 1$-re triviálisan igaz a tétel állítása.

1. Bizonyítás

n szerinti teljes indukcióval dolgozunk.

$n = 1$-re triviálisan igaz a tétel állítása.

Felhasználva azt az ismert összefüggést, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, adódik a feltételből:

$$|\mathcal{H}| > \left[\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{t-2}\right] + \left[1 + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{t-1}\right].$$

1. Bizonyítás

n szerinti teljes indukcióval dolgozunk.

$n = 1$-re triviálisan igaz a tétel állítása.

Felhasználva azt az ismert összefüggést, hogy $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, adódik a feltételből:

$$|\mathcal{H}| > \left[\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{t-2}\right] + \left[1 + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{n-1}{t-1}\right].$$

Jelölje L_1 és L_2 a két fenti szögletes zárójeles kifejezést.

1. Bizonyítás (folytatás)

1. Bizonyítás (folytatás)

Vezessük be a következő jelöléseket:
$\mathcal{H}_1 = \{E \in \mathcal{H} : n \notin E, E \cup \{n\} \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1$, és legyen $\widetilde{\mathcal{H}_2} = \{E \backslash \{n\} : E \in \mathcal{H}_2\}$.

1. Bizonyítás (folytatás)

Vezessük be a következő jelöléseket:
$\mathcal{H}_1 = \{E \in \mathcal{H} : n \notin E, E \cup \{n\} \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1$, és legyen $\widetilde{\mathcal{H}_2} = \{E \backslash \{n\} : E \in \mathcal{H}_2\}$.

Világos, hogy $\mathcal{H}_1, \widetilde{\mathcal{H}_2}$ halmazrendszer $[n-1]$ felett.

1. Bizonyítás (folytatás)

Vezessük be a következő jelöléseket:
$\mathcal{H}_1 = \{E \in \mathcal{H} : n \notin E, E \cup \{n\} \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1$, és legyen $\widetilde{\mathcal{H}_2} = \{E \setminus \{n\} : E \in \mathcal{H}_2\}$.

Világos, hogy $\mathcal{H}_1, \widetilde{\mathcal{H}_2}$ halmazrendszer $[n-1]$ felett.

Tudjuk, hogy

$$|\mathcal{H}_1| + |\mathcal{H}_2| = |\mathcal{H}| > L_1 + L_2$$

1. Bizonyítás (folytatás)

Vezessük be a következő jelöléseket:
$\mathcal{H}_1 = \{E \in \mathcal{H} : n \notin E, E \cup \{n\} \in \mathcal{H}\}$, $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} - \mathcal{H}_1$, és legyen $\widetilde{\mathcal{H}_2} = \{E \setminus \{n\} : E \in \mathcal{H}_2\}$.

Világos, hogy $\mathcal{H}_1, \widetilde{\mathcal{H}_2}$ halmazrendszer $[n-1]$ felett.

Tudjuk, hogy

$$|\mathcal{H}_1| + |\mathcal{H}_2| = |\mathcal{H}| > L_1 + L_2$$

Vagy *(i)* $|\mathcal{H}_1| > L_1$, vagy *(ii)* $|\mathcal{H}_2| = |\widetilde{\mathcal{H}_2}| > L_2$ teljesül.

1. Bizonyítás (folytatás)

1. Bizonyítás (folytatás)

Ha *(i)* igaz, akkor az indukciós feltevés alapján létezik $A \subseteq [n-1]$ $t-1$ elemű $\mathcal{H}_1$-re nézve telített halmaz. Nem nehéz látni (mivel $E \in \mathcal{H}_1$ esetén E és $E \cup \{n\}$ is él $\mathcal{H}$-ban), hogy $A \cup \{n\}$ ekkor telített lesz $\mathcal{H}$-ra nézve (és persze t elemű).

1. Bizonyítás (folytatás)

Ha *(i)* igaz, akkor az indukciós feltevés alapján létezik $A \subseteq [n-1]$ $t-1$ elemű $\mathcal{H}_1$-re nézve telített halmaz. Nem nehéz látni (mivel $E \in \mathcal{H}_1$ esetén E és $E \cup \{n\}$ is él $\mathcal{H}$-ban), hogy $A \cup \{n\}$ ekkor telített lesz $\mathcal{H}$-ra nézve (és persze t elemű).

Ha *(ii)* igaz, akkor az indukciós feltevés szerint van $A \subseteq [n-1]$ t elemű $\widetilde{\mathcal{H}_2}$-re nézve telített halmaz. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy minden $R \subseteq A$-hoz létezik $E \in \widetilde{\mathcal{H}_2}$, amire $E \cap A = R$. Viszont minden $E \in \widetilde{\mathcal{H}_2}$-hoz létezik egyértelműen egy $E_0 \in \mathcal{H}_2$: ez vagy E, vagy $E \cup \{n\}$. Mindkét esetben $E_0 \cap A = R$, vagyis A $\mathcal{H}$-ra nézve is telített. $\blacksquare$

2. Bizonyítás

2. Bizonyítás

Nevezzünk egy halmazrendszert *lefelé zártnak*, ha $E \in \mathcal{H}$ és $F \subseteq E$, akkor $F \in \mathcal{H}$ is teljesül.

2. Bizonyítás

Nevezzünk egy halmazrendszert *lefelé zártnak*, ha $E \in \mathcal{H}$ és $F \subseteq E$, akkor $F \in \mathcal{H}$ is teljesül.

Ha $\mathcal{H}$ lefelé zárt, akkor a tétel állítása egyszerűen következik: a feltételek miatt van $\mathcal{H}$-ban legalább t elemű él, ugyanakkor pedig a lefelé zártság miatt minden él telített.

2. Bizonyítás

Nevezzünk egy halmazrendszert *lefelé zártnak*, ha $E \in \mathcal{H}$ és $F \subseteq E$, akkor $F \in \mathcal{H}$ is teljesül.

Ha $\mathcal{H}$ lefelé zárt, akkor a tétel állítása egyszerűen következik: a feltételek miatt van $\mathcal{H}$-ban legalább t elemű él, ugyanakkor pedig a lefelé zártság miatt minden él telített.

Definiáljuk a következő S_i leképezést: $i \in V$, $E \in \mathcal{H}$-ra $S_i E = E \backslash \{i\}$ ha $E \backslash \{i\} \notin \mathcal{H}$ és $S_i E = E$ különben. Legyen továbbá $S_i \mathcal{H} = \{S_i E : E \in \mathcal{H}\}$.

2. Bizonyítás (folytatás)

2. Bizonyítás (folytatás)

Vegyük észre, hogy $|\mathcal{H}| = |S_i\mathcal{H}|$ a definícióból egyből következő módon.

2. Bizonyítás (folytatás)

Vegyük észre, hogy $|\mathcal{H}| = |S_i\mathcal{H}|$ a definícióból egyből következő módon.

Nem nehéz látni azt sem, hogy ha $\mathcal{H}$ nem lefelé zárt, akkor van olyan i, hogy $S_i\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$. (Ha nem lefelé zárt, akkor van olyan E és F, hogy $F \subset E$ és $E \in \mathcal{H}$ de $F \notin \mathcal{H}$. Ekkor tetszőleges $i \in E \backslash F$ megfelel.)

2. Bizonyítás (folytatás)

Vegyük észre, hogy $|\mathcal{H}| = |S_i\mathcal{H}|$ a definícióból egyből következő módon.

Nem nehéz látni azt sem, hogy ha $\mathcal{H}$ nem lefelé zárt, akkor van olyan i, hogy $S_i\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$. (Ha nem lefelé zárt, akkor van olyan E és F, hogy $F \subset E$ és $E \in \mathcal{H}$ de $F \notin \mathcal{H}$. Ekkor tetszőleges $i \in E \setminus F$ megfelel.)

A harmadik észrevételt külön lemmaként is kimondjuk.

2. Bizonyítás (folytatás)

Vegyük észre, hogy $|\mathcal{H}| = |S_i\mathcal{H}|$ a definícióból egyből következő módon.

Nem nehéz látni azt sem, hogy ha $\mathcal{H}$ nem lefelé zárt, akkor van olyan i, hogy $S_i\mathcal{H} \neq \mathcal{H}$. (Ha nem lefelé zárt, akkor van olyan E és F, hogy $F \subset E$ és $E \in \mathcal{H}$ de $F \notin \mathcal{H}$. Ekkor tetszőleges $i \in E \setminus F$ megfelel.)

A harmadik észrevételt külön lemmaként is kimondjuk.

Lemma

$|Tr_A\mathcal{H}| \geq |Tr_A S_i\mathcal{H}|$ mindig teljesül.

Lemmából következik a tétel

Lemmából következik a tétel

Tetszőleges $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$-hez léteznek olyan $i_1, i_2, \ldots$ elemek, hogy $\mathcal{H}_k \neq \mathcal{H}_{k+1} = S_{i_k}\mathcal{H}_k$, vagyis iteráltan végrehajtjuk az S transzformációt úgy, hogy mindig változzon a halmazrendszerünk.

Lemmából következik a tétel

Tetszőleges $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$-hez léteznek olyan $i_1, i_2, \ldots$ elemek, hogy $\mathcal{H}_k \neq \mathcal{H}_{k+1} = S_{i_k}\mathcal{H}_k$, vagyis iteráltan végrehajtjuk az S transzformációt úgy, hogy mindig változzon a halmazrendszerünk.

Nyilván véges sok lépésben elakad a lánc, mert minden lépésben csökken az élek elemszámának az összege.

Lemmából következik a tétel

Tetszőleges $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$-hez léteznek olyan $i_1, i_2, \ldots$ elemek, hogy $\mathcal{H}_k \neq \mathcal{H}_{k+1} = S_{i_k}\mathcal{H}_k$, vagyis iteráltan végrehajtjuk az S transzformációt úgy, hogy mindig változzon a halmazrendszerünk.

Nyilván véges sok lépésben elakad a lánc, mert minden lépésben csökken az élek elemszámának az összege.

Legyen az utolsó halmazrendszer $\mathcal{H}_s$. Ez az eddigiek szerint lefelé zárt, és éleinek a száma teljesíti a tétel feltételét. Így van benne t elemű él, A. Ekkor A telített $\mathcal{H}_s$-re nézve, nyoma $2^{|A|}$ elemű. A lemma alapján A $\mathcal{H}_1$-re vett nyoma is legalább ennyi elemű, azaz A telített.

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_A S_i \mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Lemma bizonyítása

Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_A S_i \mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $i \in A$, akkor A részhalmazait állítsuk $(R, R \cup \{i\})$ párokba, ahol $i \notin R$. Ha egy E él A-beli nyoma az egyik párba esik, akkor $S_i E$ nyoma is ugyanehhez a párhoz tartozik.

Lemma bizonyítása

Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_A S_i \mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $i \in A$, akkor A részhalmazait állítsuk $(R, R \cup \{i\})$ párokba, ahol $i \notin R$. Ha egy E él A-beli nyoma az egyik párba esik, akkor $S_i E$ nyoma is ugyanehhez a párhoz tartozik.

Belátjuk, hogy minden pár hozzájárulása $Tr_A\mathcal{H}$-hoz legalább annyi, mint $Tr_A S_i \mathcal{H}$-hoz.

Lemma bizonyítása

Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_A S_i\mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $i \in A$, akkor A részhalmazait állítsuk $(R, R \cup \{i\})$ párokba, ahol $i \notin R$. Ha egy E él A-beli nyoma az egyik párba esik, akkor S_iE nyoma is ugyanehhez a párhoz tartozik.

Belátjuk, hogy minden pár hozzájárulása $Tr_A\mathcal{H}$-hoz legalább annyi, mint $Tr_A S_i\mathcal{H}$-hoz.

Egyedül az jelenthet problémát, ha R és $R \cup \{i\}$ is benne van $Tr_A S_i\mathcal{H}$-ban, de $Tr_A\mathcal{H}$-ban csak az egyikük szerepel.

Lemma bizonyítása

Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_A S_i\mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $i \in A$, akkor A részhalmazait állítsuk $(R, R \cup \{i\})$ párokba, ahol $i \notin R$. Ha egy E él A-beli nyoma az egyik párba esik, akkor S_iE nyoma is ugyanehhez a párhoz tartozik.

Belátjuk, hogy minden pár hozzájárulása $Tr_A\mathcal{H}$-hoz legalább annyi, mint $Tr_A S_i\mathcal{H}$-hoz.

Egyedül az jelenthet problémát, ha R és $R \cup \{i\}$ is benne van $Tr_A S_i\mathcal{H}$-ban, de $Tr_A\mathcal{H}$-ban csak az egyikük szerepel.

Azonnal látszik, hogy ez utóbbi szükségképpen $R \cup \{i\}$. Azonban ha R nem szerepel $Tr_A\mathcal{H}$-ban, akkor minden olyan E él, amelyre $E \cap A = R \cup \{i\}$, feltétlenül $S_iE = E\backslash\{i\}$.

Lemma bizonyítása

Ha $i \notin A$, akkor $Tr_A\mathcal{H} = Tr_A S_i\mathcal{H}$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $i \in A$, akkor A részhalmazait állítsuk $(R, R \cup \{i\})$ párokba, ahol $i \notin R$. Ha egy E él A-beli nyoma az egyik párba esik, akkor S_iE nyoma is ugyanehhez a párhoz tartozik.

Belátjuk, hogy minden pár hozzájárulása $Tr_A\mathcal{H}$-hoz legalább annyi, mint $Tr_A S_i\mathcal{H}$-hoz.

Egyedül az jelenthet problémát, ha R és $R \cup \{i\}$ is benne van $Tr_A S_i\mathcal{H}$-ban, de $Tr_A\mathcal{H}$-ban csak az egyikük szerepel.

Azonnal látszik, hogy ez utóbbi szükségképpen $R \cup \{i\}$. Azonban ha R nem szerepel $Tr_A\mathcal{H}$-ban, akkor minden olyan E él, amelyre $E \cap A = R \cup \{i\}$, feltétlenül $S_iE = E \setminus \{i\}$.

Ez ellentmond annak, hogy $R \cup \{i\} \in Tr_A S_i\mathcal{H}$ és így a lemmát is igazoltuk, teljessé téve a bizonyítást.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!