Ramsey-elmélet

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Ramsey-paraméter

Ramsey-paraméter

Definíció

Legyen $\text{Ramsey}(G) = \max\{\alpha(G), \omega(G)\}$, a G gráf Ramsey-paramétere.

Ramsey-paraméter

Definíció

Legyen $\text{Ramsey}(G) = \max\{\alpha(G), \omega(G)\}$, a G gráf Ramsey-paramétere.

A Ramsey-paraméter kissé más leírása: egy ponthalmazt homogénnek nevezünk, ha független vagy klikk. A Ramsey-paraméter értéke a legnagyobb homogén halmaz mérete.

Ramsey-paraméter

Definíció

Legyen $\text{Ramsey}(G) = \max\{\alpha(G), \omega(G)\}$, a G gráf Ramsey-paramétere.

A Ramsey-paraméter kissé más leírása: egy ponthalmazt homogénnek nevezünk, ha független vagy klikk. A Ramsey-paraméter értéke a legnagyobb homogén halmaz mérete.

Egy további nyelvezet: A gráf éleit színezzük zöldre, a nem szomszédos csúcsokat is kössük össze egy piros éllel. Így a V csúcshalmazon definiált teljes gráf éleinek egy 2-színezésével azonosítottuk G-t. Egy homogén csúcshalmaz egy olyan halmaz, amelyen belül minden él egyforma színű, idegen szóval monokromatikus.

Ramsey-algoritmus

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$, $\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$,
$\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$
$T \leftarrow N$ és $\overline{N}$ közül a nagyobb.

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$, $\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$
$T \leftarrow N$ és $\overline{N}$ közül a nagyobb. // $T = N \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy K-elem.

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$, $\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$
$T \leftarrow N$ és $\overline{N}$ közül a nagyobb. // $T = N \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy K-elem. $T = \overline{N} \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy F-elem.

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$, $\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$
$T \leftarrow N$ és $\overline{N}$ közül a nagyobb. // $T = N \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy K-elem. $T = \overline{N} \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy F-elem.
$F = \{x \in KF : x \text{ egy } F\text{-elem}\}$,

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$, $\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$
$T \leftarrow N$ és $\overline{N}$ közül a nagyobb. // $T = N \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy K-elem. $T = \overline{N} \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy F-elem.
$F = \{x \in KF : x \text{ egy } F\text{-elem}\}$, $K = \{x \in KF : x \text{ egy } K\text{-elem}\}$.

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$, $\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$
$T \leftarrow N$ és $\overline{N}$ közül a nagyobb. // $T = N \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy K-elem. $T = \overline{N} \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy F-elem.
$F = \{x \in KF : x \text{ egy } F\text{-elem}\}$, $K = \{x \in KF : x \text{ egy } K\text{-elem}\}$.
// $F \cap K = \{z\}$, ahol z az utolsónak kiválasztott elem. F független csúcshalmaz, K klikk.

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$,
$\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$
$T \leftarrow N$ és $\overline{N}$ közül a nagyobb. // $T = N \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy K-elem. $T = \overline{N} \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy F-elem.
$F = \{x \in KF : x \text{ egy } F\text{-elem}\}$, $K = \{x \in KF : x \text{ egy } K\text{-elem}\}$.
// $F \cap K = \{z\}$, ahol z az utolsónak kiválasztott elem. F független csúcshalmaz, K klikk.
Tisztítás, output$\leftarrow$ K és F közül a nagyobb.

Ramsey-algoritmus

Az alábbi egyszerű algoritmus egy nagy homogén halmazt határoz meg G-ben.

(Ramsey-algoritmus)

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy H homogén halmaz.
Inicializálás: $KF = \emptyset$, $T = V(G)$ // KF kiválasztott pontok egy halmaza. T a túlélő csúcsok halmaza
Amíg $T \neq \emptyset$ **Kiválasztási lépés:** Legyen $x \in T$ tetszőleges eddig túlélő csúcs. $KF \leftarrow KF \cup \{x\}$. $N := N_T(x) = \{s \in T : xs \in E\}$, $\overline{N} := \overline{N}_T(x) = \{s \in T : xs \notin E\} = T - \{x\} - N_T(x)$
$T \leftarrow N$ és $\overline{N}$ közül a nagyobb. // $T = N \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy K-elem. $T = \overline{N} \neq \emptyset$ esetén azt mondjuk x egy F-elem.
$F = \{x \in KF : x \text{ egy } F\text{-elem}\}$, $K = \{x \in KF : x \text{ egy } K\text{-elem}\}$.
// $F \cap K = \{z\}$, ahol z az utolsónak kiválasztott elem. F független csúcshalmaz, K klikk.
Tisztítás, output$\leftarrow$ K és F közül a nagyobb. // H homogén.

Az Ramsey-algoritmus analízise

Az Ramsey-algoritmus analízise

Lemma

Legyen G egy tetszőleges n pontú gráf. Legyen k a Ramsey-algoritmus által kiválasztott csúcsok száma. Legyen ℓ az output homogén halmaz mérete. Ekkor

$$k \geq \log_2 n, \qquad \ell \geq \frac{1}{2}\log_2 n.$$

Bizonyítás

Bizonyítás

Nyilván $\ell \geq \frac{k+1}{2}$. Így elég az első egyenlőtlenséget igazolni.

Bizonyítás

Nyilván $\ell \geq \frac{k+1}{2}$. Így elég az első egyenlőtlenséget igazolni.

Legyen T_i az i-edik csúcs kiválasztása előtt a T halmaz, míg legyen T_{i+1} a kiválasztás után update-elt T halmaz.

Bizonyítás

Nyilván $\ell \geq \frac{k+1}{2}$. Így elég az első egyenlőtlenséget igazolni.

Legyen T_i az i-edik csúcs kiválasztása előtt a T halmaz, míg legyen T_{i+1} a kiválasztás után update-elt T halmaz.

Könnyen látható, ha $|T_i| \geq 2^s$, akkor $|T_{i+1}| \geq 2^{s-1}$.

Bizonyítás

Nyilván $\ell \geq \frac{k+1}{2}$. Így elég az első egyenlőtlenséget igazolni.

Legyen T_i az i-edik csúcs kiválasztása előtt a T halmaz, míg legyen T_{i+1} a kiválasztás után update-elt T halmaz.

Könnyen látható, ha $|T_i| \geq 2^s$, akkor $|T_{i+1}| \geq 2^{s-1}$.

Ebből az állítás kiolvasható.

Következmény

Következmény

Következmény

Az előző lemma jelöléseit használva, ha $n = 4^e$, akkor $k \geq 2e$ és $\ell \geq e$.

Következmény

Következmény

Az előző lemma jelöléseit használva, ha $n = 4^e$, akkor $k \geq 2e$ és $\ell \geq e$.

Következmény

Egy 4^k pontú gráfban mindig van k elemű homogén halmaz.

Ramsey-számok

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális csúcsszám, hogy minden ilyen csúcsú gráfban legyen k elemű homogén halmaz.

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális csúcsszám, hogy minden ilyen csúcsú gráfban legyen k elemű homogén halmaz.

A fenti állítások alapján $R(k)$ jól definiált és $R(k) \leq 4^k$. A felső becslés egy exponenciális függvény, amely alapja 4, ezt mind a mai napig nem sikerült megjavítani.

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális csúcsszám, hogy minden ilyen csúcsú gráfban legyen k elemű homogén halmaz.

A fenti állítások alapján $R(k)$ jól definiált és $R(k) \leq 4^k$. A felső becslés egy exponenciális függvény, amely alapja 4, ezt mind a mai napig nem sikerült megjavítani.

Megemlítjük a legjobb alsó becslést is (ami szintén exponenciális), a valószínűségszámítási módszer egyik első alkalmazása Erdős Pál által.

Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális csúcsszám, hogy minden ilyen csúcsú gráfban legyen k elemű homogén halmaz.

A fenti állítások alapján $R(k)$ jól definiált és $R(k) \leq 4^k$. A felső becslés egy exponenciális függvény, amely alapja 4, ezt mind a mai napig nem sikerült megjavítani.

Megemlítjük a legjobb alsó becslést is (ami szintén exponenciális), a valószínűségszámítási módszer egyik első alkalmazása Erdős Pál által.

Tétel (Ramsey (1930) és Erdős tételei)

$$\sqrt{2}^k < R(k) < 4^k.$$

Ramsey-számok pontos értékei

Ramsey-számok pontos értékei

Az érdekes értékek $k \geq 3$ esetén vevődnek fel ($k = 1, 2$ esetén minden egy-, illetve kételemű halmaz homogén, azaz nyilván $R(1) = 1$ és $R(2) = 2$).

Ramsey-számok pontos értékei

Az érdekes értékek $k \geq 3$ esetén vevődnek fel ($k = 1, 2$ esetén minden egy-, illetve kételemű halmaz homogén, azaz nyilván $R(1) = 1$ és $R(2) = 2$).

Csupán néhány Ramsey-szám ismert: $R(3) = 6$, $R(4) = 18$. $R(5)$-ről annyi ismert, hogy $43 \leq R(5) \leq 49$.

Ramsey-számok pontos értékei

Az érdekes értékek $k \geq 3$ esetén vevődnek fel ($k = 1, 2$ esetén minden egy-, illetve kételemű halmaz homogén, azaz nyilván $R(1) = 1$ és $R(2) = 2$).

Csupán néhány Ramsey-szám ismert: $R(3) = 6$, $R(4) = 18$. $R(5)$-ről annyi ismert, hogy $43 \leq R(5) \leq 49$.

A $k = 10$ esetén ismereteink hiánya még látványosabb. Jelen pillanatban csak azt tudjuk, hogy $798 \leq R(10) \leq 23\,556$.

$R(3)$ alsó becslése, konstrukció

$R(3)$ alsó becslése, konstrukció

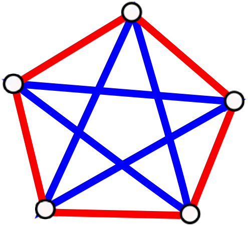
Lemma

$$R(3) > 5.$$

$R(3)$ alsó becslése, konstrukció

Lemma

$$R(3) > 5.$$



$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

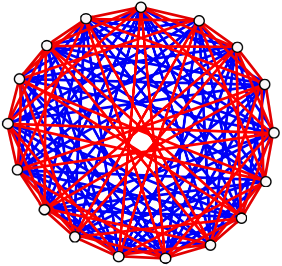
Tétel

$$R(4) > 17.$$

$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

Tétel

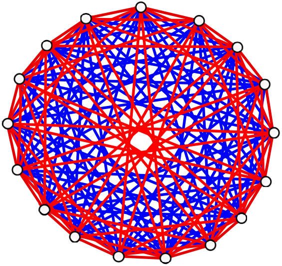
$$R(4) > 17.$$



$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

Tétel

$$R(4) > 17.$$



A csúcsok halmaza $Z_{17} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 16\}$. ij pontosan akkor piros, ha $i - j \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$, ahol a „számtan" a modulo 17 ($\mathbb{Z}_{17}$-beli aritmetika).

Erdős Pál és Szekeres György javítása Ramsey algoritmusán

Erdős Pál és Szekeres György javítása Ramsey algoritmusán

Ezzel javították a Ramsey-számok fenti becslését.

Erdős Pál és Szekeres György javítása Ramsey algoritmusán

Ezzel javították a Ramsey-számok fenti becslését.

Algoritmusuk képes bármilyen R csúcshalmaz esetén párhuzamosan kiszámolni egy $F(R)$ független ponthalmazt és egy $K(R)$ klikket.

Erdős Pál és Szekeres György javítása Ramsey algoritmusán

Ezzel javították a Ramsey-számok fenti becslését.

Algoritmusuk képes bármilyen R csúcshalmaz esetén párhuzamosan kiszámolni egy $F(R)$ független ponthalmazt és egy $K(R)$ klikket.

G-n futva az algoritmus $F(V(G))$ független halmazt és $K(V(G))$ klikket számol ki.

Erdős Pál és Szekeres György javítása Ramsey algoritmusán

Ezzel javították a Ramsey-számok fenti becslését.

Algoritmusuk képes bármilyen R csúcshalmaz esetén párhuzamosan kiszámolni egy $F(R)$ független ponthalmazt és egy $K(R)$ klikket.

G-n futva az algoritmus $F(V(G))$ független halmazt és $K(V(G))$ klikket számol ki.

Szemben a korábbi algoritmusokkal ez nem „dobálja el” a csúcsokat.

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Rekurzió: Különben x egy tetszőleges csúcs.

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Rekurzió: Különben x egy tetszőleges csúcs. Legyen $N = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \in E\}$.

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Rekurzió: Különben x egy tetszőleges csúcs. Legyen
$N = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \in E\}$. Legyen
$\overline{N} = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \notin E\}$.

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Rekurzió: Különben x egy tetszőleges csúcs. Legyen $N = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \in E\}$. Legyen $\overline{N} = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \notin E\}$.

$// \ N \dot{\cup} \overline{N} = V(G) - \{x\}$

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Rekurzió: Különben x egy tetszőleges csúcs. Legyen
$N = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \in E\}$. Legyen
$\overline{N} = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \notin E\}$.

// $N \dot{\cup} \overline{N} = V(G) - \{x\}$

Hívjuk meg rekurzíven az algoritmust $G|_N$ és $G|_{\overline{N}}$ gráfokra $F(N)$, illetve $K(N)$ a $G|_N$-ben talált független halmaz és klikk $F(\overline{N})$, illetve $K(\overline{N})$ a $G|_{\overline{N}}$-ben talált független halmaz és klikk.

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Rekurzió: Különben x egy tetszőleges csúcs. Legyen
$N = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \in E\}$. Legyen
$\overline{N} = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \notin E\}$.

// $N \dot{\cup} \overline{N} = V(G) - \{x\}$

Hívjuk meg rekurzíven az algoritmust $G|_N$ és $G|_{\overline{N}}$ gráfokra $F(N)$, illetve $K(N)$ a $G|_N$-ben talált független halmaz és klikk $F(\overline{N})$, illetve $K(\overline{N})$ a $G|_{\overline{N}}$-ben talált független halmaz és klikk.

Output:

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Rekurzió: Különben x egy tetszőleges csúcs. Legyen
$N = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \in E\}$. Legyen
$\overline{N} = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \notin E\}$.

// $N \dot{\cup} \overline{N} = V(G) - \{x\}$

Hívjuk meg rekurzíven az algoritmust $G|_N$ és $G|_{\overline{N}}$ gráfokra $F(N)$, illetve $K(N)$ a $G|_N$-ben talált független halmaz és klikk $F(\overline{N})$, illetve $K(\overline{N})$ a $G|_{\overline{N}}$-ben talált független halmaz és klikk.

Output: $F(V(G))$ legyen $F(N)$ és $\{x\} \cup F(\overline{N})$ közül a nagyobb.

Erdős—Szekeres-algoritmus

Erdős—Szekeres-algoritmus

Input: Egy G egyszerű gráf, output: egy $F(V)$ független halmaz és egy $K(V)$ klikk.

Rekurzió alapesete: Ha $|V| \leq 2$, akkor a két halmazunk legyen V és egy egyelemű része.

Rekurzió: Különben x egy tetszőleges csúcs. Legyen
$N = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \in E\}$. Legyen
$\overline{N} = \{y \in V(G) - \{x\} : xy \notin E\}$.

// $N \dot{\cup} \overline{N} = V(G) - \{x\}$

Hívjuk meg rekurzíven az algoritmust $G|_N$ és $G|_{\overline{N}}$ gráfokra $F(N)$, illetve $K(N)$ a $G|_N$-ben talált független halmaz és klikk $F(\overline{N})$, illetve $K(\overline{N})$ a $G|_{\overline{N}}$-ben talált független halmaz és klikk.

Output: $F(V(G))$ legyen $F(N)$ és $\{x\} \cup F(\overline{N})$ közül a nagyobb. $K(V(G))$ legyen $\{x\} \cup K(N)$ és $K(\overline{N})$ közül a nagyobb.

Az Erdős—Szekeres-algoritmus analízise

Az Erdős—Szekeres-algoritmus analízise

Tétel

Ha $|V| \geq \binom{k+\ell-2}{k-1} = \binom{k+\ell-2}{\ell-1}$, akkor az algoritmus egy legalább k elemű független halmazt vagy egy legalább ℓ elemű klikket talál.

Bizonyítás

Bizonyítás

$k + \ell$-re vonatkozó indukciót alkalmazunk.

Bizonyítás

$k + \ell$-re vonatkozó indukciót alkalmazunk.

Ha k vagy ℓ értéke legfeljebb 2, akkor az állítás nyilvánvaló.

Bizonyítás

$k + \ell$-re vonatkozó indukciót alkalmazunk.

Ha k vagy ℓ értéke legfeljebb 2, akkor az állítás nyilvánvaló. Feltesszük, hogy $k, \ell \geq 3$.

Bizonyítás

$k + \ell$-re vonatkozó indukciót alkalmazunk.

Ha k vagy ℓ értéke legfeljebb 2, akkor az állítás nyilvánvaló. Feltesszük, hogy $k, \ell \geq 3$.

Tudjuk, hogy $|V| \geq \binom{k+\ell-2}{k-1}$ és $|N| + |\overline{N}| = |V| - 1$.

Bizonyítás

$k+\ell$-re vonatkozó indukciót alkalmazunk.

Ha k vagy ℓ értéke legfeljebb 2, akkor az állítás nyilvánvaló. Feltesszük, hogy $k,\ell \geq 3$.

Tudjuk, hogy $|V| \geq \binom{k+\ell-2}{k-1}$ és $|N|+|\overline{N}| = |V|-1$.

Ekkor

$$\begin{aligned}|N|+|\overline{N}| =& |V|-1 \geq \binom{k+\ell-2}{k-1}-1 \\ &> \left[\binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1}-1\right]+\left[\binom{k+(\ell-1)-2}{k-1}-1\right].\end{aligned}$$

Bizonyítás

$k+\ell$-re vonatkozó indukciót alkalmazunk.

Ha k vagy ℓ értéke legfeljebb 2, akkor az állítás nyilvánvaló. Feltesszük, hogy $k,\ell \geq 3$.

Tudjuk, hogy $|V| \geq \binom{k+\ell-2}{k-1}$ és $|N| + |\overline{N}| = |V| - 1$.

Ekkor

$$\begin{aligned}|N| + |\overline{N}| =& |V| - 1 \geq \binom{k+\ell-2}{k-1} - 1 \\ &> \left[\binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1} - 1\right] + \left[\binom{k+(\ell-1)-2}{k-1} - 1\right].\end{aligned}$$

Így

$$|\overline{N}| > \binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1} - 1 \qquad \text{vagy} \qquad |N| > \binom{k+(\ell-1)-2}{k-1} - 1.$$

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|\overline{N}| \geq \binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1}$, akkor a rekurzív hívás után (az indukciós feltévés alapján) $F(\overline{N})$ legalább $k-1$ elemű vagy $K(\overline{N})$ legalább ℓ elemű.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|\overline{N}| \geq \binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1}$, akkor a rekurzív hívás után (az indukciós feltévés alapján) $F(\overline{N})$ legalább $k-1$ elemű vagy $K(\overline{N})$ legalább ℓ elemű.

Így $F(V(G))$ legalább k elemű, hiszen $F(\overline{N}) \cup \{x\}$ is szerepel az összevetésben, amellyel meghatároztuk.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|\overline{N}| \geq \binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1}$, akkor a rekurzív hívás után (az indukciós feltévés alapján) $F(\overline{N})$ legalább $k-1$ elemű vagy $K(\overline{N})$ legalább ℓ elemű.

Így $F(V(G))$ legalább k elemű, hiszen $F(\overline{N}) \cup \{x\}$ is szerepel az összevetésben, amellyel meghatároztuk. $K(V(G))$ legalább ℓ elemű.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|\overline{N}| \geq \binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1}$, akkor a rekurzív hívás után (az indukciós feltévés alapján) $F(\overline{N})$ legalább $k-1$ elemű vagy $K(\overline{N})$ legalább ℓ elemű.

Így $F(V(G))$ legalább k elemű, hiszen $F(\overline{N}) \cup \{x\}$ is szerepel az összevetésben, amellyel meghatároztuk. $K(V(G))$ legalább ℓ elemű.

Az $|N| \geq \binom{k+(\ell-1)-2}{k-1}$ eset hasonlóan tárgyalható.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|\overline{N}| \geq \binom{(k-1)+\ell-2}{(k-1)-1}$, akkor a rekurzív hívás után (az indukciós feltévés alapján) $F(\overline{N})$ legalább $k-1$ elemű vagy $K(\overline{N})$ legalább ℓ elemű.

Így $F(V(G))$ legalább k elemű, hiszen $F(\overline{N}) \cup \{x\}$ is szerepel az összevetésben, amellyel meghatároztuk. $K(V(G))$ legalább ℓ elemű.

Az $|N| \geq \binom{k+(\ell-1)-2}{k-1}$ eset hasonlóan tárgyalható.

Ez befejezi az állításunk indoklását.

Aszimmetrikus Ramsey-számok

Aszimmetrikus Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k,\ell)$ az a minimális $|V|$ érték, amely esetén biztosak lehetünk abban, hogy tetszőleges egyszerű gráf V-n tartalmaz k elemű független halmazt vagy ℓ elemű klikket.

Aszimmetrikus Ramsey-számok

Definíció

Legyen $R(k,\ell)$ az a minimális $|V|$ érték, amely esetén biztosak lehetünk abban, hogy tetszőleges egyszerű gráf V-n tartalmaz k elemű független halmazt vagy ℓ elemű klikket.

Könnyű feladatok

(0) $R(k,\ell) = R(\ell,k)$,

(i) $R(1,\ell) = 1$,

(ii) $R(2,\ell) = \ell$.

Erdős—Szekeres-egyenlőtlenség

Erdős—Szekeres-egyenlőtlenség

A bizonyítás lényegét a következő lemma foglalja össze.

Erdős—Szekeres-egyenlőtlenség

A bizonyítás lényegét a következő lemma foglalja össze.

Lemma: Erdős—Szekeres-egyenlőtlenség

$$R(k,\ell) \leq R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1).$$

Erdős Pál öröksége

Erdős Pál öröksége

- Az extremális kombinatorika és Ramsey-elmélet Erdős Pál hosszú kutatói életének meghatározó témái.

Erdős Pál öröksége

- Az extremális kombinatorika és Ramsey-elmélet Erdős Pál hosszú kutatói életének meghatározó témái.
- Erdős Pál eredményei a témakörök kialakításában, arculatának alakításában meghatározó szerepet játszanak.

Erdős Pál öröksége

- Az extremális kombinatorika és Ramsey-elmélet Erdős Pál hosszú kutatói életének meghatározó témái.
- Erdős Pál eredményei a témakörök kialakításában, arculatának alakításában meghatározó szerepet játszanak.
- Egy **Erdős mese** a Ramsey-számok problémájának nehézségét mutatja meg:

Erdős Pál öröksége

- Az extremális kombinatorika és Ramsey-elmélet Erdős Pál hosszú kutatói életének meghatározó témái.
- Erdős Pál eredményei a témakörök kialakításában, arculatának alakításában meghatározó szerepet játszanak.
- Egy **Erdős mese** a Ramsey-számok problémájának nehézségét mutatja meg: Ha az űrből egy idegen szupercivilizáció érkezne a Földre és azt mondaná, hogy az emberiséget akkor kíméli meg, ha meghatározza $R(5)$ értékét, akkor a politikusoknak és gazdasági szakembereknek a matematikusokat és számítástudománnyal foglalkozókat kellene támogatunk, hogy az összes szuperszámítógép erejét és tudásukat összerakva megoldják a problémát.

Erdős Pál öröksége

- Az extremális kombinatorika és Ramsey-elmélet Erdős Pál hosszú kutatói életének meghatározó témái.
- Erdős Pál eredményei a témakörök kialakításában, arculatának alakításában meghatározó szerepet játszanak.
- Egy **Erdős mese** a Ramsey-számok problémájának nehézségét mutatja meg: Ha az űrből egy idegen szupercivilizáció érkezne a Földre és azt mondaná, hogy az emberiséget akkor kíméli meg, ha meghatározza $R(5)$ értékét, akkor a politikusoknak és gazdasági szakembereknek a matematikusokat és számítástudománnyal foglalkozókat kellene támogatunk, hogy az összes szuperszámítógép erejét és tudásukat összerakva megoldják a problémát.
- Amennyiben a lények $R(6)$ meghatározásához kötik az erőszak elkerüléset, akkor ugyanezt a támogatást a katonáknak és a fegyverkezéssel foglalkozóknak kellene nyújtaniuk.

Több szín esete

Több szín esete

A fenti állítást 2-színezésre mondtuk ki, de kimondható és egyszerűen bizonyítható c-színezésre is.

Több szín esete

A fenti állítást 2-színezésre mondtuk ki, de kimondható és egyszerűen bizonyítható c-színezésre is.

Ennek megfelelően új Ramsey-számokat vezethetünk be: $R_c(k)$, ha c elemű a palettával dolgozunk.

Több szín esete

A fenti állítást 2-színezésre mondtuk ki, de kimondható és egyszerúen bizonyítható c-színezésre is.

Ennek megfelelően új Ramsey-számokat vezethetünk be: $R_c(k)$, ha c elemű a palettával dolgozunk.

Ahogy az Erdős—Szekeres bizonyításban tettük más Ramsey-számoknál is megbonthatjuk a színek szimmetriáját és ennek megfelelően általánosított aszimmetrikus Ramsey-számokat vezethetünk be: $R_c(k_1, k_2, \ldots, k_c)$.

Több szín esete: Bizonyítás

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

(I):

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

(I): A három színre gondoljunk mint piros, világoskék, sötétkék.

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

(I): A három színre gondoljunk mint piros, világoskék, sötétkék. k elemű monokromatikus halmazt keresünk.

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

(I): A három színre gondoljunk mint piros, világoskék, sötétkék. k elemű monokromatikus halmazt keresünk. Piros/kék színekre alkalmazzuk a két-színű Ramsey-tételt.

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

(I): A három színre gondoljunk mint piros, világoskék, sötétkék. k elemű monokromatikus halmazt keresünk. Piros/kék színekre alkalmazzuk a két-színű Ramsey-tételt.

Piros színben talált monokromatikus halmaz egyszínű.

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

(I): A három színre gondoljunk mint piros, világoskék, sötétkék. k elemű monokromatikus halmazt keresünk. Piros/kék színekre alkalmazzuk a két-színű Ramsey-tételt.

Piros színben talált monokromatikus halmaz egyszínű. A kék monokromatikus halmaz, azonban az eredeti színárnyalatokat is látva két színű.

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

(I): A három színre gondoljunk mint piros, világoskék, sötétkék. k elemű monokromatikus halmazt keresünk. Piros/kék színekre alkalmazzuk a két-színű Ramsey-tételt.

Piros színben talált monokromatikus halmaz egyszínű. A kék monokromatikus halmaz, azonban az eredeti színárnyalatokat is látva két színű. Ha azonban a csak kéket látó a Ramsey-tételt úgy alkalmazza, hogy mérete $R(k)$ legyen, akkor biztos lehet (az általa nem látott) k-elemű monokromatikus halmaz létezésében.

Több szín esete: Bizonyítás

Csak a $c = 3$ esetet tárgyaljuk.

(I): A három színre gondoljunk mint piros, világoskék, sötétkék. k elemű monokromatikus halmazt keresünk. Piros/kék színekre alkalmazzuk a két-színű Ramsey-tételt.

Piros színben talált monokromatikus halmaz egyszínű. A kék monokromatikus halmaz, azonban az eredeti színárnyalatokat is látva két színű. Ha azonban a csak kéket látó a Ramsey-tételt úgy alkalmazza, hogy mérete $R(k)$ legyen, akkor biztos lehet (az általa nem látott) k-elemű monokromatikus halmaz létezésében.

Az általános eset (3 szín helyett k) a paletta méret szerinti indukcióval, a fenti ötleten alapulva egyszerű.

Több szín esete: Bizonyítás II

Több szín esete: Bizonyítás II

(II): Emlékezzünk Ramsey bizonyítására.

Több szín esete: Bizonyítás II

(II): Emlékezzünk Ramsey bizonyítására. Legyen $|V| = c^{ck}$ egy rendezett csúcshalmaz.

Több szín esete: Bizonyítás II

(II): Emlékezzünk Ramsey bizonyítására. Legyen $|V| = c^{ck}$ egy rendezett csúcshalmaz. Vegyük ki az első v_1 csúcsot. Ezt a választást éljék túl azok a csúcsok, amelyekhez v_1-gyel olyan színű éllel van összekötve, amely a v_1 körüli élek között a leggyakoribb.

Több szín esete: Bizonyítás II

(II): Emlékezzünk Ramsey bizonyítására. Legyen $|V| = c^{ck}$ egy rendezett csúcshalmaz. Vegyük ki az első v_1 csúcsot. Ezt a választást éljék túl azok a csúcsok, amelyekhez v_1-gyel olyan színű éllel van összekötve, amely a v_1 körüli élek között a leggyakoribb. A túlélő csúcsokkal ismételjük ezt, amíg van túlélő csúcs.

Több szín esete: Bizonyítás II

(II): Emlékezzünk Ramsey bizonyítására. Legyen $|V| = c^{ck}$ egy rendezett csúcshalmaz. Vegyük ki az első v_1 csúcsot. Ezt a választást éljék túl azok a csúcsok, amelyekhez v_1-gyel olyan színű éllel van összekötve, amely a v_1 körüli élek között a leggyakoribb. A túlélő csúcsokkal ismételjük ezt, amíg van túlélő csúcs.

Legalább ck kiválasztási lépés lesz.

Több szín esete: Bizonyítás II

(II): Emlékezzünk Ramsey bizonyítására. Legyen $|V| = c^{ck}$ egy rendezett csúcshalmaz. Vegyük ki az első v_1 csúcsot. Ezt a választást éljék túl azok a csúcsok, amelyekhez v_1-gyel olyan színű éllel van összekötve, amely a v_1 körüli élek között a leggyakoribb. A túlélő csúcsokkal ismételjük ezt, amíg van túlélő csúcs.

Legalább ck kiválasztási lépés lesz. A kiválasztott csúcsok között legalább k olyan lesz, ami körül az algoritmus ugyanazt a színt találja legnépszerűbbnek.

Több szín esete: Bizonyítás II

(II): Emlékezzünk Ramsey bizonyítására. Legyen $|V| = c^{ck}$ egy rendezett csúcshalmaz. Vegyük ki az első v_1 csúcsot. Ezt a választást éljék túl azok a csúcsok, amelyekhez v_1-gyel olyan színű éllel van összekötve, amely a v_1 körüli élek között a leggyakoribb. A túlélő csúcsokkal ismételjük ezt, amíg van túlélő csúcs.

Legalább ck kiválasztási lépés lesz. A kiválasztott csúcsok között legalább k olyan lesz, ami körül az algoritmus ugyanazt a színt találja legnépszerűbbnek.

Tétel

$$R_c(k) \leq c^{ck}.$$

Több szín esete: Bizonyítás II

(II): Emlékezzünk Ramsey bizonyítására. Legyen $|V| = c^{ck}$ egy rendezett csúcshalmaz. Vegyük ki az első v_1 csúcsot. Ezt a választást éljék túl azok a csúcsok, amelyekhez v_1-gyel olyan színű éllel van összekötve, amely a v_1 körüli élek között a leggyakoribb. A túlélő csúcsokkal ismételjük ezt, amíg van túlélő csúcs.

Legalább ck kiválasztási lépés lesz. A kiválasztott csúcsok között legalább k olyan lesz, ami körül az algoritmus ugyanazt a színt találja legnépszerűbbnek.

Tétel

$$R_c(k) \leq c^{ck}.$$

Feladat

$$R_c(k_1, k_2, \ldots, k_c) \leq c^{k_1+k_2+\ldots+k_c}.$$

r-esek színezése

r-esek színezése

Az alap Ramsey-tétel egy teljes gráf éleit, a csúcsok kételemű részhalmazait színezte. Ez kiterjeszthető r-elemű részek színezésére: $c : \binom{V}{r} \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$.

r-esek színezése

Az alap Ramsey-tétel egy teljes gráf éleit, a csúcsok kételemű részhalmazait színezte. Ez kiterjeszthető r-elemű részek színezésére: $c : \binom{V}{r} \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$.

Persze ekkor egy $M \subset V$ monokromatikus halmaztól azt követeljük meg, hogy minden k-elemű része azonos színű legyen. Azaz M monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{r}}$ konstans függvény.

r-esek színezése

Az alap Ramsey-tétel egy teljes gráf éleit, a csúcsok kételemű részhalmazait színezte. Ez kiterjeszthető r-elemű részek színezésére: $c : \binom{V}{r} \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$.

Persze ekkor egy $M \subset V$ monokromatikus halmaztól azt követeljük meg, hogy minden k-elemű része azonos színű legyen. Azaz M monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{r}}$ konstans függvény.

A megfelelő tétel most is igaz (azaz elég nagy halmaz esetén szükségszerű a k elemű homogén halmaz jelenléte). Ennek megfelelően bevezethetők a $R^{(r)}(k)$, illetve $R^{(r)}(k, \ell)$ Ramsey-számok.

r-esek színezése

Az alap Ramsey-tétel egy teljes gráf éleit, a csúcsok kételemű részhalmazait színezte. Ez kiterjeszthető r-elemű részek színezésére: $c : \binom{V}{r} \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$.

Persze ekkor egy $M \subset V$ monokromatikus halmaztól azt követeljük meg, hogy minden k-elemű része azonos színű legyen. Azaz M monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{r}}$ konstans függvény.

A megfelelő tétel most is igaz (azaz elég nagy halmaz esetén szükségszerű a k elemű homogén halmaz jelenléte). Ennek megfelelően bevezethetők a $R^{(r)}(k)$, illetve $R^{(r)}(k, \ell)$ Ramsey-számok.

Megjegyzés: $r = 1$ is egy matematikailag értelmes állításban.

r-esek színezése

Az alap Ramsey-tétel egy teljes gráf éleit, a csúcsok kételemű részhalmazait színezte. Ez kiterjeszthető r-elemű részek színezésére: $c : \binom{V}{r} \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$.

Persze ekkor egy $M \subset V$ monokromatikus halmaztól azt követeljük meg, hogy minden k-elemű része azonos színű legyen. Azaz M monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{r}}$ konstans függvény.

A megfelelő tétel most is igaz (azaz elég nagy halmaz esetén szükségszerű a k elemű homogén halmaz jelenléte). Ennek megfelelően bevezethetők a $R^{(r)}(k)$, illetve $R^{(r)}(k, \ell)$ Ramsey-számok.

Megjegyzés: $r = 1$ is egy matematikailag értelmes állításban. Az $r = 1$ eset lényegében a skatulyaelv.

r-esek színezése

Az alap Ramsey-tétel egy teljes gráf éleit, a csúcsok kételemű részhalmazait színezte. Ez kiterjeszthető r-elemű részek színezésére: $c : \binom{V}{r} \to \{\text{piros}, \text{kék}\}$.

Persze ekkor egy $M \subset V$ monokromatikus halmaztól azt követeljük meg, hogy minden k-elemű része azonos színű legyen. Azaz M monokromatikus, ha $c|_{\binom{M}{r}}$ konstans függvény.

A megfelelő tétel most is igaz (azaz elég nagy halmaz esetén szükségszerű a k elemű homogén halmaz jelenléte). Ennek megfelelően bevezethetők a $R^{(r)}(k)$, illetve $R^{(r)}(k, \ell)$ Ramsey-számok.

Megjegyzés: $r = 1$ is egy matematikailag értelmes állításban. Az $r = 1$ eset lényegében a skatulyaelv. A Ramsey-tétel felfogható mint egy általánosított skatulyaelv.

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk.

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

Adott egy „nagy" V csúcshalmaz, amely minden hármasának színt ad egy c függvény.

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

Adott egy „nagy” V csúcshalmaz, amely minden hármasának színt ad egy c függvény. Erdős—Szekeres-tétel gondolatmenetét követjük:

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

Adott egy „nagy” V csúcshalmaz, amely minden hármasának színt ad egy c függvény. Erdős—Szekeres-tétel gondolatmenetét követjük: Bevezettük az aszimmetrikus $R^{(r)}(k, \ell)$ számokat.

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

Adott egy „nagy” V csúcshalmaz, amely minden hármasának színt ad egy c függvény. Erdős—Szekeres-tétel gondolatmenetét követjük: Bevezettük az aszimmetrikus $R^{(r)}(k, \ell)$ számokat.

Az Erdős—Szekeres-Lemma megfelelőjét kimondjuk:

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

Adott egy „nagy" V csúcshalmaz, amely minden hármasának színt ad egy c függvény. Erdős—Szekeres-tétel gondolatmenetét követjük: Bevezettük az aszimmetrikus $R^{(r)}(k, \ell)$ számokat.

Az Erdős—Szekeres-Lemma megfelelőjét kimondjuk:

Lemma

$$R^{(3)}(k, \ell) \leq R(R^{(3)}(k-1, \ell), R^{(3)}(k, \ell-1)) + 1.$$

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

Adott egy „nagy” V csúcshalmaz, amely minden hármasának színt ad egy c függvény. Erdős—Szekeres-tétel gondolatmenetét követjük: Bevezettük az aszimmetrikus $R^{(r)}(k, \ell)$ számokat.

Az Erdős—Szekeres-Lemma megfelelőjét kimondjuk:

Lemma

$$R^{(3)}(k, \ell) \leq R(R^{(3)}(k-1, \ell), R^{(3)}(k, \ell-1)) + 1.$$

A teljes bizonyítás egy indukciós bizonyítás $R^{(3)}(k, \ell)$ végességére.

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

Adott egy „nagy” V csúcshalmaz, amely minden hármasának színt ad egy c függvény. Erdős—Szekeres-tétel gondolatmenetét követjük: Bevezettük az aszimmetrikus $R^{(r)}(k, \ell)$ számokat.

Az Erdős—Szekeres-Lemma megfelelőjét kimondjuk:

Lemma

$$R^{(3)}(k, \ell) \leq R(R^{(3)}(k-1, \ell), R^{(3)}(k, \ell-1)) + 1.$$

A teljes bizonyítás egy indukciós bizonyítás $R^{(3)}(k, \ell)$ végességére.

$R^{(s)}(k, \ell)$ végessége s-re vonatkozó indukcióval formalizálható.

r-esek színezése 2 színnel: Bizonyítás

Az $r = 1, 2$ eseteket tudjuk. Az $r = 3$ esetet tárgyaljuk csak.

Adott egy „nagy” V csúcshalmaz, amely minden hármasának színt ad egy c függvény. Erdős—Szekeres-tétel gondolatmenetét követjük: Bevezettük az aszimmetrikus $R^{(r)}(k, \ell)$ számokat.

Az Erdős—Szekeres-Lemma megfelelőjét kimondjuk:

Lemma

$$R^{(3)}(k, \ell) \leq R(R^{(3)}(k-1, \ell), R^{(3)}(k, \ell-1)) + 1.$$

A teljes bizonyítás egy indukciós bizonyítás $R^{(3)}(k, \ell)$ végességére.

$R^{(s)}(k, \ell)$ végessége s-re vonatkozó indukcióval formalizálható. A fenti gondolatmenet az indukciós lépést mutatja.

r-esek színezése c színnel

r-esek színezése c színnel

A két továbblépés összegezhető. Vizsgálhatjuk az r-elemű részhalmazok c-színezését. Elég nagy alaphalmaz esetén ekkor is garantált a k-elemű monokromatikus halmaz megléte. A megfelelő Ramsey-számok jelölése $R_c^{(r)}(k)$, illetve $R_c^{(r)}(k_1, k_2, \ldots, k_c)$.

r-esek színezése c színnel

A két továbblépés összegezhető. Vizsgálhatjuk az r-elemű részhalmazok c-színezését. Elég nagy alaphalmaz esetén ekkor is garantált a k-elemű monokromatikus halmaz megléte. A megfelelő Ramsey-számok jelölése $R_c^{(r)}(k)$, illetve $R_c^{(r)}(k_1, k_2, \ldots, k_c)$.

A részletek kidolgozását az érdeklődő hallgató elvégezheti.

Szünet

Ramsey-elmélet

Ramsey-elmélet

A gráfelméleti Ramsey-tétel a következő filozófiát támasztja alá:

Ramsey-elmélet

A gráfelméleti Ramsey-tétel a következő filozófiát támasztja alá: nincs teljes rendezetlenség.

Ramsey-elmélet

A gráfelméleti Ramsey-tétel a következő filozófiát támasztja alá: nincs teljes rendezetlenség.

Bárhogy húzunk is be éleket n csúcs közé mindig lesz $\mathcal{O}(\log n)$ nagyságú független halmaz vagy klikk, azaz egy rendkívül rendezett rész.

Ramsey-elmélet

A gráfelméleti Ramsey-tétel a következő filozófiát támasztja alá: nincs teljes rendezetlenség.

Bárhogy húzunk is be éleket n csúcs közé mindig lesz $\mathcal{O}(\log n)$ nagyságú független halmaz vagy klikk, azaz egy rendkívül rendezett rész.

Ezt akkor se tudjuk elkerúlni, ha célunk a teljes káosz kialakítása. Bizonyos lokális rend elkerülhetetlen.

Ramsey-elmélet

A gráfelméleti Ramsey-tétel a következő filozófiát támasztja alá: nincs teljes rendezetlenség.

Bárhogy húzunk is be éleket n csúcs közé mindig lesz $\mathcal{O}(\log n)$ nagyságú független halmaz vagy klikk, azaz egy rendkívül rendezett rész.

Ezt akkor se tudjuk elkerúlni, ha célunk a teljes káosz kialakítása. Bizonyos lokális rend elkerülhetetlen.

A fenti filozófia a matematika több tételében megjelenik. A megfelelő tételek Ramsey-típusú tételek.

Ramsey-elmélet

A gráfelméleti Ramsey-tétel a következő filozófiát támasztja alá: nincs teljes rendezetlenség.

Bárhogy húzunk is be éleket n csúcs közé mindig lesz $\mathcal{O}(\log n)$ nagyságú független halmaz vagy klikk, azaz egy rendkívül rendezett rész.

Ezt akkor se tudjuk elkerúlni, ha célunk a teljes káosz kialakítása. Bizonyos lokális rend elkerülhetetlen.

A fenti filozófia a matematika több tételében megjelenik. A megfelelő tételek Ramsey-típusú tételek.

A sok összefüggés miatt egy elmélet alakult ki a filozófia köré. Ebbe a matematika legkülönbözőbb ágai adnak részeredményeket.

Erdős—Szekeres-tétel

Erdős—Szekeres-tétel

Legyen adva egy n elemű $\mathcal{P}$ ponthalmaz a síkon úgy, hogy pontjaink közül semelyik három sem esik egy egyenesre ($\mathcal{P}$ pontjai általános helyzetűek).

Erdős—Szekeres-tétel

Legyen adva egy n elemű $\mathcal{P}$ ponthalmaz a síkon úgy, hogy pontjaink közül semelyik három sem esik egy egyenesre ($\mathcal{P}$ pontjai általános helyzetűek).

$\mathcal{P}$ elemei közül szeretnénk kiválasztani k-t úgy, hogy ezek egy konvex sokszög csúcsait alkossák.

Erdős—Szekeres-tétel

Legyen adva egy n elemű $\mathcal{P}$ ponthalmaz a síkon úgy, hogy pontjaink közül semelyik három sem esik egy egyenesre ($\mathcal{P}$ pontjai általános helyzetűek).

$\mathcal{P}$ elemei közül szeretnénk kiválasztani k-t úgy, hogy ezek egy konvex sokszög csúcsait alkossák.

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha $|\mathcal{P}|$ elég nagy, akkor ez garantáltan lehetséges.

Erdős—Szekeres-tétel

Legyen adva egy n elemű $\mathcal{P}$ ponthalmaz a síkon úgy, hogy pontjaink közül semelyik három sem esik egy egyenesre ($\mathcal{P}$ pontjai általános helyzetűek).

$\mathcal{P}$ elemei közül szeretnénk kiválasztani k-t úgy, hogy ezek egy konvex sokszög csúcsait alkossák.

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha $|\mathcal{P}|$ elég nagy, akkor ez garantáltan lehetséges.

(Erdős Pál és Szekeres György tétele)

Ha $\mathcal{P}$ $R^{(4)}(5, k)$ darab általános helyzetű pont halmaza, akkor közülük ki lehet választani k pontot úgy, hogy ezek egy konvex sokszög csúcsait alkossák.

Egy elemi geometriai lemma

Egy elemi geometriai lemma

A bizonyítás a következő egyszerű geometriai lemmán múlik. A lemmát nem bizonyítjuk. Az érdeklődő hallgató középiskolai ismeretei alapján könnyen beláthatja.

Egy elemi geometriai lemma

A bizonyítás a következő egyszerű geometriai lemmán múlik. A lemmát nem bizonyítjuk. Az érdeklődő hallgató középiskolai ismeretei alapján könnyen beláthatja.

Lemma

(i) Ha adott a síkon öt általános helyzetű pont, akkor kiválasztható közülük négy úgy, hogy ezek konvex négyszöget határozzanak meg.

(ii) Ha adott a síkon k általános helyzetű pont úgy, hogy közülük tetszőleges négy konvex négyszöget határoz meg, akkor a k pont konvex helyzetben van.

Tétel bizonyítása

Tétel bizonyítása

Ezek után a $\mathcal{P}$ ponthalmaz négyeseit színezzük ki két színnel úgy, hogy egy négyes akkor és csak akkor kapjon piros színt, ha a benne szereplő pontnégyes nem egy konvex négyszög csúcshalmaza.

Tétel bizonyítása

Ezek után a $\mathcal{P}$ ponthalmaz négyeseit színezzük ki két színnel úgy, hogy egy négyes akkor és csak akkor kapjon piros színt, ha a benne szereplő pontnégyes nem egy konvex négyszög csúcshalmaza.

A lemma éppen azt mondja ki, hogy a ponthalmaznak ekkor nincs piros monokromatikus ötelemű részhalmaza.

Tétel bizonyítása

Ezek után a $\mathcal{P}$ ponthalmaz négyeseit színezzük ki két színnel úgy, hogy egy négyes akkor és csak akkor kapjon piros színt, ha a benne szereplő pontnégyes nem egy konvex négyszög csúcshalmaza.

A lemma éppen azt mondja ki, hogy a ponthalmaznak ekkor nincs piros monokromatikus ötelemű részhalmaza.

$|\mathcal{P}|$ választása miatt ekkor van $\mathcal{P}$-ben egy k elemű kék rész.

Tétel bizonyítása

Ezek után a $\mathcal{P}$ ponthalmaz négyeseit színezzük ki két színnel úgy, hogy egy négyes akkor és csak akkor kapjon piros színt, ha a benne szereplő pontnégyes nem egy konvex négyszög csúcshalmaza.

A lemma éppen azt mondja ki, hogy a ponthalmaznak ekkor nincs piros monokromatikus ötelemű részhalmaza.

$|\mathcal{P}|$ választása miatt ekkor van $\mathcal{P}$-ben egy k elemű kék rész.

Erről Lemma (ii) azt állítja, hogy egy konvex k-szög csúcshalmaza.

Happy end probléma

Happy end probléma

A tétel Klein Eszter egy kérdését válaszolta meg.

Happy end probléma

A tétel Klein Eszter egy kérdését válaszolta meg.

A bizonyításban szereplő elemi geometriai megállapítást Klein Eszter vette észre, aki ezek után feltette a kérdést: Igaz-e, hogy elég nagy ponthalmaz esetén garantáltan találhatunk egy konvex k-szöget alkotó csúcshalmazt a ponthalmazunkban?

Happy end probléma

A tétel Klein Eszter egy kérdését válaszolta meg.

A bizonyításban szereplő elemi geometriai megállapítást Klein Eszter vette észre, aki ezek után feltette a kérdést: Igaz-e, hogy elég nagy ponthalmaz esetén garantáltan találhatunk egy konvex k-szöget alkotó csúcshalmazt a ponthalmazunkban?

A problémát „Happy end” problémának nevezte el Erdős Pál, mert talán a kérdésfelvetés is szerepet játszott abban, hogy később Szekeres György és Klein Eszter házasságot kötött.

Erdős—Szekeres-számok

Erdős—Szekeres-számok

$ESz(n)$ az a minimális szám, amilyen számosságú általános helyzetű ponthalmaz esetén garantáljuk egy konvex n-szög csúcsainak halmazát a ponthalmazunkban.

Erdős—Szekeres-számok

$ESz(n)$ az a minimális szám, amilyen számosságú általános helyzetű ponthalmaz esetén garantáljuk egy konvex n-szög csúcsainak halmazát a ponthalmazunkban.

A következő becslés Erdős Páltól és Szekeres Györgytől származik:

$$2^{k-2}+1 \leq ESz(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

Erdős—Szekeres-számok

$ESz(n)$ az a minimális szám, amilyen számosságú általános helyzetű ponthalmaz esetén garantáljuk egy konvex n-szög csúcsainak halmazát a ponthalmazunkban.

A következő becslés Erdős Páltól és Szekeres Györgytől származik:

$$2^{k-2}+1 \leq ESz(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

(Szekeres György)

Igaz-e, hogy tetszőleges k esetén $ESz(k) = 2^{k-2}+1$?

Erdős—Szekeres-számok

$ESz(n)$ az a minimális szám, amilyen számosságú általános helyzetű ponthalmaz esetén garantáljuk egy konvex n-szög csúcsainak halmazát a ponthalmazunkban.

A következő becslés Erdős Páltól és Szekeres Györgytől származik:

$$2^{k-2}+1 \leq ESz(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

(Szekeres György)

Igaz-e, hogy tetszőleges k esetén $ESz(k) = 2^{k-2}+1$?

A fenti sejtést/egyenlőséget csak $k \leq 6$ esetén igazolták (2006).

Erdős—Szekeres-számok

$ESz(n)$ az a minimális szám, amilyen számosságú általános helyzetű ponthalmaz esetén garantáljuk egy konvex n-szög csúcsainak halmazát a ponthalmazunkban.

A következő becslés Erdős Páltól és Szekeres Györgytől származik:

$$2^{k-2} + 1 \leq ESz(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

(Szekeres György)

Igaz-e, hogy tetszőleges k esetén $ESz(k) = 2^{k-2} + 1$?

A fenti sejtést/egyenlőséget csak $k \leq 6$ esetén igazolták (2006).

Tétel, Suk 2017

$$2^{k-2} + 1 \leq ESz(k) \leq 2^{k+o(k)}.$$

Szünet

Aritmetikai Ramsey-típusú tételek

Aritmetikai Ramsey-típusú tételek

A következőkben olyan problémákkal foglalkozunk, ahol adott egy számhalmaz, melynek elemeit kiszíneztük. Majd veszünk egy egyenletet/egyenletrendszert, és azt vizsgáljuk, hogy megoldható-e úgy, hogy a megoldás monokromatikus halmaz legyen.

Aritmetikai Ramsey-típusú tételek

A következőkben olyan problémákkal foglalkozunk, ahol adott egy számhalmaz, melynek elemeit kiszíneztük. Majd veszünk egy egyenletet/egyenletrendszert, és azt vizsgáljuk, hogy megoldható-e úgy, hogy a megoldás monokromatikus halmaz legyen.

Az első ilyen tételünk az alábbiakban egy lemma lesz. Ehhez a Fermat-sejtés vizsgálata vezetett el. Eszerint az $x^n + y^n = z^n$ Diophantikus egyenletnek nincs nem triviális megoldása 2-nél nagyobb egész n esetén. (Ezt a sejtést Wiles 1994-ben bizonyította.)

Schur-tétel

Schur-tétel

Következőkben az alatt, hogy egy állítás elég nagy s számra teljesül, azt értjük, hogy

Van olyan s_0 küszöb, hogy minden $s \geq s_0$ esetén az állítás igaz.

A nyelvezetet értelemszerűen használjuk prímekre, illetve használhatnánk négyzetszámokra, vagy $\mathbb{N}$ egy tetszőleges végtelen részhalmazából vett értékekre.

Schur-tétel

Következőkben az alatt, hogy egy állítás elég nagy s számra teljesül, azt értjük, hogy

Van olyan s_0 küszöb, hogy minden $s \geq s_0$ esetén az állítás igaz.

A nyelvezetet értelemszerűen használjuk prímekre, illetve használhatnánk négyzetszámokra, vagy $\mathbb{N}$ egy tetszőleges végtelen részhalmazából vett értékekre.

(Schur-tétel)

Legyen adott $n \in \mathbb{N}^+$. Elég nagy p prímre az

$$x^n + y^n \equiv_p z^n$$

egyenletnek létezik nem triviális megoldása, ahol $x \equiv_p y$ jelentése: $x \equiv y \mod p$, továbbá egy x, y, z megoldás akkor nem-triviális, ha $x, y, z \not\equiv_p 0$.

Schur-lemma

Schur-lemma

Természetesen a p-re vonatkozó küszöbszám függ n-től. Mielőtt még a tételt bizonyítanánk, szükségünk van a következő számunkra központi lemmára.

Schur-lemma

Természetesen a p-re vonatkozó küszöbszám függ n-től. Mielőtt még a tételt bizonyítanánk, szükségünk van a következő számunkra központi lemmára.

(Schur-lemma, 1916)

Legyen ν elég nagy, és $c \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges palettaméret. Vegyünk egy tetszőleges $\varphi : \{1, 2, \ldots, \nu\} = [\nu] \to \{1, 2, \ldots, c\}$ színezést. Ekkor az

$$x + y = z \text{ , ahol } x, y, z \in [\nu],$$

egyenletnek van monokromatikus megoldása.

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

Definiáljuk az $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ halmazon értelmezett teljes gráf éleinek egy színezését: Az *ij* él színe legyen $\varphi(|i - j|)$.

Lemma bizonyítása

Definiáljuk az $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ halmazon értelmezett teljes gráf éleinek egy színezését: Az ij él színe legyen $\varphi(|i-j|)$.

Ekkor Ramsey-tételéből adódóan, ha ν elég nagy, lesz monokromatikus hármas (azaz egy háromszög, melynek minden éle ugyanolyan színű).

Lemma bizonyítása

Definiáljuk az $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ halmazon értelmezett teljes gráf éleinek egy színezését: Az ij él színe legyen $\varphi(|i - j|)$.

Ekkor Ramsey-tételéből adódóan, ha ν elég nagy, lesz monokromatikus hármas (azaz egy háromszög, melynek minden éle ugyanolyan színű). Igazából $\nu = R_c(3)$ egy jó határ.

Lemma bizonyítása

Definiáljuk az $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ halmazon értelmezett teljes gráf éleinek egy színezését: Az ij él színe legyen $\varphi(|i - j|)$.

Ekkor Ramsey-tételéből adódóan, ha ν elég nagy, lesz monokromatikus hármas (azaz egy háromszög, melynek minden éle ugyanolyan színű). Igazából $\nu = R_c(3)$ egy jó határ.

Legyen h, i, j egy monokromatikus háromszög csúcsai.

Lemma bizonyítása

Definiáljuk az $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ halmazon értelmezett teljes gráf éleinek egy színezését: Az ij él színe legyen $\varphi(|i-j|)$.

Ekkor Ramsey-tételéből adódóan, ha ν elég nagy, lesz monokromatikus hármas (azaz egy háromszög, melynek minden éle ugyanolyan színű). Igazából $\nu = R_c(3)$ egy jó határ.

Legyen h, i, j egy monokromatikus háromszög csúcsai. Feltehető, hogy $h < i < j$. Tudjuk, hogy

$$\varphi(i-h) = \varphi(j-i) = \varphi(j-h).$$

Lemma bizonyítása

Definiáljuk az $\{0, 1, 2, \ldots, \nu\}$ halmazon értelmezett teljes gráf éleinek egy színezését: Az ij él színe legyen $\varphi(|i-j|)$.

Ekkor Ramsey-tételéből adódóan, ha ν elég nagy, lesz monokromatikus hármas (azaz egy háromszög, melynek minden éle ugyanolyan színű). Igazából $\nu = R_c(3)$ egy jó határ.

Legyen h, i, j egy monokromatikus háromszög csúcsai. Feltehető, hogy $h < i < j$. Tudjuk, hogy

$$\varphi(i-h) = \varphi(j-i) = \varphi(j-h).$$

Ekkor az $x = i - h$, $y = j - i$, $z = j - h$ egy megfelelő megoldása az egyenletünknek.

Tétel bizonyítása

Tétel bizonyítása

A teljesség kedvéért lássuk a tétel bizonyítását is.

Tétel bizonyítása

A teljesség kedvéért lássuk a tétel bizonyítását is.

Legyen p elég nagy prím, és tekintsük a p elemű test multiplikatív csoportjának ($\mathbb{F}_p^*$-nek) a következő

$$H = \{x^n | x \in \mathbb{F}_p^*\} = \{g^n, g^{2n}, \dots\}$$

részcsoportját, azaz az n-edik hatványok által alkotott részcsoportját (g a $\mathbb{F}_p^*$ ciklikus csoport egy generátora).

Tétel bizonyítása

A teljesség kedvéért lássuk a tétel bizonyítását is.

Legyen p elég nagy prím, és tekintsük a p elemű test multiplikatív csoportjának ($\mathbb{F}_p^*$-nek) a következő

$$H = \{x^n | x \in \mathbb{F}_p^*\} = \{g^n, g^{2n}, \dots\}$$

részcsoportját, azaz az n-edik hatványok által alkotott részcsoportját (g a $\mathbb{F}_p^*$ ciklikus csoport egy generátora).

Látható, hogy ennek a részcsoportnak az elemszáma, $|H| \geq \frac{p-1}{n}$. Ekkor $\mathbb{F}_p^*$ felbomlik H szerinti mellékosztályokra.

$$\mathbb{F}_p^* = m_1 H \dot\cup m_2 H \dot\cup \dots \dot\cup m_\ell H$$

A mellékosztályok ℓ száma $\ell = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{|H|} = \frac{p-1}{|H|} \leq n$.

Tétel bizonyítása (folytatás)

Tétel bizonyítása (folytatás)

Tekintsük $\mathbb{F}_p^* \equiv [p-1] = \{1, 2, \ldots, p-1\}$-nek, azt az n színezését, ahol $m_i H$ elemei az i-edik színt kapják.

Tétel bizonyítása (folytatás)

Tekintsük $\mathbb{F}_p^* \equiv [p-1] = \{1, 2, \ldots, p-1\}$-nek, azt az n színezését, ahol $m_i H$ elemei az i-edik színt kapják.

Ekkor a Schur-lemmát alkalmazva $\nu = p - 1$, és $c = n$ paraméterekkel adódik, hogy alkalmas színre/mellékosztálya ($m_i H$) és ilyen színben/ezen mellékosztályban alkalmas x, y és z elemre ($x, y, z \in m_i H$) teljesül, hogy $x + y = z$.

Tétel bizonyítása (folytatás)

Tekintsük $\mathbb{F}_p^* \equiv [p-1] = \{1, 2, \dots, p-1\}$-nek, azt az n színezését, ahol $m_i H$ elemei az i-edik színt kapják.

Ekkor a Schur-lemmát alkalmazva $\nu = p - 1$, és $c = n$ paraméterekkel adódik, hogy alkalmas színre/mellékosztálya $(m_i H)$ és ilyen színben/ezen mellékosztályban alkalmas x, y és z elemre $(x, y, z \in m_i H)$ teljesül, hogy $x + y = z$.

Azaz $x = m_i {x_0}^n$, $y = m_i {y_0}^n$, $z = m_i {z_0}^n$ és

$$m_i {x_0}^n + m_i {y_0}^n \equiv_p \ m_i {z_0}^n.$$

m_i-vel leosztva $(m_i \neq 0)$, adódik hogy

$${x_0}^n + {y_0}^n \equiv_p \ {z_0}^n,$$

ahol ${x_0}^n$, ${y_0}^n$, ${z_0}^n \in H$, speciálisan ${x_0}^n$, ${y_0}^n$, ${z_0}^n \not\equiv_p \ 0$.

Tétel bizonyítása (folytatás)

Tekintsük $\mathbb{F}_p^* \equiv [p-1] = \{1, 2, \ldots, p-1\}$-nek, azt az n színezését, ahol $m_i H$ elemei az i-edik színt kapják.

Ekkor a Schur-lemmát alkalmazva $\nu = p - 1$, és $c = n$ paraméterekkel adódik, hogy alkalmas színre/mellékosztálya $(m_i H)$ és ilyen színben/ezen mellékosztályban alkalmas x, y és z elemre $(x, y, z \in m_i H)$ teljesül, hogy $x + y = z$.

Azaz $x = m_i {x_0}^n$, $y = m_i {y_0}^n$, $z = m_i {z_0}^n$ és

$$m_i {x_0}^n + m_i {y_0}^n \equiv_p \ m_i {z_0}^n.$$

m_i-vel leosztva $(m_i \neq 0)$, adódik hogy

$${x_0}^n + {y_0}^n \equiv_p \ {z_0}^n,$$

ahol ${x_0}^n$, ${y_0}^n$, ${z_0}^n \in H$, speciálisan ${x_0}^n$, ${y_0}^n$, ${z_0}^n \not\equiv_p \ 0$.

Ezzel a keresett nem triviális megoldásokat megtaláltuk.

Schur-számok

Schur-számok

Ahogy Ramsey-tétele elvezet a Ramsey-számok definíciójához a Schur-lemmán is alapul egy fontos definíció.

Schur-számok

Ahogy Ramsey-tétele elvezet a Ramsey-számok definíciójához a Schur-lemmán is alapul egy fontos definíció.

Definíció

Legyen $c \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, ekkor az $Sch(c)$ legyen az a minimális ν szám, amire $[\nu]$ tetszőleges c színezésében lesz monokromatikus $\{x, y, z\}$, amelyre $x + y = z$, azaz a fenti lemmában az „elég nagy ν" pontos határa. $Sch(c)$ a c paraméterű Schur-szám.

További tételek

További tételek

A Schur-lemma — ami továbbiakban számunkra az igazi Schur-tétel lesz — további kutatásokat indított el. Az elért eredmények közül kiemelkedik az alábbi.

További tételek

A Schur-lemma — ami továbbiakban számunkra az igazi Schur-tétel lesz — további kutatásokat indított el. Az elért eredmények közül kiemelkedik az alábbi.

(van der Waerden tétele, 1927)

Elég nagy n-re, $[n]$-nek tetszőleges c színezésére lesz monokromatikus k hosszú, nem konstans számtani sorozat.

További tételek

A Schur-lemma — ami továbbiakban számunkra az igazi Schur-tétel lesz — további kutatásokat indított el. Az elért eredmények közül kiemelkedik az alábbi.

(van der Waerden tétele, 1927)

Elég nagy n-re, $[n]$-nek tetszőleges c színezésére lesz monokromatikus k hosszú, nem konstans számtani sorozat.

Ismét fontos megemlítenünk a tétellel kapcsolatos számsorozatot, ami leírja a tételben szereplő „elég nagy” fogalmat.

További tételek

A Schur-lemma — ami továbbiakban számunkra az igazi Schur-tétel lesz — további kutatásokat indított el. Az elért eredmények közül kiemelkedik az alábbi.

(van der Waerden tétele, 1927)

Elég nagy n-re, $[n]$-nek tetszőleges c színezésére lesz monokromatikus k hosszú, nem konstans számtani sorozat.

Ismét fontos megemlítenünk a tétellel kapcsolatos számsorozatot, ami leírja a tételben szereplő „elég nagy” fogalmat.

Definíció

Azt a legkisebb n számot, amelyre a fenti tétel igaz $W_c(k)$-val jelöljük.

Szünet

Pozíciós játékok

Pozíciós játékok

A pozíciós játékok legegyszerűbb alakja:

Pozíciós játékok

A pozíciós játékok legegyszerűbb alakja: kétszemélyes játék, ahol a két játékos felváltva foglal el még szabad pozíciókat egy tábláról, azzal a céllal, hogy elérjen valamilyen (nyerő) alakzatot.

Pozíciós játékok

A pozíciós játékok legegyszerűbb alakja: kétszemélyes játék, ahol a két játékos felváltva foglal el még szabad pozíciókat egy tábláról, azzal a céllal, hogy elérjen valamilyen (nyerő) alakzatot.

Példa: Tic-Tac-Toe

A tábla egy 3×3-as táblázat, a nyerő alakzatok a sorok, oszlopok és a két áltó pozícióhármasai.

Pozíciós játékok

A pozíciós játékok legegyszerűbb alakja: kétszemélyes játék, ahol a két játékos felváltva foglal el még szabad pozíciókat egy tábláról, azzal a céllal, hogy elérjen valamilyen (nyerő) alakzatot.

Példa: Tic-Tac-Toe

A tábla egy 3×3-as táblázat, a nyerő alakzatok a sorok, oszlopok és a két áltó pozícióhármasai.

Példa: Amőba

A tábla (a pozíciók halmaza) egy végtelen sík négyzetrács. A nyerőalakzatok sorban, oszlopban vagy valamelyik átlós irányban szomszédos öt mező.

Általánosított Tic-Tac-Toe tábla

Általánosított Tic-Tac-Toe tábla

Definíció

$U_k^d = \{\text{pozíciók halmaza}\} = \{1, 2, \ldots, k\}^d.$

Általánosított Tic-Tac-Toe tábla

Definíció

$U_k^d = \{\text{pozíciók halmaza}\} = \{1, 2, \ldots, k\}^d$.

Azaz két paraméterünk is van: k a tábla „szélessége”, d a tábla dimenziója.

Általánosított Tic-Tac-Toe tábla

Definíció

$U_k^d = \{\text{pozíciók halmaza}\} = \{1, 2, \ldots, k\}^d$.

Azaz két paraméterünk is van: k a tábla „szélessége”, d a tábla dimenziója.

Tehát egy pozíciót egy d dimenziós vektorral tudunk leírni, melynek koordinátái 1-től, k-ig terjedő számok lehetnek.

Általánosított Tic-Tac-Toe tábla

Definíció

$U_k^d = \{\text{pozíciók halmaza}\} = \{1, 2, \ldots, k\}^d$.

Azaz két paraméterünk is van: k a tábla „szélessége", d a tábla dimenziója.

Tehát egy pozíciót egy d dimenziós vektorral tudunk leírni, melynek koordinátái 1-től, k-ig terjedő számok lehetnek.

Ez a megállapodás természetes. Például az eredeti Tic-tac-Toe játék pozíciói azonosíthatók a $(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)$ elemekkel.

Általánosított Tic-Tac-Toe tábla

Definíció

$U_k^d = \{\text{pozíciók halmaza}\} = \{1, 2, \ldots, k\}^d$.

Azaz két paraméterünk is van: k a tábla „szélessége", d a tábla dimenziója.

Tehát egy pozíciót egy d dimenziós vektorral tudunk leírni, melynek koordinátái 1-től, k-ig terjedő számok lehetnek.

Ez a megállapodás természetes. Például az eredeti Tic-tac-Toe játék pozíciói azonosíthatók a $(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)$ elemekkel.

A sakktábla pozícióinál a szokás az $a1, a2, \ldots, h7, h8$ elemekkel való azonosítás, habár használhatnánk itt is az $11, 12, 13, 14, \ldots, 86, 87, 88$ számjegypárokat.

Általánosított Tic-Tac-Toe nyerő pozíciói

Általánosított Tic-Tac-Toe nyerő pozíciói

Definíció

Legyen $e \in \{*, 1, \ldots, k\}^d \setminus \{1, 2, \ldots, k\}^d$, melyhez hozzárendelünk egy $\mathcal{L}_e = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ egyenest, ahol $P_i = P_i(e)$ azt a pozíciót jelóli, amelyet úgy kapunk, hogy e-ben a csillagokat i-vel helyettesítjük.

Általánosított Tic-Tac-Toe nyerő pozíciói

Definíció

Legyen $e \in \{*, 1, \ldots, k\}^d \backslash \{1, 2, \ldots, k\}^d$, melyhez hozzárendelünk egy $\mathcal{L}_e = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ egyenest, ahol $P_i = P_i(e)$ azt a pozíciót jelóli, amelyet úgy kapunk, hogy e-ben a csillagokat i-vel helyettesítjük.

Azaz egyenesen pozíciók olyan halmazát értjük, melyhez van indexeknek olyan nemüres S halmaza, hogy az S-en kívüli koordinátái fixek, belül pedig minden koordinátája ugyanazt az értéket veszi fel.

Általánosított Tic-Tac-Toe nyerő pozíciói

Definíció

Legyen $e \in \{*, 1, \ldots, k\}^d \setminus \{1, 2, \ldots, k\}^d$, melyhez hozzárendelünk egy $\mathcal{L}_e = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ egyenest, ahol $P_i = P_i(e)$ azt a pozíciót jelóli, amelyet úgy kapunk, hogy e-ben a csillagokat i-vel helyettesítjük.

Azaz egyenesen pozíciók olyan halmazát értjük, melyhez van indexeknek olyan nemüres S halmaza, hogy az S-en kívüli koordinátái fixek, belül pedig minden koordinátája ugyanazt az értéket veszi fel. U_k^d minden egyenese k darab pozíciót tartalmaz.

Általánosított Tic-Tac-Toe nyerő pozíciói

Definíció

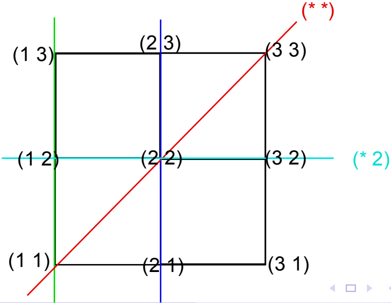
Legyen $e \in \{*, 1, \ldots, k\}^d \backslash \{1, 2, \ldots, k\}^d$, melyhez hozzárendelünk egy $\mathcal{L}_e = \{P_1, P_2, \ldots, P_k\}$ egyenest, ahol $P_i = P_i(e)$ azt a pozíciót jelóli, amelyet úgy kapunk, hogy e-ben a csillagokat i-vel helyettesítjük.

Azaz egyenesen pozíciók olyan halmazát értjük, melyhez van indexeknek olyan nemüres S halmaza, hogy az S-en kívüli koordinátái fixek, belül pedig minden koordinátája ugyanazt az értéket veszi fel. U_k^d minden egyenese k darab pozíciót tartalmaz.

Az U_k^d táblán $(k+1)^d - k^d$ darab egyenes van.

Példa

A következő ábrán $k = 3$, és $d = 2$ esetre láthatunk példát. Az $(1\ *)$ egyenesen (zöld színű), olyan pontok vannak melyek első koordinátája 1, és $S = \{2\}$, ugyanis a második koordináta mindig annyi ahanyadik pontot vesszük, vagyis az $(1\ *)$ egyenesen az (1 1), (1 2) és (1 3) pontok helyezkednek el. A $(*\ *)$ egyenesen (piros színű) az (1 1), (2 2) és (3 3) pontok vannak. Nyilván a másik átló nem lesz már egyenes. Ebben az esetben összesen 7 darab egyenes van.



Általánosított egyenesek, alterek

Általánosított egyenesek, alterek

Definíció

Az U_k^d táblán egy e-dimenziós alteret egy $a \in \{*_1, *_2, \ldots, *_e, 1, 2, \ldots, k\}^d$ vektorral írhatunk le, amelyben minden indexelt csillag legalább egyszer szerepel. Az ezzel leírt $\mathcal{A}_a$ altér elemeit úgy kapjuk, hogy a $*_i$-ket ugyanazzal az $\{1, 2, \ldots, k\}$-beli elemmel helyettesítjük (különböző i-kre egymástól függetlenül). Azaz egy e-dimenziós altér k^e darab pozíciót foglal el. Az $e = 1$ esetén az 1-dimenziós altér egy egyenes.

Hales—Jewett-tétel (1963)

Hales—Jewett-tétel (1963)

Hales—Jewett-tétel (1963)

Minden k-ra (minden táblaszélességre), minden c-re (minden paletta méretre) elég nagy d (dimenzió) esetén az U_k^d tábla pozícióit tetszőlegesen c-színezve lesz monokromatikus egyenes.

Hales—Jewett-tétel (1963)

Hales—Jewett-tétel (1963)

Minden k-ra (minden táblaszélességre), minden c-re (minden paletta méretre) elég nagy d (dimenzió) esetén az U_k^d tábla pozícióit tetszőlegesen c-színezve lesz monokromatikus egyenes.

Ezt úgy is értelmezhetjük, hogy a fenti táblán elég nagy dimenzió esetén, ha c játékos osztozik a pozíciókon/színezünk, akkor nem lehet döntetlen, azaz valamelyik játékos elér/színosztály tartalmaz nyerő pozícióhalmazt/egyenest.

Hales—Jewett-tétel $\Rightarrow$ van der Waerden-tétel

Hales—Jewett-tétel $\Rightarrow$ van der Waerden-tétel

k legyen a van der Waerden tételben keresett számtani sorozat hossza.

Hales—Jewett-tétel $\Rightarrow$ van der Waerden-tétel

k legyen a van der Waerden tételben keresett számtani sorozat hossza.

A Hales—Jewett-tételben ehhez (mint táblaszélességhez) tartozik egy d dimenzió. Legyen $n = k^d$.

Hales—Jewett-tétel $\Rightarrow$ van der Waerden-tétel

k legyen a van der Waerden tételben keresett számtani sorozat hossza.

A Hales—Jewett-tételben ehhez (mint táblaszélességhez) tartozik egy d dimenzió. Legyen $n = k^d$.

Tekintsük a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazt és elemeit írjuk k-as számrendszerbe. Ha átíráskor a számjegysorozatokat 0-kal elölről kiegyészítjük d hosszúvá, akkor ezzel egy

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \longleftrightarrow \{0, 1, \ldots, k-1\}^d$$

bijekciót írtunk le számaink és a tábla pozíciói közt.

Hales—Jewett-tétel ⇒ van der Waerden-tétel

k legyen a van der Waerden tételben keresett számtani sorozat hossza.

A Hales—Jewett-tételben ehhez (mint táblaszélességhez) tartozik egy d dimenzió. Legyen $n = k^d$.

Tekintsük a $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ halmazt és elemeit írjuk k-as számrendszerbe. Ha átíráskor a számjegysorozatokat 0-kal előlről kiegyészítjük d hosszúvá, akkor ezzel egy

$$\{0, 1, \ldots, n-1\} \longleftrightarrow \{0, 1, \ldots, k-1\}^d$$

bijekciót írtunk le számaink és a tábla pozíciói közt.

A van der Waerden tételének színezése megfelel táblánk egy Hales—Jewett-féle színezésének, amiben a Hales—Jewett-tétel garantál egy monokromatikus egyenest, ami megfelel egy k hosszú számtani sorozatnak.

A bizonyítás kezdete

A bizonyítás kezdete

Definíció

Azt a minimális dimenziót, amelyre a fenti tétel igaz $HJ_c(k)$-val jelöljük. Ezek a k, c paraméterű Hales–Jewett-számok.

A bizonyítás kezdete

Definíció

Azt a minimális dimenziót, amelyre a fenti tétel igaz $HJ_c(k)$-val jelöljük. Ezek a k, c paraméterű Hales–Jewett-számok.

Hales–Jewett-tétel $\equiv$ a Hales–Jewett-számok végesek.

A bizonyítás kezdete

Definíció

Azt a minimális dimenziót, amelyre a fenti tétel igaz $HJ_c(k)$-val jelöljük. Ezek a k, c paraméterű Hales–Jewett-számok.

Hales–Jewett-tétel $\equiv$ a Hales–Jewett-számok végesek.

A bizonyítás k-ra, azaz a táblaszélességre vonatkozó teljes indukcióval történik.

A bizonyítás kezdete

Definíció

Azt a minimális dimenziót, amelyre a fenti tétel igaz $HJ_c(k)$-val jelöljük. Ezek a k, c paraméterű Hales–Jewett-számok.

Hales–Jewett-tétel $\equiv$ a Hales–Jewett-számok végesek.

A bizonyítás k-ra, azaz a táblaszélességre vonatkozó teljes indukcióval történik.

$k = 2$ esetben vegyük észre, hogy a $00\ldots000$, $00\ldots001$,$00\ldots011$, $\ldots$, $01\ldots111$, $11\ldots111$ azaz monoton sorozattal leírt pozíciók ($d+1$ elemű) halmaza olyan, hogy bármely kettő egy egyenest alkot. Ha $d \geq c$, akkor a skatulya-elv garantál két egyszínű elemet, azaz monokromatikus egyenest.

Indukciós lépés struktúrája

Indukciós lépés struktúrája

Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy k-ra teljesül a tétel (HJ-Állítás(k)) és $k+1$-re kell belátni (HJ-Állítás($k+1$)).

Indukciós lépés struktúrája

Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy k-ra teljesül a tétel (HJ-Állítás(k)) és $k+1$-re kell belátni (HJ-Állítás($k+1$)).

Ez a nehéz rész. Két részre bontjuk. Bevezetünk egy köztes állítást, jelölése: Állítás($k+\frac{1}{2}$).

Indukciós lépés struktúrája

Az indukciós lépés: Tegyük fel, hogy k-ra teljesül a tétel (HJ-Állítás(k)) és $k+1$-re kell belátni (HJ-Állítás($k+1$)).

Ez a nehéz rész. Két részre bontjuk. Bevezetünk egy köztes állítást, jelölése: Állítás($k+\frac{1}{2}$).

A bizonyítás menete

$$\text{HJ-Állítás}(k) \Rightarrow \text{Állítás}(k+\frac{1}{2}) \Rightarrow \text{HJ-Állítás}(k).$$

Állítás($k + \frac{1}{2}$) felé: Egy altér struktúrája

Állítás($k + \frac{1}{2}$) felé: Egy altér struktúrája

A szélességet növeljük meg 1-gyel.

Állítás($k + \frac{1}{2}$) felé: Egy altér struktúrája

A szélességet növeljük meg 1-gyel. Alterünket elemeit azonosítjuk U^e_{k+1} pozícióival.

Állítás($k + \frac{1}{2}$) felé: Egy altér struktúrája

A szélességet növeljük meg 1-gyel. Alterünket elemeit azonosítjuk U^e_{k+1} pozícióival. Ebből kiválasztjuk az alábbi részhalmazt

$$U^e_{k+1} \supseteq \{(a_1, a_2, \ldots, a_e) : \text{ ha } a_i = k+1 \text{ , akkor } \forall j > i\text{-re } a_j = k+1\} \stackrel{jel}{=} S^e_{k+1}.$$

Állítás($k+\frac{1}{2}$) felé: Egy altér struktúrája

A szélességet növeljük meg 1-gyel. Alterünket elemeit azonosítjuk U^e_{k+1} pozícióival. Ebből kiválasztjuk az alábbi részhalmazt

$U^e_{k+1} \supseteq \{(a_1, a_2, \ldots, a_e):$ ha $a_i = k+1$, akkor $\forall j > i$-re $a_j = k+1\}$ $\overset{jel}{=} S^e_{k+1}$.

Azaz S^e_{k+1}-t megkaphatjuk a következő módon

$$S^e_{k+1} = \bigcup_{i=0}^{e} S^e_{k+1}(i),$$

ahol $S^e_{k+1}(i)$-ben azok a szám e-sek vannak, amelyben az első $e-i$ darab legfeljebb k, majd i darab $k+1$-es következik.

Állítás$(k+\frac{1}{2})$ felé: Egy altér struktúrája

A szélességet növeljük meg 1-gyel. Alterünket elemeit azonosítjuk U^e_{k+1} pozícióival. Ebből kiválasztjuk az alábbi részhalmazt

$$U^e_{k+1} \supseteq \{(a_1, a_2, \ldots, a_e) : \text{ ha } a_i = k+1 \text{ , akkor } \forall j > i\text{-re } a_j = k+1\} \overset{jel}{=} S^e_{k+1}.$$

Azaz S^e_{k+1}-t megkaphatjuk a következő módon

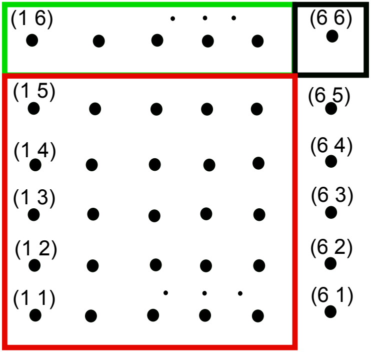
$$S^e_{k+1} = \bigcup_{i=0}^{e} S^e_{k+1}(i),$$

ahol $S^e_{k+1}(i)$-ben azok a szám e-sek vannak, amelyben az első $e-i$ darab legfeljebb k, majd i darab $k+1$-es következik.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a fenti definíció megköveteli, hogy az e-féle csillagunk egy sorrendje rögzített legyen.

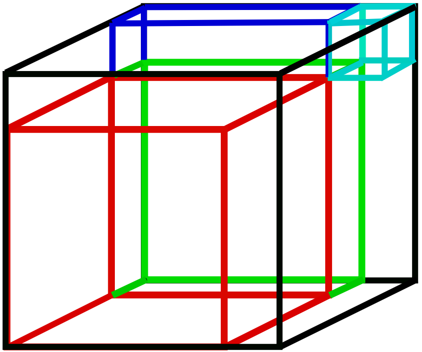
Példa

$k = 6$ és $e = 2$. Az $S_6^2(2)$-nek a fekete négyzet felel meg, mivel ekkor már a_1-től 6-os számjegynek kell állnia mindenhol. A zöld téglalap az $S_6^2(1)$-et, a piros négyzet az $S_6^2(0)$-át jelöli. A nem bekeretezett rész nem felel meg a feltételnek, mert az első helyen 6-os áll, viszont az utána következő helyen már 6-nál kisebb szám áll.



Példa

Az alábbi ábrán $e = 3$ eset látható. A „piros kocka”$= S_k^3(0)$, „zöld téglatest”$= S_6^2(1)$, „kék téglatest”$= S_6^2(2)$ és „világoskék kocka”$= S_6^2(3)$.



Állítás($k + \frac{1}{2}$) felé: Egy altér szép színezése

Állítás($k+\frac{1}{2}$) felé: Egy altér szép színezése

Definíció

Egy altér *szépen színezett*, ha mindegyik $S^e_{k+1}(i)$ halmaz monokromatikus.

Állítás($k + \frac{1}{2}$) felé: Egy altér szép színezése

Definíció

Egy altér *szépen színezett*, ha mindegyik $S^e_{k+1}(i)$ halmaz monokromatikus.

Megjegyezzük, hogy az $S^e_{k+1}(i)$ halmazok ($i = 0, 1, 2, \ldots, e$) nem fedik le az alteret.

Állítás($k+\frac{1}{2}$) felé: Egy altér szép színezése

Definíció

Egy altér *szépen színezett*, ha mindegyik $S^e_{k+1}(i)$ halmaz monokromatikus.

Megjegyezzük, hogy az $S^e_{k+1}(i)$ halmazok ($i = 0, 1, 2, \ldots, e$) nem fedik le az alteret. A le nem fedett részre semmilyen színezési

feltételünk nincs. A különböző i-k által kijelölt részek függetlenek.

Állítás($k + \frac{1}{2}$) felé: Egy altér szép színezése

Definíció

Egy altér *szépen színezett*, ha mindegyik $S^e_{k+1}(i)$ halmaz monokromatikus.

Megjegyezzük, hogy az $S^e_{k+1}(i)$ halmazok ($i = 0, 1, 2, \ldots, e$) nem fedik le az alteret. A le nem fedett részre semmilyen színezési feltételünk nincs. A különböző i-k által kijelölt részek függetlenek. Mindegyikükön monokromatikusnak kell a színezésnek lennei, de a különböző részek lehetnek különböző színűek (ahogy azonos színűek is).

Állítás($k + \frac{1}{2}$) leírása

Állítás($k + \frac{1}{2}$) leírása

Ezekután kimondhatjuk a közbülső állításunkat:

Állítás($k+\frac{1}{2}$) leírása

Ezekután kimondhatjuk a közbülső állításunkat:

Állítás($k+\frac{1}{2}$)

Tetszőleges e és c esetén, elég nagy d dimenzióban U_{k+1}^d pozícióinak tetszőleges c színezésére garantáltan található olyan e-dimenziós altér, ami szépen színezett.

Állítás($k+\frac{1}{2}$) leírása

Ezekután kimondhatjuk a közbülső állításunkat:

Állítás($k+\frac{1}{2}$)

Tetszőleges e és c esetén, elég nagy d dimenzióban U_{k+1}^d pozícióinak tetszőleges c színezésére garantáltan található olyan e-dimenziós altér, ami szépen színezett.

Táblánk U_{k+1}^d lesz. HJ-Állítás(k)-beli táblához képest 1-gyel szélesebb.

Állítás($k+\frac{1}{2}$) leírása

Ezekután kimondhatjuk a közbülső állításunkat:

Állítás($k+\frac{1}{2}$)

Tetszőleges e és c esetén, elég nagy d dimenzióban U_{k+1}^d pozícióinak tetszőleges c színezésére garantáltan található olyan e-dimenziós altér, ami szépen színezett.

Táblánk U_{k+1}^d lesz. HJ-Állítás(k)-beli táblához képest 1-gyel szélesebb. Egy e paraméterünk lesz, ami egy altér dimenziója.

Állítás($k + \frac{1}{2}$) leírása

Ezekután kimondhatjuk a közbülső állításunkat:

Állítás($k + \frac{1}{2}$)

Tetszőleges e és c esetén, elég nagy d dimenzióban U_{k+1}^d pozícióinak tetszőleges c színezésére garantáltan található olyan e-dimenziós altér, ami szépen színezett.

Táblánk U_{k+1}^d lesz. HJ-Állítás(k)-beli táblához képest 1-gyel szélesebb. Egy e paraméterünk lesz, ami egy altér dimenziója. Azaz ismét nehezítünk, egyenes helyett egy előírt dimenziójú alteret keresünk.

Állítás($k+\frac{1}{2}$) leírása

Ezekután kimondhatjuk a közbülső állításunkat:

Állítás($k+\frac{1}{2}$)

Tetszőleges e és c esetén, elég nagy d dimenzióban U_{k+1}^d pozícióinak tetszőleges c színezésére garantáltan található olyan e-dimenziós altér, ami szépen színezett.

Táblánk U_{k+1}^d lesz. HJ-Állítás(k)-beli táblához képest 1-gyel szélesebb. Egy e paraméterünk lesz, ami egy altér dimenziója. Azaz ismét nehezítünk, egyenes helyett egy előírt dimenziójú alteret keresünk. A színezettségnél viszont könnyítünk. Monokromatikusság helyett beérjük szépen színezettséggel.

Állítás($k + \frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ HJ-Állítás($k + 1$)

Állítás($k+\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ HJ-Állítás($k+1$)

Válasszuk e-t HJ-Állítás($k+1$) állítás palettaméretének és a közbülső állítás elég nagy dimenziójában dolgozzunk.

Állítás($k+\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ HJ-Állítás($k+1$)

Válasszuk e-t HJ-Állítás($k+1$) állítás palettaméretének és a közbülső állítás elég nagy dimenziójában dolgozzunk.

A közbülső állítás $e+1$ halmaz monokromatikusságát írja elő.

Állítás($k+\frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ HJ-Állítás($k+1$)

Válasszuk e-t HJ-Állítás($k+1$) állítás palettaméretének és a közbülső állítás elég nagy dimenziójában dolgozzunk.

A közbülső állítás $e+1$ halmaz monokromatikusságát írja elő.

A skatulya-elv alapján lesz kettő, ami azonos színű. A Hales—Jewett-állítás igazolása onnan adódik, hogy az $S^e_{k+1}(i)$ halmazok közül bármely kettő uniója tartalmaz egyenest. (A példák tanulmányozása után egyszerűen ellenőrizhető.)

HJ-Állítás(k) $\Rightarrow$ Állítás($k+\frac{1}{2}$)

HJ-Állítás(k) $\Rightarrow$ Állítás($k+\frac{1}{2}$)

e-re vonatkozó indukcióval igazoljuk az Állítás($k+\frac{1}{2}$)-t.

HJ-Állítás(k) $\Rightarrow$ Állítás($k+\frac{1}{2}$)

e-re vonatkozó indukcióval igazoljuk az Állítás($k+\frac{1}{2}$)-t.

$e=1$ könnyen adódik: U^d_{k+1} pozíciói tartalmazzák a keskenyebb U^d_k táblát, amiben feltevésünk garantál monokromatikus egyenest.

Ez a nagyobb táblában egy egyenes része lesz (a $*$ most már a $k+1$ értéket is felveheti). Azaz a nagyobb táblán a megfelelő egyenes a keskeny, de monokromatikus egyenes egy pozícióval való bővítése. A monokromatikusság elveszhet, de mindenképpen szépen színezett egyenest/1-dimenziós alteret kapunk.

e-ről $e+1$-re való ugrás

e-ről $e+1$-re való ugrás

Az elég nagy d dimenziót $d' + d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz.

e-ről $e+1$-re való ugrás

Az elég nagy d dimenziót $d' + d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz.

Vegyünk egy tetszőleges színezést.

e-ről $e + 1$-re való ugrás

Az elég nagy d dimenziót $d' + d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz.

Vegyünk egy tetszőleges színezést. Meg kell találnunk a szépen színezett $e + 1$-dimenziós alteret.

e-ről $e+1$-re való ugrás

Az elég nagy d dimenziót $d'+d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz.

Vegyünk egy tetszőleges színezést. Meg kell találnunk a szépen színezett $e+1$-dimenziós alteret.

Minden pozíciónak lesz egy első d' koordinátája, ez a pozíció *eleje* és lesz utolsó d'' koordinátája, a pozíció *vége*. (A táblánk két kisebb dimenziós tábla szorzata.)

e-ről $e+1$-re való ugrás

Az elég nagy d dimenziót $d' + d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz.

Vegyünk egy tetszőleges színezést. Meg kell találnunk a szépen színezett $e+1$-dimenziós alteret.

Minden pozíciónak lesz egy első d' koordinátája, ez a pozíció *eleje* és lesz utolsó d'' koordinátája, a pozíció *vége*. (A táblánk két kisebb dimenziós tábla szorzata.)

A pozíció elejét rögzítsük.

e-ről $e+1$-re való ugrás

Az elég nagy d dimenziót $d' + d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz.

Vegyünk egy tetszőleges színezést. Meg kell találnunk a szépen színezett $e+1$-dimenziós alteret.

Minden pozíciónak lesz egy első d' koordinátája, ez a pozíció *eleje* és lesz utolsó d'' koordinátája, a pozíció *vége*. (A táblánk két kisebb dimenziós tábla szorzata.)

A pozíció elejét rögzítsük. A rögzítésre a lehetőségeket $U_{k+1}^{d'}$ pozícióival azonosíthatjuk.

e-ről $e+1$-re való ugrás

Az elég nagy d dimenziót $d' + d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz.

Vegyünk egy tetszőleges színezést. Meg kell találnunk a szépen színezett $e+1$-dimenziós alteret.

Minden pozíciónak lesz egy első d' koordinátája, ez a pozíció *eleje* és lesz utolsó d'' koordinátája, a pozíció *vége*. (A táblánk két kisebb dimenziós tábla szorzata.)

A pozíció elejét rögzítsük. A rögzítésre a lehetőségeket $U_{k+1}^{d'}$ pozícióival azonosíthatjuk.

Egy rögzítéshez a lehetséges végek $U_{k+1}^{d''}$ pozícióival azonosíthatók. Ebben mindegyik vég (a rögzített elejével) leír egy színezett pozíciót a teljes táblában.

e-ről $e+1$-re való ugrás

Az elég nagy d dimenziót $d'+d''$ alakban keressük, ahol mindkét tag megfelelően nagy lesz.

Vegyünk egy tetszőleges színezést. Meg kell találnunk a szépen színezett $e+1$-dimenziós alteret.

Minden pozíciónak lesz egy első d' koordinátája, ez a pozíció *eleje* és lesz utolsó d'' koordinátája, a pozíció *vége*. (A táblánk két kisebb dimenziós tábla szorzata.)

A pozíció elejét rögzítsük. A rögzítésre a lehetőségeket $U_{k+1}^{d'}$ pozícióival azonosíthatjuk.

Egy rögzítéshez a lehetséges végek $U_{k+1}^{d''}$ pozícióival azonosíthatók. Ebben mindegyik vég (a rögzített elejével) leír egy színezett pozíciót a teljes táblában. Azaz a rögzítéshez tartozik egy színezett $U_{k+1}^{d''}$.

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U_{k+1}^{d''}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van.

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U_{k+1}^{d''}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek”.

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U_{k+1}^{d''}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek''.

Azaz $U_{k+1}^{d'}$ táblának van egy szuper-színezése.

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U^{d''}_{k+1}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek”.

Azaz $U^{d'}_{k+1}$ táblának van egy szuper-színezése. Ebben található egy szépen színezett egyenes (lásd $e=1$ esete). Az egyenes kijelölése: első d' koordinátát „csillagozzuk $*$-gal, illetve rögzítjük”.

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U_{k+1}^{d''}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek”.

Azaz $U_{k+1}^{d'}$ táblának van egy szuper-színezése. Ebben található egy szépen színezett egyenes (lásd $e=1$ esete). Az egyenes kijelölése: első d' koordinátát „csillagozzuk $*$-gal, illetve rögzítjük”.

A szépen színezett egyenes $S_{k+1}^{1}(0)$ részhalmaza monokromatikus, azaz mindegyik eleméhez — pozíció előhöz — ugyanaz a szuper-szín, azaz ugyanaz a színezett $U_{k+1}^{d''}$ tábla tartozik.

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U^{d''}_{k+1}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek".

Azaz $U^{d'}_{k+1}$ táblának van egy szuper-színezése. Ebben található egy szépen színezett egyenes (lásd $e=1$ esete). Az egyenes kijelölése: első d' koordinátát „csillagozzuk $*$-gal, illetve rögzítjük".

A szépen színezett egyenes $S^1_{k+1}(0)$ részhalmaza monokromatikus, azaz mindegyik eleméhez — pozíció előhöz — ugyanaz a szuper-szín, azaz ugyanaz a színezett $U^{d''}_{k+1}$ tábla tartozik.

d'' legyen olyan nagy, hogy ebben legyen e-dimenziós szépen színezett altér. Ezen altér kijelölése: az utolsó d'' koordinátát „csillagozzuk $*_1, *_2, \ldots, *_e$-vel, illetve rögzítjük".

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U_{k+1}^{d''}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek”.

Azaz $U_{k+1}^{d'}$ táblának van egy szuper-színezése. Ebben található egy szépen színezett egyenes (lásd $e=1$ esete). Az egyenes kijelölése: első d' koordinátát „csillagozzuk $*$-gal, illetve rögzítjük”.

A szépen színezett egyenes $S_{k+1}^{1}(0)$ részhalmaza monokromatikus, azaz mindegyik eleméhez — pozíció előhöz — ugyanaz a szuper-szín, azaz ugyanaz a színezett $U_{k+1}^{d''}$ tábla tartozik.

d'' legyen olyan nagy, hogy ebben legyen e-dimenziós szépen színezett altér. Ezen altér kijelölése: az utolsó d'' koordinátát „csillagozzuk $*_1, *_2, \ldots, *_e$-vel, illetve rögzítjük”.

Az egyenes és az altér kijelölése a teljes tábla egy $e+1$-dimenziós alteréhez vezet (a csillagok sorrendje: $*, *_1, *_2, \ldots, *_e$).

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U_{k+1}^{d''}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek”.

Azaz $U_{k+1}^{d'}$ táblának van egy szuper-színezése. Ebben található egy szépen színezett egyenes (lásd $e=1$ esete). Az egyenes kijelölése: első d' koordinátát „csillagozzuk $*$-gal, illetve rögzítjük”.

A szépen színezett egyenes $S_{k+1}^{1}(0)$ részhalmaza monokromatikus, azaz mindegyik eleméhez — pozíció előhöz — ugyanaz a szuper-szín, azaz ugyanaz a színezett $U_{k+1}^{d''}$ tábla tartozik.

d'' legyen olyan nagy, hogy ebben legyen e-dimenziós szépen színezett altér. Ezen altér kijelölése: az utolsó d'' koordinátát „csillagozzuk $*_1, *_2, \ldots, *_e$-vel, illetve rögzítjük”.

Az egyenes és az altér kijelölése a teljes tábla egy $e+1$-dimenziós alteréhez vezet (a csillagok sorrendje: $*, *_1, *_2, \ldots, *_e$).

Azt álítjuk, hogy ez szépen színezett.

e-ről $e+1$-re való ugrás (folytatás)

$U_{k+1}^{d''}$ színezésére $c^{(k+1)^{d''}}$ darab lehetőség van. Mindegyiket felfoghatjuk egy „szuper-színnek”.

Azaz $U_{k+1}^{d'}$ táblának van egy szuper-színezése. Ebben található egy szépen színezett egyenes (lásd $e=1$ esete). Az egyenes kijelölése: első d' koordinátát „csillagozzuk $*$-gal, illetve rögzítjük”.

A szépen színezett egyenes $S_{k+1}^{1}(0)$ részhalmaza monokromatikus, azaz mindegyik eleméhez — pozíció előhöz — ugyanaz a szuper-szín, azaz ugyanaz a színezett $U_{k+1}^{d''}$ tábla tartozik.

d'' legyen olyan nagy, hogy ebben legyen e-dimenziós szépen színezett altér. Ezen altér kijelölése: az utolsó d'' koordinátát „csillagozzuk $*_1, *_2, \ldots, *_e$-vel, illetve rögzítjük”.

Az egyenes és az altér kijelölése a teljes tábla egy $e+1$-dimenziós alteréhez vezet (a csillagok sorrendje: $*, *_1, *_2, \ldots, *_e$).

Azt álítjuk, hogy ez szépen színezett. Ez könnyen ellenőrizhető.

Szünet

Sűrűség vs struktúra

Sűrűség vs struktúra

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél.

Sűrűség vs struktúra

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél. Az $\binom{n}{2}$ élt két kategóriába osztjuk.

Sűrűség vs struktúra

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél. Az $\binom{n}{2}$ élt két kategóriába osztjuk. A többséget legalább $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ él alkotja.

Sűrűség vs struktúra

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél. Az $\binom{n}{2}$ élt két kategóriába osztjuk. A többséget legalább $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ él alkotja.

Felmerül hogy ez az egyszínű élek sokasága már garantálja, hogy ebben a színben nagy monokromatikus halmaz alakuljon ki.

Sűrűség vs struktúra

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél. Az $\binom{n}{2}$ élt két kategóriába osztjuk. A többséget legalább $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ él alkotja.

Felmerül hogy ez az egyszínű élek sokasága már garantálja, hogy ebben a színben nagy monokromatikus halmaz alakuljon ki. Az első gondolatot Turán-tétele rögtön megcáfolja.

Sűrűség vs struktúra

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél. Az $\binom{n}{2}$ élt két kategóriába osztjuk. A többséget legalább $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ él alkotja.

Felmerül hogy ez az egyszínű élek sokasága már garantálja, hogy ebben a színben nagy monokromatikus halmaz alakuljon ki. Az első gondolatot Turán-tétele rögtön megcáfolja. Több mint az élek fele lehet piros úgy, hogy három elemű piros-monokromatikus csúcshalmaz se legyen.

Sűrűség vs struktúra

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél. Az $\binom{n}{2}$ élt két kategóriába osztjuk. A többséget legalább $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ él alkotja.

Felmerül hogy ez az egyszínű élek sokasága már garantálja, hogy ebben a színben nagy monokromatikus halmaz alakuljon ki. Az első gondolatot Turán-tétele rögtön megcáfolja. Több mint az élek fele lehet piros úgy, hogy három elemű piros-monokromatikus csúcshalmaz se legyen.

Ha nagyobb monokromatikus halmaz a célunk, akkor még több él megadható a nagy monokromatikus halmaz elkerülésével.

Sűrűség vs struktúra

A gráfelméleti Ramsey-tétel egy nyelvezete a teljes gráf éleinek tetszőleges piros/kék színezéséről beszél. Az $\binom{n}{2}$ élt két kategóriába osztjuk. A többséget legalább $\frac{1}{2}\binom{n}{2}$ él alkotja.

Felmerül hogy ez az egyszínű élek sokasága már garantálja, hogy ebben a színben nagy monokromatikus halmaz alakuljon ki. Az első gondolatot Turán-tétele rögtön megcáfolja. Több mint az élek fele lehet piros úgy, hogy három elemű piros-monokromatikus csúcshalmaz se legyen.

Ha nagyobb monokromatikus halmaz a célunk, akkor még több él megadható a nagy monokromatikus halmaz elkerülésével. Ramsey tételének igaz mivolta struktúrális okú. Ha a piros élek elkerülik nagy monokromatikus halmaz kialakítását, akkor a komplementerélhalmaz (a kék élek) már nem lehet hasonló struktúrájú.

Sűrűség vs struktúra (folytatás)

Sűrűség vs struktúra (folytatás)

Más esetben azonban a sűrűség okozhatja a szabályos rész kialakulását.

Sűrűség vs struktúra (folytatás)

Más esetben azonban a sűrűség okozhatja a szabályos rész kialakulását.

Erdős Pál és Turán Pál ezt sejtésként mondta ki a van der Waerden-tétel esetére.

Sűrűség vs struktúra (folytatás)

Más esetben azonban a sűrűség okozhatja a szabályos rész kialakulását.

Erdős Pál és Turán Pál ezt sejtésként mondta ki a van der Waerden-tétel esetére.

Az eddig megemlített Ramsey-tételeket a következő táblázatban foglaljuk össze:

Összegzés

Tétel	Színezendő struktúra	Keresett monokromatikus részstruktúra	Lehetséges színosztály maximális mérete
Ramsey-tétel	n pontú teljes gráf élei	3 pontú teljes gráf élei	$K_{\lfloor n/2\rfloor,\lceil n/2\rceil}$, az n pontú, kétrészes Turán-gráf
Ramsey-tétel	n pontú teljes gráf élei	k pontú teljes gráf élei	$T_{n,k-1}$ az n pontú, $k-1$ részes Turán-gráf
Schur-tétel	$[n]$	$\{x, y, x+y\}$	I. Példa: a páratlan számok. II. Példa: $[n]\setminus[\lfloor n/2\rfloor]$, azaz a „nagy számok $[n]$-ban”.
van der Waerden tétele	$[n]$	k hosszú (nem-konstans) számtani sorozat	???

Erdős—Turán-tétel

Erdős—Turán-tétel

Erdős Pál és Turán Pál sejtette, hogy ??? helyére nem létezik jó példa, azaz nem lehet megadni $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy „jelentős" részét úgy, hogy az ne tartalmazzon k hosszú számtani sorozatot.

Erdős—Turán-tétel

Erdős Pál és Turán Pál sejtette, hogy ??? helyére nem létezik jó példa, azaz nem lehet megadni $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy „jelentős" részét úgy, hogy az ne tartalmazzon k hosszú számtani sorozatot.

Eszerint a van der Warden-tétel egyfajta indoklása egy sűrűségi indoklás.

Erdős—Turán-tétel

Erdős Pál és Turán Pál sejtette, hogy ??? helyére nem létezik jó példa, azaz nem lehet megadni $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy „jelentős" részét úgy, hogy az ne tartalmazzon k hosszú számtani sorozatot.

Eszerint a van der Warden-tétel egyfajta indoklása egy sűrűségi indoklás. Ami jóval erősebb mint a Ramsey-tételek szokásos kombinatorikus bizonyítása.

Erdős—Turán-tétel

Erdős Pál és Turán Pál sejtette, hogy ??? helyére nem létezik jó példa, azaz nem lehet megadni $\{1, 2, \ldots, n\}$ egy „jelentős” részét úgy, hogy az ne tartalmazzon k hosszú számtani sorozatot.

Eszerint a van der Warden-tétel egyfajta indoklása egy sűrűségi indoklás. Ami jóval erősebb mint a Ramsey-tételek szokásos kombinatorikus bizonyítása.

Definíció

$$r_k(n) = \max\{|R| : R \subseteq [n],\ R\text{-ben nincs } k \text{ hosszú számtani sorozat}\}.$$

Erdős—Turán-tétel

Erdős Pál és Turán Pál sejtette, hogy ??? helyére nem létezik jó példa, azaz nem lehet megadni $\{1, 2, \dots, n\}$ egy „jelentős" részét úgy, hogy az ne tartalmazzon k hosszú számtani sorozatot.

Eszerint a van der Warden-tétel egyfajta indoklása egy sűrűségi indoklás. Ami jóval erősebb mint a Ramsey-tételek szokásos kombinatorikus bizonyítása.

Definíció

$$r_k(n) = \max\{|R| : R \subseteq [n],\ R\text{-ben nincs } k \text{ hosszú számtani sorozat}\}.$$

(Erdős Pál—Turán Pál, 1936)

$r_k(n) = o(n)$, ha $k \geq 3$.

Eredmények

Eredmények

Erdős Pál—Turán Pál-sejtés: Minden pozitív ε esetén, ha n elég nagy, akkor $r_k(n) \leq \varepsilon n$.

Eredmények

Erdős Pál—Turán Pál-sejtés: Minden pozitív ε esetén, ha n elég nagy, akkor $r_k(n) \leq \varepsilon n$.

(Roth tétele, 1956)

$$r_3(n) = o(n).$$

Eredmények

Erdős Pál—Turán Pál-sejtés: Minden pozitív ε esetén, ha n elég nagy, akkor $r_k(n) \leq \varepsilon n$.

(Roth tétele, 1956)

$$r_3(n) = o(n).$$

Majd Szemerédi Endre a négy hosszú számtani sorozatok esetét bizonyította, később pedig következett az általános eset.

Eredmények

Erdős Pál—Turán Pál-sejtés: Minden pozitív ε esetén, ha n elég nagy, akkor $r_k(n) \leq \varepsilon n$.

(Roth tétele, 1956)

$$r_3(n) = o(n).$$

Majd Szemerédi Endre a négy hosszú számtani sorozatok esetét bizonyította, később pedig következett az általános eset.

(Szemerédi Endre, 1975)

Minden $k \geq 3$ esetén igaz a sejtés. Azaz

$$r_k(n) = o(n).$$

Eredmények II

Eredmények II

A sejtés bizonyítása után a kérdéskör vizsgálata szinte még pezsgőbb lett. Csak a legkiemelkedőbb eredményeket vázoljuk.

Eredmények II

A sejtés bizonyítása után a kérdéskör vizsgálata szinte még pezsgőbb lett. Csak a legkiemelkedőbb eredményeket vázoljuk.

A tételt többször újra bizonyították:

Eredmények II

A sejtés bizonyítása után a kérdéskör vizsgálata szinte még pezsgőbb lett. Csak a legkiemelkedőbb eredményeket vázoljuk.

A tételt többször újra bizonyították:

- 1977 Fürstenberg. Bizonyítása ergodelméletet használ.

Eredmények II

A sejtés bizonyítása után a kérdéskör vizsgálata szinte még pezsgőbb lett. Csak a legkiemelkedőbb eredményeket vázoljuk.

A tételt többször újra bizonyították:

- 1977 Fürstenberg. Bizonyítása ergodelméletet használ.
- 2001 Gowers. Bizonyítása erős kombinatorikus számelméleti eredményeket és Fourier-technikát használ.

Eredmények II

A sejtés bizonyítása után a kérdéskör vizsgálata szinte még pezsgőbb lett. Csak a legkiemelkedőbb eredményeket vázoljuk.

A tételt többször újra bizonyították:

- 1977 Fürstenberg. Bizonyítása ergodelméletet használ.
- 2001 Gowers. Bizonyítása erős kombinatorikus számelméleti eredményeket és Fourier-technikát használ. A Fourier-módszer használatát Roth vezette be, de eredményes kihasználása további zseniális ötleteket kívánt.

Gowers becslése

Gowers becslése

Gowers új bizonyítása azért is kiemelkedő, mert az eredeti kombinatorikus, illetve későbbi ergodelméleti bizonyítás szükségszerűen nem adott becslést az $r_k(n)$ számokra. qpa A Fourier-módszer alkalmazása viszont effektív becsléseket is ad. Így mellékeredményként adódott a van der Waerden számok következő becslése.

Gowers becslése

Gowers új bizonyítása azért is kiemelkedő, mert az eredeti kombinatorikus, illetve későbbi ergodelméleti bizonyítás szükségszerűen nem adott becslést az $r_k(n)$ számokra. qpa A Fourier-módszer alkalmazása viszont effektív becsléseket is ad. Így mellékeredményként adódott a van der Waerden számok következő becslése.

(Gowers-becslés)

$$W_2(k) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{k+9}}}}}.$$

Green és Tao tétele

Green és Tao tétele

A fenti módszerek összes erejére és még többre volt szükség, hogy az alábbi eredmény adódjon.

Green és Tao tétele

A fenti módszerek összes erejére és még többre volt szükség, hogy az alábbi eredmény adódjon.

Green—Tao-tétel

Minden k pozitív egészre a prímek között van k hosszú számtani sorozat.

Green és Tao tétele

A fenti módszerek összes erejére és még többre volt szükség, hogy az alábbi eredmény adódjon.

Green—Tao-tétel

Minden k pozitív egészre a prímek között van k hosszú számtani sorozat.

Terence Tao 2006-ban Fields-érmet kapott. Az odaítélés indoklásában a fenti eredmény ki lett emelve.

Green és Tao tétele

A fenti módszerek összes erejére és még többre volt szükség, hogy az alábbi eredmény adódjon.

Green—Tao-tétel

Minden k pozitív egészre a prímek között van k hosszú számtani sorozat.

Terence Tao 2006-ban Fields-érmet kapott. Az odaítélés indoklásában a fenti eredmény ki lett emelve. A tétel oka ismét sűrűségi.

Green és Tao tétele

A fenti módszerek összes erejére és még többre volt szükség, hogy az alábbi eredmény adódjon.

Green—Tao-tétel

Minden k pozitív egészre a prímek között van k hosszú számtani sorozat.

Terence Tao 2006-ban Fields-érmet kapott. Az odaítélés indoklásában a fenti eredmény ki lett emelve. A tétel oka ismét sűrűségi.

(Green—Tao-tétel, sűrűségi változat)

Legyen $P_n = \{2, 3, 5, 7, 11, p_6, \ldots, p_n\}$ az első n prím halmaza. Legyen ϵ tetszőleges (kicsi) pozitív konstans. Ha $A \subset \mathbb{N}$ teljesíti, hogy $|A \cap P_n| \geq \epsilon n$ végtelen sok n-re, akkor A-ban van k hosszú számtani sorozat minden k pozitív egészre.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!