Extremális gráfelmélet

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Emlékeztető

Emlékeztető

Emlékeztető

A G gráfban $K \subset V(G)$ egy *klikk*, ha tetszőleges két különböző eleme szomszédos.

Emlékeztető

Emlékeztető

A G gráfban $K \subset V(G)$ egy *klikk*, ha tetszőleges két különböző eleme szomszédos.

$$\omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}$$

Emlékeztető

Emlékeztető

A G gráfban $K \subset V(G)$ egy *klikk*, ha tetszőleges két különböző eleme szomszédos.

$$\omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}$$

Emlékeztető

Egy G gráf esetén az $F \subset V(G)$ halmazt *független halmaznak* nevezzük, ha bármely $e \in E(G)$ esetén e-nek nincs mindkét végpontja F-ben.

Emlékeztető

Emlékeztető

A G gráfban $K \subset V(G)$ egy *klikk*, ha tetszőleges két különböző eleme szomszédos.

$$\omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}$$

Emlékeztető

Egy G gráf esetén az $F \subset V(G)$ halmazt *független halmaznak* nevezzük, ha bármely $e \in E(G)$ esetén e-nek nincs mindkét végpontja F-ben.

$$\alpha(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}$$

Emlékeztető

Emlékeztető

A G gráfban $K \subset V(G)$ egy *klikk*, ha tetszőleges két különböző eleme szomszédos.

$$\omega(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}$$

Emlékeztető

Egy G gráf esetén az $F \subset V(G)$ halmazt *független halmaznak* nevezzük, ha bármely $e \in E(G)$ esetén e-nek nincs mindkét végpontja F-ben.

$$\alpha(G) = \max\{|K| : \ K \text{ klikk}\}$$

Ezen a héten mindig FELTESSZÜK, hogy EGYSZERŰ GRÁFOKKAL DOLGOZUNK.

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Inicializálás:

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Inicializálás: Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Inicializálás: Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független halmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk.

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Inicializálás: Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független halmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Inicializálás: Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független halmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Inicializálás: Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független halmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**

Válasszunk ki egy tetszőleges x csúcsot T-ból.

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Inicializálás: Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független halmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**

Válasszunk ki egy tetszőleges x csúcsot T-ból.

// x-szel növeljük F-et $K \leftarrow K \cup \{x\}$ $T \leftarrow T - \{x\} - N_T(x)$

Nagy független halmazt kereső algoritmus

Mohó algoritmus nagy független halmaz keresésére

Input: Egy G egyszerű gráf

Output: Egy F független ponthalmaz

Inicializálás: Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független halmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**

Válasszunk ki egy tetszőleges x csúcsot T-ból.

// x-szel növeljük F-et $K \leftarrow K \cup \{x\}$ $T \leftarrow T - \{x\} - N_T(x)$

// Az x csúcs beválasztását a „nem-szomszédai” élik túl.

Az algoritmus analízise

Az algoritmus analízise

Lemma

A mohó független ponthalmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább

$$\frac{|V(G)|}{D(G)+1}.$$

Az algoritmus analízise

Lemma

A mohó független ponthalmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább

$$\frac{|V(G)|}{D(G)+1}.$$

Minden mohó növelési lépésben T legfeljebb $D(G)+1$ csúccsal csökken.

Az algoritmus analízise

Lemma

A mohó független ponthalmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább

$$\frac{|V(G)|}{D(G)+1}.$$

Minden mohó növelési lépésben T legfeljebb $D(G)+1$ csúccsal csökken.

Az output mérete megegyezik a növelési lépések számával, amelyek során T a kezdeti $|V(G)|$ elemszámról 0-ra csökken.

Az algoritmus analízise

Lemma

A mohó független ponthalmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább

$$\frac{|V(G)|}{D(G)+1}.$$

Minden mohó növelési lépésben T legfeljebb $D(G)+1$ csúccsal csökken.

Az output mérete megegyezik a növelési lépések számával, amelyek során T a kezdeti $|V(G)|$ elemszámról 0-ra csökken.

Azaz legalább $|V(G)|/(D(G)+1)$ növelési lépést végeztünk.

Az analízis lényege

Az analízis lényege

A bizonyítás alapgondolata egyszerű, érdemes összefoglalni.

Az analízis lényege

A bizonyítás alapgondolata egyszerű, érdemes összefoglalni.

Azt mondhatjuk, hogy minden növelési lépésnél T-ból „leharapunk" egy darabot. A leharapott rész elemszámát felülről becsültük. Az algoritmus során egész T-t „megettük", így a harapások számára egy alsó becslés adódott.

Az analízis lényege

A bizonyítás alapgondolata egyszerű, érdemes összefoglalni.

Azt mondhatjuk, hogy minden növelési lépésnél T-ból „leharapunk” egy darabot. A leharapott rész elemszámát felülről becsültük. Az algoritmus során egész T-t „megettük”, így a harapások számára egy alsó becslés adódott.

Így x-re egy logikus választás az a csúcs T-ből, amely a legkisebb harapáshoz vezet, azaz amelynek legkevesebb szomszédja van T-ban.

Javított mohó algoritmus

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk.

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**
Válasszunk ki egy olyan x csúcsot T-ből, amelynek minimális számú szomszédja van $G|_T$-ben.

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**
Válasszunk ki egy olyan x csúcsot T-ből, amelynek minimális számú szomszédja van $G|_T$-ben.
$F \leftarrow F \cup \{x\}$

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**
Válasszunk ki egy olyan x csúcsot T-ből, amelynek minimális számú szomszédja van $G|_T$-ben.
$F \leftarrow F \cup \{x\}$
// x-szel növeljük F-et

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**
Válasszunk ki egy olyan x csúcsot T-ből, amelynek minimális számú szomszédja van $G|_T$-ben.
$F \leftarrow F \cup \{x\}$
// x-szel növeljük F-et
$T \leftarrow T - (\{x\} \cup N_T(x))$

Javított mohó algoritmus

Algoritmus

Inicializálás:

Legyen $F := \emptyset$, $T := V(G)$.

// F egy független ponthalmaz, amelyet az algoritmus során mohó módon növelünk. T a túlélő csúcsok halmaza, amely vizsgálata ezek után következik.

Amíg $T \neq \emptyset$ **Mohó növelés:**
Válasszunk ki egy olyan x csúcsot T-ből, amelynek minimális számú szomszédja van $G|_T$-ben.
$F \leftarrow F \cup \{x\}$
// x-szel növeljük F-et
$T \leftarrow T - (\{x\} \cup N_T(x))$
// A beválasztott x-szel együtt szomszédait is kivesszük a túlélő csúcsok halmazából.

Javított algoritmus analízise

Javított algoritmus analízise

Tétel (Turán-tétel, algoritmikus alak)

A módosított mohó független halmazt kereső algoritmus outputjának mérete legalább

$$\frac{|V(G)|}{\overline{d}(G)+1},$$

ahol $\overline{d}(G)$ az átlagos fokszám, azaz $\overline{d}(G) = \frac{\sum_{x\in V} d(x)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|}$.

Bizonyítás

Bizonyítás

Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Bizonyítás

Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Legyen H_i az i-edik növelési lépésnél T-ből elhagyott csúcsok halmaza (az i-edik harapás).

Bizonyítás

Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Legyen H_i az i-edik növelési lépésnél T-ből elhagyott csúcsok halmaza (az i-edik harapás).

x_i legyen az i-edik növelési lépésnél kiválasztott csúcs.

Bizonyítás

Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Legyen H_i az i-edik növelési lépésnél T-ből elhagyott csúcsok halmaza (az i-edik harapás).

x_i legyen az i-edik növelési lépésnél kiválasztott csúcs. Ekkor $x_i \in H_i$.

Bizonyítás

Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Legyen H_i az i-edik növelési lépésnél T-ből elhagyott csúcsok halmaza (az i-edik harapás).

x_i legyen az i-edik növelési lépésnél kiválasztott csúcs. Ekkor $x_i \in H_i$.

Nyilván $V(G) = H_1 \dot\cup H_2 \dot\cup \ldots \dot\cup H_\ell$, ahol ℓ a növelési lépések száma, azaz az output mérete.

Bizonyítás

Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf és futassuk a módosított mohó algoritmust rajta.

Legyen H_i az i-edik növelési lépésnél T-ből elhagyott csúcsok halmaza (az i-edik harapás).

x_i legyen az i-edik növelési lépésnél kiválasztott csúcs. Ekkor $x_i \in H_i$.

Nyilván $V(G) = H_1 \dot\cup H_2 \dot\cup \ldots \dot\cup H_\ell$, ahol ℓ a növelési lépések száma, azaz az output mérete.

Legyen $\mathcal{E} = \mathcal{E}(H_1, H_2, \ldots, H_\ell)$ az az egyszerű gráf, ahol két pont akkor és csak akkor szomszédos, ha ugyanahhoz az H_i-hez tartoznak.

Bizonyítás (1. észrevétel)

Bizonyítás (1. észrevétel)

Észrevétel

Minden x csúcsra $d_G(x) \geq d_{\mathcal{E}}(x)$, speciálisan

$$|E(\mathcal{E}(H_1, \ldots, H_\ell))| \leq |E(G)|.$$

Bizonyítás (1. észrevétel)

Észrevétel

Minden x csúcsra $d_G(x) \geq d_{\mathcal{E}}(x)$, speciálisan

$$|E(\mathcal{E}(H_1, \ldots, H_\ell))| \leq |E(G)|.$$

Egy $x \in H_i$ csúcsban összefutó éleket két csoportba sorolhatunk: $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}$-be, illetve $H_i \cup \ldots \cup H_\ell$-be vezető élek.

Bizonyítás (1. észrevétel)

Észrevétel

Minden x csúcsra $d_G(x) \geq d_{\mathcal{E}}(x)$, speciálisan

$$|E(\mathcal{E}(H_1, \ldots, H_\ell))| \leq |E(G)|.$$

Egy $x \in H_i$ csúcsban összefutó éleket két csoportba sorolhatunk: $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}$-be, illetve $H_i \cup \ldots \cup H_\ell$-be vezető élek.

Ezek száma legyen $d^{\text{hátra}}(x)$, illetve $d^{\text{előre}}(x)$ $(d(x) = d^{\text{hátra}}(x) + d^{\text{előre}}(x))$.

Bizonyítás (1. észrevétel)

Észrevétel

Minden x csúcsra $d_G(x) \geq d_{\mathcal{E}}(x)$, speciálisan

$$|E(\mathcal{E}(H_1, \ldots, H_\ell))| \leq |E(G)|.$$

Egy $x \in H_i$ csúcsban összefutó éleket két csoportba sorolhatunk: $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_{i-1}$-be, illetve $H_i \cup \ldots \cup H_\ell$-be vezető élek.

Ezek száma legyen $d^{\text{hátra}}(x)$, illetve $d^{\text{előre}}(x)$ $(d(x) = d^{\text{hátra}}(x) + d^{\text{előre}}(x))$.

Tudva, hogy $x \in H_i$ nyilván $d_{\mathcal{E}}^{\text{hátra}}(x) = 0 \leq d_G^{\text{hátra}}(x)$, illetve

$$d_{\mathcal{E}}^{\text{előre}}(x) = |H_i| - 1 = d_G^{\text{előre}}(x_i) \leq d_G^{\text{előre}}(x),$$

a $d_{\mathcal{E}}(x) \leq d_G(x)$ egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Bizonyítás (2. észrevétel)

Bizonyítás (2. észrevétel)

Legyen $h_i = |H_i|$,

Bizonyítás (2. észrevétel)

Legyen $h_i = |H_i|$, azaz ℓ darab h_i összege $n := |V|$-t adja.

Bizonyítás (2. észrevétel)

Legyen $h_i = |H_i|$, azaz ℓ darab h_i összege $n := |V|$-t adja.

Ekkor

$$|E(G)| \geq |E(\mathcal{E})| = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{h_i}{2} \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a Jensen-egyenlőtlenség:

Bizonyítás (2. észrevétel)

Legyen $h_i = |H_i|$, azaz ℓ darab h_i összege $n := |V|$-t adja.

Ekkor

$$|E(G)| \geq |E(\mathcal{E})| = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{h_i}{2} \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a Jensen-egyenlőtlenség: $\binom{x}{2} = x(x-1)/2$ konvex függvény.

Bizonyítás (2. észrevétel)

Legyen $h_i = |H_i|$, azaz ℓ darab h_i összege $n := |V|$-t adja.

Ekkor

$$|E(G)| \geq |E(\mathcal{E})| = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{h_i}{2} \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a Jensen-egyenlőtlenség: $\binom{x}{2} = x(x-1)/2$ konvex függvény.

Észrevétel

$$\mu_{n,\ell} := \min\{|E(\mathcal{E}(H_1, \ldots, H_\ell))|\} \geq \ell \binom{n/\ell}{2}.$$

Bizonyítás (2. észrevétel)

Legyen $h_i = |H_i|$, azaz ℓ darab h_i összege $n := |V|$-t adja.

Ekkor

$$|E(G)| \geq |E(\mathcal{E})| = \sum_{i=1}^{\ell} \binom{h_i}{2} \geq \ell \binom{|V|/\ell}{2},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a Jensen-egyenlőtlenség: $\binom{x}{2} = x(x-1)/2$ konvex függvény.

Észrevétel

$$\mu_{n,\ell} := \min\{|E(\mathcal{E}(H_1, \ldots, H_\ell))|\} \geq \ell \binom{n/\ell}{2}.$$

A Turán-tétel algoritmikus alakjának bizonyítása: A bizonyítandó egyenlőtlenség a két észrevétel alkalmazásával, egyszerű rendezéssel kapható.

Új észrevétel

Új észrevétel

Az eddigi gondolatain egy másik megfogalmazása:

Új észrevétel

Az eddigi gondolatain egy másik megfogalmazása:

Új észrevétel

Az eddigi gondolatain egy másik megfogalmazása:

Észrevétel

Ha

$$|E(G)| < \mu_{n,\ell},$$

akkor módosított mohó algoritmusunk garantáltan legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt, azaz talál egy legalább $\ell + 1$ elemű független ponthalmazt.

Új észrevétel

Az eddigi gondolatain egy másik megfogalmazása:

Észrevétel

Ha

$$|E(G)| < \mu_{n,\ell},$$

akkor módosított mohó algoritmusunk garantáltan legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt, azaz talál egy legalább $\ell + 1$ elemű független ponthalmazt.

A módosított mohó algoritmus analízisében becsültük $\mu_{n,\ell}$ értékét a Jensen-egyenlőtlenséggel. Ez éles becslés a valós számok között. Esetünkben ez nem szükségszerű.

Kiegyensúlyozott osztályozások

Definíció

Egy halmaz k osztályra történő osztályozására azt mondjuk, hogy osztályai *majdnem ugyanakkorák* vagy az osztályozás *kiegyensúlyozott*, ha a következő ekvivalens állítások egyike/mindegyike teljesül

(i) Minden O osztályra $|O| \in \left\{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right\}$.

(ii) Bármely két, O és O', osztályra $||O| - |O'|| \leq 1$.

(iii) $n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ darab $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ méretű és $k - \left(n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$ darab $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ méretű osztály van.

Kiegyensúlyozott ekvivalenciagráfok, Turán-gráfok

Kiegyensúlyozott ekvivalenciagráfok, Turán-gráfok

efiníció: $\mathcal{E}_{n,k}$ (n pontú, k részes) kiegyensúlyozott ekvivalenciagráf

A csúcshalmaza egy n elemű $V = O_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} O_k$, ahol az osztályok „majdnem” ugyanakkorák.
A kiegyensúlyozott ekvivalenciagráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha egy osztályokba esnek.

Kiegyensúlyozott ekvivalenciagráfok, Turán-gráfok

efiníció: $\mathcal{E}_{n,k}$ (n pontú, k részes) kiegyensúlyozott ekvivalenciagráf

A csúcshalmaza egy n elemű $V = O_1 \dot\cup \ldots \dot\cup O_k$, ahol az osztályok „majdnem” ugyanakkorák.
A kiegyensúlyozott ekvivalenciagráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha egy osztályokba esnek.

Definíció: $T_{n,k}$ n pontú, k részes Turán-gráf

A $T_{n,k}$ (n pontú, k részes) Turán-gráf csúcshalmaza V, amelyre $|V| = n$ és a csúcshalmazt k diszjunkt osztály adja ki:
$V = O_1 \dot\cup \ldots \dot\cup O_k$, ahol az osztályok „majdnem” ugyanakkorák.
A Turán-gráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha különböző osztályokba esnek.

Kiegyensúlyozott ekvivalenciagráfok, Turán-gráfok

efiníció: $\mathcal{E}_{n,k}$ (n pontú, k részes) kiegyensúlyozott ekvivalenciagráf

A csúcshalmaza egy n elemű $V = O_1 \dot\cup \ldots \dot\cup O_k$, ahol az osztályok „majdnem” ugyanakkorák.
A kiegyensúlyozott ekvivalenciagráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha egy osztályokba esnek.

Definíció: $T_{n,k}$ n pontú, k részes Turán-gráf

A $T_{n,k}$ (n pontú, k részes) Turán-gráf csúcshalmaza V, amelyre $|V| = n$ és a csúcshalmazt k diszjunkt osztály adja ki:
$V = O_1 \dot\cup \ldots \dot\cup O_k$, ahol az osztályok „majdnem” ugyanakkorák.
A Turán-gráf (amely egyszerű gráf) éleit a következőben írjuk le: x és y akkor és csak akkor szomszédosak, ha különböző osztályokba esnek.

Lemma

Lemma

Lemma

$$\mu_{n,\ell} = |E(\mathcal{E}_{n,\ell})|.$$

Lemma

Lemma

$$\mu_{n,\ell} = |E(\mathcal{E}_{n,\ell})|.$$

Example

Legyen $n = 700$, $\ell = 200$

Lemma

Lemma

$$\mu_{n,\ell} = |E(\mathcal{E}_{n,\ell})|.$$

Example

Legyen $n = 700$, $\ell = 200$

Ekkor a Jensen-egyenlőtlenség becslése $\mu_{n,\ell}$-re:

$$\mu_{n,\ell} \geq \ell \binom{n/\ell}{2} = 875.$$

Lemma

Lemma

$$\mu_{n,\ell} = |E(\mathcal{E}_{n,\ell})|.$$

Example

Legyen $n = 700$, $\ell = 200$

Ekkor a Jensen-egyenlőtlenség becslése $\mu_{n,\ell}$-re:

$$\mu_{n,\ell} \geq \ell \binom{n/\ell}{2} = 875.$$

Másrészt

$$\mu_{n,\ell} = |E(\mathcal{E}_{n,\ell})| = 900.$$

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{E}$ gráf koponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesúlyozott.

Lemma bizonyítása

Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{E}$ gráf koponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesúlyozott.

Ekkor található két osztály, amelyek méretének különbsége legalább kettő.

Lemma bizonyítása

Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{E}$ gráf koponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesúlyozott.

Ekkor található két osztály, amelyek méretének különbsége legalább kettő.

Változtassuk meg $\mathcal{E}$-t: A fenti két osztály közül a kisebbet növeljük meg egy csúccsal a nagyobb osztályból.

Lemma bizonyítása

Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{E}$ gráf koponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesúlyozott.

Ekkor található két osztály, amelyek méretének különbsége legalább kettő.

Változtassuk meg $\mathcal{E}$-t: A fenti két osztály közül a kisebbet növeljük meg egy csúccsal a nagyobb osztályból. A többi osztályt hagyjuk meg.

Lemma bizonyítása

Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{E}$ gráf koponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesúlyozott.

Ekkor található két osztály, amelyek méretének különbsége legalább kettő.

Változtassuk meg $\mathcal{E}$-t: A fenti két osztály közül a kisebbet növeljük meg egy csúccsal a nagyobb osztályból. A többi osztályt hagyjuk meg.

Így egy módosított $\mathcal{E}$ gráfhoz jutunk.

Lemma bizonyítása

Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{E}$ gráf koponenseinek csúcs-osztályozása nem kiegyenesúlyozott.

Ekkor található két osztály, amelyek méretének különbsége legalább kettő.

Változtassuk meg $\mathcal{E}$-t: A fenti két osztály közül a kisebbet növeljük meg egy csúccsal a nagyobb osztályból. A többi osztályt hagyjuk meg.

Így egy módosított $\mathcal{E}$ gráfhoz jutunk.

Egyszerű ellenőrizni, hogy a módosítás csökkenti az élszámot.

Az újrafogalmazott tétel

Az újrafogalmazott tétel

Tétel

Ha az n pontú G gráfra $|E(G)| < |E(\mathcal{E}_{n,\ell})|$, akkor a módosított mohó algoritmus legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt. Speciálisan $\alpha(G) \geq \ell + 1$.

Az újrafogalmazott tétel

Tétel

Ha az n pontú G gráfra $|E(G)| < |E(\mathcal{E}_{n,\ell})|$, akkor a módosított mohó algoritmus legalább $\ell + 1$ pontot kiválaszt. Speciálisan $\alpha(G) \geq \ell + 1$.

Tétel

Ha az n pontú G gráfra $\alpha(G) < k$, akkor $|E(G)| \geq |E(\overline{T}_{n,k-1})|$.

Az újrafogalmazott tétel komplementáris formában

Az újrafogalmazott tétel komplementáris formában

Tétel (Turán Pál)

Ha G n pontú egyszerű gráf és nem tartalmaz k elemű klikket, akkor

$$|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|.$$

Az újrafogalmazott tétel komplementáris formában

Tétel (Turán Pál)

Ha G n pontú egyszerű gráf és nem tartalmaz k elemű klikket, akkor

$$|E(G)| \leq |E(T_{n,k-1})|.$$

Tétel (Turán Pál)

Legyen G n pontú egyszerű gráf. Ha

$$|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|,$$

akkor tartalmaz k elemű klikket.

Turán-tétel algoritmikus forma komplementáris változatban

Turán-tétel algoritmikus forma komplementáris változatban

A független halmaz keresésre megfogalmazott módosított mohó algoritmus a komplementer gráfra futtatva egy „nagy” klikket talál. Az algoritmus az eredeti gráf nyelvén is elmondható.

Turán-tétel algoritmikus forma komplementáris változatban

A független halmaz keresésre megfogalmazott módosított mohó algoritmus a komplementer gráfra futtatva egy „nagy” klikket talál. Az algoritmus az eredeti gráf nyelvén is elmondható.

Az algoritmus pontos leírását az érdeklődő hallgató egy egyszerű feladatként foghatja fel.

Turán-tétel algoritmikus forma komplementáris változatban

A független halmaz keresésre megfogalmazott módosított mohó algoritmus a komplementer gráfra futtatva egy „nagy” klikket talál. Az algoritmus az eredeti gráf nyelvén is elmondható.

Az algoritmus pontos leírását az érdeklődő hallgató egy egyszerű feladatként foghatja fel.

Ez az algoritmus egy n pontú egyszerű gráf inputon $|E(G)| > |E(T_{n,k-1})|$ esetén garantáltan talál egy k elemű klikket.

A Turán-tétel éles

A Turán-tétel éles

$T_{n,k}$ Turán-gráf nem tartalmaz $k+1$ elemű klikket (ami olyan csúcshalmaz, amelynek bármely két eleme összekötött).

A Turán-tétel éles

$T_{n,k}$ Turán-gráf nem tartalmaz $k+1$ elemű klikket (ami olyan csúcshalmaz, amelynek bármely két eleme összekötött).

Indoklás (skatulyaelv): Ha egy ponthalmaz mérete eggyel nagyobb, mint az osztályok száma, akkor a skatulya-elv miatt szükséges, hogy egy osztályból egynél több elemet vegyünk ki.

A Turán-tétel éles

$T_{n,k}$ Turán-gráf nem tartalmaz $k+1$ elemű klikket (ami olyan csúcshalmaz, amelynek bármely két eleme összekötött).

Indoklás (skatulyaelv): Ha egy ponthalmaz mérete eggyel nagyobb, mint az osztályok száma, akkor a skatulya-elv miatt szükséges, hogy egy osztályból egynél több elemet vegyünk ki. A Turán-gráf definíciója viszont azt mondja, hogy ez a két elem nem összekötött, a kivett csúcshalmaz nem lehet klikk.

A Turán-tétel éles

$T_{n,k}$ Turán-gráf nem tartalmaz $k+1$ elemű klikket (ami olyan csúcshalmaz, amelynek bármely két eleme összekötött).

Indoklás (skatulyaelv): Ha egy ponthalmaz mérete eggyel nagyobb, mint az osztályok száma, akkor a skatulya-elv miatt szükséges, hogy egy osztályból egynél több elemet vegyünk ki. A Turán-gráf definíciója viszont azt mondja, hogy ez a két elem nem összekötött, a kivett csúcshalmaz nem lehet klikk.

Indoklás (kromatikus szám): $T_{n,k}$ összes részgráfja k színezhető (a gráfot úgy definiáltuk, hogy a k darab osztály felfogható k színosztálynak). Azaz $T_{n,k}$ nem tartalmaz R részgráfot, ha $\chi(R) \geq k+1$. Azaz $T_{n,k}$.nak nincs olyan R részgráfja amely nem k színezhető.

Szünet

Általánosítás

Általánosítás

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk.

Általánosítás

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk.

A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként.

Általánosítás

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk.

A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként. // Minden testnek van egy egyszerű gráfja, ahol a test csúcsai a gráf csúcsai, élei pedig a gráf éleinek felelnek meg.

Általánosítás

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk.

A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként. // Minden testnek van egy egyszerű gráfja, ahol a test csúcsai a gráf csúcsai, élei pedig a gráf éleinek felelnek meg.

Turán tétele bizonyítása után a következő kérdést tette fel:

Általánosítás

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk.

A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként. // Minden testnek van egy egyszerű gráfja, ahol a test csúcsai a gráf csúcsai, élei pedig a gráf éleinek felelnek meg.

Turán tétele bizonyítása után a következő kérdést tette fel: Mi van más szabályos testekkel? Például hány éle lehet egy gráfnak, ha nincs benne oktaéder, vagy ha nincs benne kocka, vagy ha nincs benne dodekaéder?

Általánosítás

A Turán-tétel egy speciális esete, amikor gráfunkban nincs 4 pontú klikk. Ekkor a tétel azt mondja ki, hogy nem lehet $|E(T_{n,3})|$-nál több élünk.

A feltételünket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy gráfunk nem tartalmazza a tetraéder gráfját részgráfként. // Minden testnek van egy egyszerű gráfja, ahol a test csúcsai a gráf csúcsai, élei pedig a gráf éleinek felelnek meg.

Turán tétele bizonyítása után a következő kérdést tette fel: Mi van más szabályos testekkel? Például hány éle lehet egy gráfnak, ha nincs benne oktaéder, vagy ha nincs benne kocka, vagy ha nincs benne dodekaéder?

Megszületett az extremális gráfelmélet.

Az ext függvény

Az ext függvény

Definíció

$$ext(n; T) = \max\{|E(G)| : \ G \ n \text{ pontú, egyszerű gráf, } \ T \not\subseteq G\}.$$

Az ext függvény

Definíció

$$ext(n;T) = \max\{|E(G)| : \ G \ n \text{ pontú, egyszerű gráf, } \ T \not\subseteq G\}.$$

T-re úgy hivatkozunk, hogy tiltott részgráf. n a csúcsméret.

Az ext függvény

Definíció

$$ext(n; T) = \max\{|E(G)| : \ G \ n \text{ pontú, egyszerű gráf, } \ T \not\subseteq G\}.$$

T-re úgy hivatkozunk, hogy tiltott részgráf. n a csúcsméret.

A továbbiakhoz hasznos, ha bevezetjük a következő jelölést: Az n pontú egyszerű gráfok osztályát jelölje $\mathcal{G}_n$. Tehát $G \in \mathcal{G}_n$ jelentése G egy n pontú egyszerű gráf.

Turán-típusú kérdések

Turán-típusú kérdések

Újból átfogalmazzuk Turán tételét: $ext(n; K_k) = |E(T_{n,k-1})|$.

Turán-típusú kérdések

Újból átfogalmazzuk Turán tételét: $ext(n; K_k) = |E(T_{n,k-1})|$.

Az $ext(n; T)$ függvény vizsgálatával kapcsolatos problémákat Turán-típusú kérdéseknek nevezzük.

Turán-típusú kérdések

Újból átfogalmazzuk Turán tételét: $ext(n; K_k) = |E(T_{n,k-1})|$.

Az $ext(n; T)$ függvény vizsgálatával kapcsolatos problémákat Turán-típusú kérdéseknek nevezzük.

Ez az extremális gráfelmélet első kérdésköre.

Turán-típusú kérdések

Újból átfogalmazzuk Turán tételét: $ext(n; K_k) = |E(T_{n,k-1})|$.

Az $ext(n; T)$ függvény vizsgálatával kapcsolatos problémákat Turán-típusú kérdéseknek nevezzük.

Ez az extremális gráfelmélet első kérdésköre.

Az extremális gráfelméletben bizonyos feltételeknek eleget tevő gráfok közt nézzük meg, hogy bizonyos gráfparaméter milyen határok között változik. Azaz a paraméter milyen extremális értékeket vehet fel.

Nyitott kérdések

Nyitott kérdések

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka gráfjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

Nyitott kérdések

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka gráfjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

Azt is megjegyezzük, hogy a háromszög tiltásának esete már a huszadik század elején Mantel számára ismert volt (feladatként tűzte ki egy matematikai újságban).

Nyitott kérdések

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka gráfjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

Azt is megjegyezzük, hogy a háromszög tiltásának esete már a huszadik század elején Mantel számára ismert volt (feladatként tűzte ki egy matematikai újságban).

A kérdéskör elméletté fejlődése azonban Turán Pál eredményeinek és kérdéseinek köszönhető.

Nyitott kérdések

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka gráfjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

Azt is megjegyezzük, hogy a háromszög tiltásának esete már a huszadik század elején Mantel számára ismert volt (feladatként tűzte ki egy matematikai újságban).

A kérdéskör elméletté fejlődése azonban Turán Pál eredményeinek és kérdéseinek köszönhető.

Közeli munkatársa, Erdős Pál különösen sokat tett az extremális gráfelmélet és általában az extremális kombinatorika fejlődéséhez.

Nyitott kérdések

Megjegyezzük, hogy Turán Pál kérdése a kocka gráfjára mind a mai napig megoldatlan kérdés.

Azt is megjegyezzük, hogy a háromszög tiltásának esete már a huszadik század elején Mantel számára ismert volt (feladatként tűzte ki egy matematikai újságban).

A kérdéskör elméletté fejlődése azonban Turán Pál eredményeinek és kérdéseinek köszönhető.

Közeli munkatársa, Erdős Pál különösen sokat tett az extremális gráfelmélet és általában az extremális kombinatorika fejlődéséhez.

A továbbiakban feltesszük, hogy a T tiltott gráfban nincsenek izolált csúcsok: Az izolált csúcsok hozzáadása/elvétele csak ott játszik szerepet, ahol T mérete meghaladja n-et.

Egyélű tiltott gráf

Egyélű tiltott gráf

Észrevétel

Legyen I a két pontot és egyetlen élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n; I) = 0$.

Egyélű tiltott gráf

Észrevétel

Legyen I a két pontot és egyetlen élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n; I) = 0$.

Ha egy élt tiltunk, akkor nyilván a maximális élszám nulla lesz.

Kétélű tiltott gráfok

Kétélű tiltott gráfok

Észrevétel

Legyen $\wedge$ a három pontot és két élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n; \wedge) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Kétélű tiltott gráfok

Észrevétel

Legyen $\wedge$ a három pontot és két élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n;\wedge)=\lfloor n/2\rfloor$.

Ha két összefutó élt tiltunk, akkor minden csúcs foka 0 vagy 1. Azaz a fokok összege legfeljebb n. Az élszám legfeljebb $n/2$. Mivel az élszám mindig egy természetes szám, ezért felső becslésünk igazából $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$.

Kétélű tiltott gráfok

Észrevétel

Legyen $\wedge$ a három pontot és két élt tartalmazó gráf. Ekkor $ext(n; \wedge) = \lfloor n/2 \rfloor$.

Ha két összefutó élt tiltunk, akkor minden csúcs foka 0 vagy 1. Azaz a fokok összege legfeljebb n. Az élszám legfeljebb $n/2$. Mivel az élszám mindig egy természetes szám, ezért felső becslésünk igazából $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához konstruálnunk kell egy $\wedge$ részgráfot nem tartalmazó gráfot: Ez egy teljes párosítás n vagy $n-1$ csúcson (ha n paritásától függően). Ennek élszáma $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Kétélű tiltott gráfok (folytatás)

Kétélű tiltott gráfok (folytatás)

Észrevétel

Legyen M_2 a négy pontot és két nem összefutó élt tartalmazó gráf (azaz egy két élű párosítás). Ekkor $ext(n; M_2) = n - 1$, ha $n \geq 4$.

Kételű tiltott gráfok (folytatás)

Észrevétel

Legyen M_2 a négy pontot és két nem összefutó élt tartalmazó gráf (azaz egy két élű párosítás). Ekkor $ext(n; M_2) = n - 1$, ha $n \geq 4$.

Ennek ellenőrzése az érdeklődő hallgatók számára egy egyszerű feladat.

Következmény

Következmény

Következmény

Ha T olyan, hogy $|E(T)| \geq 2$, akkor elég nagy n esetén

$$ext(n; T) = \Omega(n).$$

Következmény

Következmény

Ha T olyan, hogy $|E(T)| \geq 2$, akkor elég nagy n esetén

$$ext(n; T) = \Omega(n).$$

A körmentes tiltott gráfok esete egyszerű.

Fák tiltására vonatkozó tétel

Fák tiltására vonatkozó tétel

Tétel

Legyen T erdő (azaz körmentes gráf; azaz olyan gráf, amely a komponensei fák). Legyen T-nek legalább két éle. Ekkor

$$\alpha_T \cdot n \leq ext(n; T) \leq \beta_T \cdot n, \text{ ahol } \alpha_T, \beta_T > 0.$$

Azaz $ext(n; T)$ nagyságrendje lineáris.

Fák tiltására vonatkozó tétel

Tétel

Legyen T erdő (azaz körmentes gráf; azaz olyan gráf, amely a komponensei fák). Legyen T-nek legalább két éle. Ekkor

$$\alpha_T \cdot n \leq ext(n; T) \leq \beta_T \cdot n, \text{ ahol } \alpha_T, \beta_T > 0.$$

Azaz $ext(n; T)$ nagyságrendje lineáris.

A tételben szereplő alsó becslés már ismert, hiszen tiltott részgráfunknak legalább két éle van.

Lemma

Lemma

Jelölés

Legyen H egy gráf. Ekkor $\overline{d}(H)$ a H gráf átlagos foka, $\delta(H)$ a H gráf minimális foka.

Lemma

Jelölés

Legyen H egy gráf. Ekkor $\overline{d}(H)$ a H gráf átlagos foka, $\delta(H)$ a H gráf minimális foka.

Lemma

$G \in \mathcal{G}_n$ esetén létezik olyan R részgráf ($R \subseteq G$), amelyre

$$\delta(R) \geq \frac{\overline{d}(G)}{2}$$

teljesül.

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Lemma bizonyítása

Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Algoritmus

Lemma bizonyítása

Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Algoritmus

Input: G egyszerű gráf. Output: R feszített részgráf, amely minden foka legalább $\overline{d}/2$.

Lemma bizonyítása

Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Algoritmus

Input: G egyszerű gráf. Output: R feszített részgráf, amely minden foka legalább $\overline{d}/2$.

$A := G$

Lemma bizonyítása

Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Algoritmus

Input: G egyszerű gráf. Output: R feszített részgráf, amely minden foka legalább $\overline{d}/2$.

$A := G$

// A az aktuális gráf, kezdetben G.

Lemma bizonyítása

Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Algoritmus

Input: G egyszerű gráf. Output: R feszített részgráf, amely minden foka legalább $\overline{d}/2$.

$A := G$

// A az aktuális gráf, kezdetben G.

Amíg találunk $x \in V(A)$-t,úgy, hogy $d_A(x) < \frac{\overline{d}}{2}$

$$A \leftarrow A - x.$$

Lemma bizonyítása

Nyilván a feszített részgráfok közt kell keresgélnünk.

Algoritmus

Input: G egyszerű gráf. Output: R feszített részgráf, amely minden foka legalább $\overline{d}/2$.

$A := G$

// A az aktuális gráf, kezdetben G.

Amíg találunk $x \in V(A)$-t,úgy, hogy $d_A(x) < \frac{\overline{d}}{2}$

$$A \leftarrow A - x.$$

// Ha egy csúcs foka túl kicsi, akkor nem lehet az outputban.

A Lemma bizonyítása

A Lemma bizonyítása

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G-t.

A Lemma bizonyítása

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G-t.

Indirekten érvelünk.

A Lemma bizonyítása

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G-t.

Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcsot eltörli.

A Lemma bizonyítása

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G-t.

Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcsot eltörli.

Ekkor az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$re, jelöljük ezt π-vel: $\pi : v_1, \ldots, v_n$, azaz v_i az i-ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$).

A Lemma bizonyítása

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G-t.

Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcsot eltörli.

Ekkor az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$re, jelöljük ezt π-vel: $\pi : v_1, \ldots, v_n$, azaz v_i az i-ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$). Bevezetünk ehhez egy jelölést: $d_\pi^{\text{hátra}}(v)$ a v csúcs nagyobb indexű szomszédainak száma.

A Lemma bizonyítása

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G-t.

Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcsot eltörli.

Ekkor az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$re, jelöljük ezt π-vel: $\pi : v_1, \ldots, v_n$, azaz v_i az i-ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$). Bevezetünk ehhez egy jelölést: $d_\pi^{\text{hátra}}(v)$ a v csúcs nagyobb indexű szomszédainak száma.

Tudjuk: Minden $v \in V$ csúcsra teljesül $d_\pi^{\text{hátra}}(v) < \frac{\overline{d}}{2}$, azaz a kiürítési sorrendre vonatkozólag minden csúcs „hátra-foka” kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$.

A Lemma bizonyítása

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki” G-t.

Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcsot eltörli.

Ekkor az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$re, jelöljük ezt π-vel: $\pi : v_1, \ldots, v_n$, azaz v_i az i-ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$). Bevezetünk ehhez egy jelölést: $d_\pi^{\text{hátra}}(v)$ a v csúcs nagyobb indexű szomszédainak száma.

Tudjuk: Minden $v \in V$ csúcsra teljesül $d_\pi^{\text{hátra}}(v) < \frac{\overline{d}}{2}$, azaz a kiürítési sorrendre vonatkozólag minden csúcs „hátra-foka” kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$.

Észrevétel: $\sum d_\pi^{\text{hátra}}(v) = |E|$, azaz a hátrafokok összege pontosan kiadja az élszámot. Ez az összeg a kiürítési sorozat esetén határozottan kisebb, mint $n\frac{\overline{d}}{2}$.

A Lemma bizonyítása

A lemma ekvivalens azzal, hogy az algoritmus nem „üríti ki" G-t.

Indirekten érvelünk. Tegyük fel, hogy a fenti algoritmus az összes csúcsot eltörli.

Ekkor az algoritmus ad egy kiürítési sorrendet $V(G)$re, jelöljük ezt π-vel: $\pi : v_1, \ldots, v_n$, azaz v_i az i-ediknek elhagyott csúcs ($n = |V(G)|$). Bevezetünk ehhez egy jelölést: $d_\pi^{\text{hátra}}(v)$ a v csúcs nagyobb indexű szomszédainak száma.

Tudjuk: Minden $v \in V$ csúcsra teljesül $d_\pi^{\text{hátra}}(v) < \frac{\overline{d}}{2}$, azaz a kiürítési sorrendre vonatkozólag minden csúcs „hátra-foka" kevesebb mint $\frac{\overline{d}}{2}$.

Észrevétel: $\sum d_\pi^{\text{hátra}}(v) = |E|$, azaz a hátrafokok összege pontosan kiadja az élszámot. Ez az összeg a kiürítési sorozat esetén határozottan kisebb, mint $n\frac{\overline{d}}{2}$.

Viszont az élek száma pontosan $n\frac{\overline{d}}{2}$. Ez ellentmondás.

Tétel bizonyítása

Tétel bizonyítása

Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extremális érték $< \beta_T n$.

Tétel bizonyítása

Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extremális érték $< \beta_T n$.

Pontosan megadjuk β_T-t: Legyen T egy tetszőleges erdő. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$, amelyre $|E(G)| \geq |V(T)|n$

Tétel bizonyítása

Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extremális érték $< \beta_T n$.

Pontosan megadjuk β_T-t: Legyen T egy tetszőleges erdő. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$, amelyre $|E(G)| \geq |V(T)|n$
// azaz G-ben az átlag fok: $\frac{\sum d_i}{n} \geq \frac{2|V(T)|n}{n} = 2|V(T)|$).

Tétel bizonyítása

Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extremális érték $< \beta_T n$.

Pontosan megadjuk β_T-t: Legyen T egy tetszőleges erdő. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$, amelyre $|E(G)| \geq |V(T)|n$
// azaz G-ben az átlag fok: $\frac{\sum d_i}{n} \geq \frac{2|V(T)|n}{n} = 2|V(T)|$).
Ekkor G biztos tartalmaz T-vel izomorf részgráfot.

Tétel bizonyítása

Továbbra is azt akarjuk bebizonyítani, hogy az extremális érték $< \beta_T n$.

Pontosan megadjuk β_T-t: Legyen T egy tetszőleges erdő. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$, amelyre $|E(G)| \geq |V(T)|n$
// azaz G-ben az átlag fok: $\frac{\sum d_i}{n} \geq \frac{2|V(T)|n}{n} = 2|V(T)|$).
Ekkor G biztos tartalmaz T-vel izomorf részgráfot.

A lemma alapján G-ben van olyan R részgráf, amelyre $\delta(R) \geq |V(T)|$.

Tétel bizonyítása (folytatás)

Tétel bizonyítása (folytatás)

T példányát már R-ben megtaláljuk.

Tétel bizonyítása (folytatás)

T példányát már R-ben megtaláljuk.

Valóban: T-t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával.

Tétel bizonyítása (folytatás)

T példányát már R-ben megtaláljuk.

Valóban: T-t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával.

Ez könnyen megtehető: annyi ponttal indulunk ahány komponense van T-nek, mondjuk c.

Tétel bizonyítása (folytatás)

T példányát már R-ben megtaláljuk.

Valóban: T-t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával.

Ez könnyen megtehető: annyi ponttal indulunk ahány komponense van T-nek, mondjuk c.

T_0 legyen a c pontú üres gráf. Mindegyik komponens egy fa, ami egyetlen csúcsból ághajtásokkal felépíthető.

Tétel bizonyítása (folytatás)

T példányát már R-ben megtaláljuk.

Valóban: T-t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával.

Ez könnyen megtehető: annyi ponttal indulunk ahány komponense van T-nek, mondjuk c.

T_0 legyen a c pontú üres gráf. Mindegyik komponens egy fa, ami egyetlen csúcsból ághajtásokkal felépíthető.

A komponensek egyenkénti felépítésével egy $\{T_i\}_{i=0}^{|E(T)|}$ gráfsorozatot kapunk, amelyben T_i-nek i éle van, továbbá $T_{|E(T)|} = T$.

Tétel bizonyítása (folytatás)

T példányát már R-ben megtaláljuk.

Valóban: T-t építsük fel egy üres gráfból ághajtások alkalmazásával.

Ez könnyen megtehető: annyi ponttal indulunk ahány komponense van T-nek, mondjuk c.

T_0 legyen a c pontú üres gráf. Mindegyik komponens egy fa, ami egyetlen csúcsból ághajtásokkal felépíthető.

A komponensek egyenkénti felépítésével egy $\{T_i\}_{i=0}^{|E(T)|}$ gráfsorozatot kapunk, amelyben T_i-nek i éle van, továbbá $T_{|E(T)|} = T$.

Indukcióval igazoljuk, hogy mindegyik T_i megtalálható R-ben.

Tétel bizonyítása (folytatás)

Tétel bizonyítása (folytatás)

Ha T_i-t megtaláltuk, akkor mohó módon ezt a részgráfot terjesztjük ki egy T_{i+1}-gyel izomorf részgráffá. Legyen x az a csúcs, amiből induló ághajtás adja T_{i+1}-et. x minden olyan szomszédja, ami nem reprezentál eddigi csúcsot (és az ehhez vezető él) megteszi az indukciós lépést.

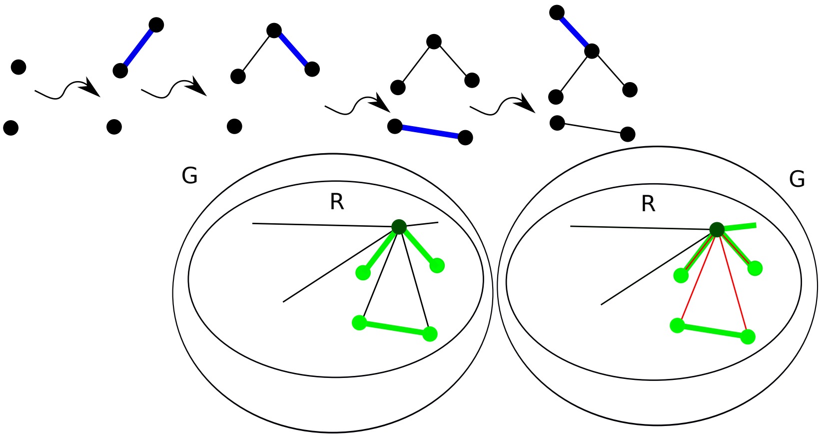
Tétel bizonyítása (folytatás)

Ha T_i-t megtaláltuk, akkor mohó módon ezt a részgráfot terjesztjük ki egy T_{i+1}-gyel izomorf részgráffá. Legyen x az a csúcs, amiből induló ághajtás adja T_{i+1}-et. x minden olyan szomszédja, ami nem reprezentál eddigi csúcsot (és az ehhez vezető él) megteszi az indukciós lépést.

Ilyen szomszéd viszont könnyen található, hiszen legalább $|V(T)|$ szomszéd van R-ben, míg T_i csúcsait kevesebb mint $|V(T)|$ csúcs reprezentálja.

A bizonyítás ábrán

A bizonyítás ábrán



Szünet

Az alaptétel

Az alaptétel

Emlékezzünk: Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(n; T) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

Az alaptétel

Emlékezzünk: Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(n; T) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

(Erdős—Stone, Erdős—Simonovits)

Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k \geq 2$, akkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$.

Az alaptétel

Emlékezzünk: Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(n; T) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

(Erdős—Stone, Erdős—Simonovits)

Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k \geq 2$, akkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$.

(Erdős—Stone, Erdős—Simonovits)

Az alaptétel

Emlékezzünk: Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(n; T) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

(Erdős—Stone, Erdős—Simonovits)

Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k \geq 2$, akkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$.

(Erdős—Stone, Erdős—Simonovits)

(i) Legyen T olyan, hogy T kromatikus száma $k \geq 3$ (azaz $k-1$ — a T-hez tartozó Turán-gráf osztályszáma — legalább 2). Ekkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$ (ekkor a $o(n^2)$ tag egy maradéktag).

Az alaptétel

Emlékezzünk: Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k$ akkor $ext(n; T) \geq |E(T_{n,k-1})|$.

(Erdős—Stone, Erdős—Simonovits)

Ha T olyan, hogy $\chi(T) = k \geq 2$, akkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$.

(Erdős—Stone, Erdős—Simonovits)

(i) Legyen T olyan, hogy T kromatikus száma $k \geq 3$ (azaz $k-1$ — a T-hez tartozó Turán-gráf osztályszáma — legalább 2). Ekkor $ext(n; T) = |E(T_{n,k-1})| + o(n^2)$ (ekkor a $o(n^2)$ tag egy maradéktag).

(ii) Legyen T nem-üres páros gráf, azaz $\chi(T) = 2$. Ekkor $ext(n; T) = o(n^2)$ (a korábbi maradéktag főtaggá vált).

A tétel átfogalmazása

A tétel átfogalmazása

Az Erdős—Stone—Simonovits-tételt a következő formában mondjuk ki:

A tétel átfogalmazása

Az Erdős—Stone—Simonovits-tételt a következő formában mondjuk ki:

Adott $k \geq 2$ egész.

A tétel átfogalmazása

Az Erdős—Stone—Simonovits-tételt a következő formában mondjuk ki:

Adott $k \geq 2$ egész. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny valós szám.

A tétel átfogalmazása

Az Erdős—Stone—Simonovits-tételt a következő formában mondjuk ki:

Adott $k \geq 2$ egész. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny valós szám. Legyen S egy tetszőleges pozitív egész.

A tétel átfogalmazása

Az Erdős—Stone—Simonovits-tételt a következő formában mondjuk ki:

Adott $k \geq 2$ egész. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny valós szám. Legyen S egy tetszőleges pozitív egész. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$ egy gráf

$$|E(T_{n,k-1})| + \varepsilon \cdot n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) n^2 + \varepsilon \cdot n^2$$

éllel.

A tétel átfogalmazása

Az Erdős—Stone—Simonovits-tételt a következő formában mondjuk ki:

Adott $k \geq 2$ egész. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny valós szám. Legyen S egy tetszőleges pozitív egész. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$ egy gráf

$$|E(T_{n,k-1})| + \varepsilon \cdot n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) n^2 + \varepsilon \cdot n^2$$

éllel.

Ekkor G tartalmaz $K_{S,S,\ldots,S} = K_{k \times S}$ részgráfot, amennyiben n elég nagy.

A tétel átfogalmazása

Az Erdős—Stone—Simonovits-tételt a következő formában mondjuk ki:

Adott $k \geq 2$ egész. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsiny valós szám. Legyen S egy tetszőleges pozitív egész. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$ egy gráf

$$|E(T_{n,k-1})| + \varepsilon \cdot n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) n^2 + \varepsilon \cdot n^2$$

éllel.

Ekkor G tartalmaz $K_{S,S,\ldots,S} = K_{k\times S}$ részgráfot, amennyiben n elég nagy. Ahol $K_{S,S,\ldots,S} = K_{k\times S}$ az a teljes k-részes gráf, amelyben minden rész S méretű.

Bizonyítás: A kezdetek

Bizonyítás: A kezdetek

Az átfogalmazásunk bizonyítását hasonlóan kezdjük, mint a tiltott erdők esetét. Most azonban nem lineárisan sok élünk van, sűrű gráfokkal dolgozunk.

Bizonyítás: A kezdetek

Az átfogalmazásunk bizonyítását hasonlóan kezdjük, mint a tiltott erdők esetét. Most azonban nem lineárisan sok élünk van, sűrű gráfokkal dolgozunk.

Lemma

Legyen G egy n pontú egyszerű gráf, amelyre teljesül, hogy $|E(G)| \geq \delta\binom{n}{2}$, azaz átlag foka legalább $\delta(n-1)$. Ekkor van olyan R részgráfja amelyben minden fok legalább $\delta(|V(R)|-1)$.

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

Az erdők tárgyalásánál szükséges lemmához hasonlóan bizonyítható: Az állítás ekvivalens azzal, hogy az alábbi algoritmus nem üríthati ki G-t.

Lemma bizonyítása

Az erdők tárgyalásánál szükséges lemmához hasonlóan bizonyítható: Az állítás ekvivalens azzal, hogy az alábbi algoritmus nem ürítheti ki G-t.

Algoritmus

Lemma bizonyítása

Az erdők tárgyalásánál szükséges lemmához hasonlóan bizonyítható: Az állítás ekvivalens azzal, hogy az alábbi algoritmus nem ürítheti ki G-t.

Algoritmus

// G-ről feltesszük, hogy átlag foka $\delta(|V(G)|-1)$

Lemma bizonyítása

Az erdők tárgyalásánál szükséges lemmához hasonlóan bizonyítható: Az állítás ekvivalens azzal, hogy az alábbi algoritmus nem ürítheti ki G-t.

Algoritmus

// G-ről feltesszük, hogy átlag foka $\delta(|V(G)| - 1)$

$A := G$

Lemma bizonyítása

Az erdők tárgyalásánál szükséges lemmához hasonlóan bizonyítható: Az állítás ekvivalens azzal, hogy az alábbi algoritmus nem üríthati ki G-t.

Algoritmus

// G-ről feltesszük, hogy átlag foka $\delta(|V(G)|-1)$

$A := G$

// A az aktuális gráf, kezdetben G.

Lemma bizonyítása

Az erdők tárgyalásánál szükséges lemmához hasonlóan bizonyítható: Az állítás ekvivalens azzal, hogy az alábbi algoritmus nem üríthati ki G-t.

Algoritmus

// G-ről feltesszük, hogy átlag foka $\delta(|V(G)|-1)$

$A := G$

// A az aktuális gráf, kezdetben G.

Amíg találunk $x \in V(A)$-t,úgy, hogy $d_A(x) < \delta(|V(A)|-1)$

$$A \leftarrow A - x.$$

Lemma bizonyítása

Az erdők tárgyalásánál szükséges lemmához hasonlóan bizonyítható: Az állítás ekvivalens azzal, hogy az alábbi algoritmus nem üríthati ki G-t.

Algoritmus

// G-ről feltesszük, hogy átlag foka $\delta(|V(G)|-1)$

$A := G$

// A az aktuális gráf, kezdetben G.

Amíg találunk $x \in V(A)$-t,úgy, hogy $d_A(x) < \delta(|V(A)|-1)$

$$A \leftarrow A - x.$$

// Ha egy csúcs foka túl kicsi, akkor nem lehet az outputban.

A Lemma bizonyítása

A Lemma bizonyítása

Indirekten tegyük fel, hogy az algoritmus kiüríti a gráfunkat.

A Lemma bizonyítása

Indirekten tegyük fel, hogy az algoritmus kiüríti a gráfunkat.

Az i-edik lépésben az aktuális gráfból elhagyott élek száma kisebb mint $\delta(n-i)$.

A Lemma bizonyítása

Indirekten tegyük fel, hogy az algoritmus kiüríti a gráfunkat.

Az i-edik lépésben az aktuális gráfból elhagyott élek száma kisebb mint $\delta(n-i)$.

A teljes kiürítés során elhagyott élek száma kisebb mint

$$\delta(n-1)+\delta(n-2)+\ldots+\delta\cdot 2+\delta\cdot 1=\delta\binom{n}{2},$$

A Lemma bizonyítása

Indirekten tegyük fel, hogy az algoritmus kiüríti a gráfunkat.

Az i-edik lépésben az aktuális gráfból elhagyott élek száma kisebb mint $\delta(n-i)$.

A teljes kiürítés során elhagyott élek száma kisebb mint

$$\delta(n-1)+\delta(n-2)+\ldots+\delta\cdot 2+\delta\cdot 1=\delta\binom{n}{2},$$

ami ellentmondás, hiszen G élszáma legalább $\delta\binom{n}{2}$.

Élesített Lemma

Élesített Lemma

Sajnos az algoritmus által garantált részgráf mérete lehet hogy kicsi lesz és számunkra nem kielégítő. A következő forma lesz fontos:

Élesített Lemma

Sajnos az algoritmus által garantált részgráf mérete lehet hogy kicsi lesz és számunkra nem kielégítő. A következő forma lesz fontos:

Lemma

Legyen $\varepsilon_0 > 0$ egy tetszőlegesen kicsi valós szám és N egy tetszőlegesen nagy természetes szám. Legyen G egy elég nagy egyszerű gráf (azaz $|V(G)| := n > \nu(N, \varepsilon_0)$), amely átlag foka legalább $\delta \cdot (n-1)$.

Élesített Lemma

Sajnos az algoritmus által garantált részgráf mérete lehet hogy kicsi lesz és számunkra nem kielégítő. A következő forma lesz fontos:

Lemma

Legyen $\varepsilon_0 > 0$ egy tetszőlegesen kicsi valós szám és N egy tetszőlegesen nagy természetes szám. Legyen G egy elég nagy egyszerű gráf (azaz $|V(G)| := n > \nu(N, \varepsilon_0)$), amely átlag foka legalább $\delta \cdot (n-1)$.

Ekkor van olyan R részgráfja amelyben minden fok legalább

$$(\delta - \varepsilon_0)(|V(R)| - 1)$$

és $|V(R)| \geq N$, azaz R pontszáma nagy.

Az élesített Lemma bizonyítása

Az élesített Lemma bizonyítása

Legyen $A = G$ az aktuális gráf. Amíg találunk olyan $x \in V(A)$ csúcsot amely foka kisebb mint $(\delta - \varepsilon_0)|V(A)|$ hagyjuk el.

Az élesített Lemma bizonyítása

Legyen $A = G$ az aktuális gráf. Amíg találunk olyan $x \in V(A)$ csúcsot amely foka kisebb mint $(\delta - \varepsilon_0)|V(A)|$ hagyjuk el.

Azt kell igazolnunk, hogy az eljárás leáll mielőtt csak N pontunk maradna.

Az élesített Lemma bizonyítása

Legyen $A = G$ az aktuális gráf. Amíg találunk olyan $x \in V(A)$ csúcsot amely foka kisebb mint $(\delta - \varepsilon_0)|V(A)|$ hagyjuk el.

Azt kell igazolnunk, hogy az eljárás leáll mielőtt csak N pontunk maradna.

Ha ez nem így lenne, akkor az elhagyott és a maradék N pont között vezető élek száma legfeljebb

$$(\delta - \varepsilon_0)(n-1) + (\delta - \varepsilon_0)(n-2) + \ldots + (\delta - \varepsilon_0)(N+1) + \binom{N}{2}$$
$$= (\delta - \varepsilon_0)\binom{n}{2} + (1 - \delta + \varepsilon_0)\binom{N}{2}.$$

G élszáma legalább $\delta\binom{n}{2}$.

Az élesített Lemma bizonyítása

Legyen $A = G$ az aktuális gráf. Amíg találunk olyan $x \in V(A)$ csúcsot amely foka kisebb mint $(\delta - \varepsilon_0)|V(A)|$ hagyjuk el.

Azt kell igazolnunk, hogy az eljárás leáll mielőtt csak N pontunk maradna.

Ha ez nem így lenne, akkor az elhagyott és a maradék N pont között vezető élek száma legfeljebb

$$(\delta - \varepsilon_0)(n-1) + (\delta - \varepsilon_0)(n-2) + \ldots + (\delta - \varepsilon_0)(N+1) + \binom{N}{2}$$
$$= (\delta - \varepsilon_0)\binom{n}{2} + (1 - \delta + \varepsilon_0)\binom{N}{2}.$$

G élszáma legalább $\delta\binom{n}{2}$.

Ha n nagy, akkor ez ellentmondás.

Az új bizonyítandó

Az új bizonyítandó

A lemma alkalmazásával elérjük, hogy elég a következő állítást igazolni:

Az új bizonyítandó

A lemma alkalmazásával elérjük, hogy elég a következő állítást igazolni:

Állítás

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$ egy gráf, amelyre minden csúcs foka legalább

$$\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1).$$

Az új bizonyítandó

A lemma alkalmazásával elérjük, hogy elég a következő állítást igazolni:

Állítás

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Legyen $G \in \mathcal{G}_n$ egy gráf, amelyre minden csúcs foka legalább

$$\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1).$$

Ekkor minden $s \in \mathbb{N}$ esetén elég nagy n-re G tartalmaz $K_{(k+1)\times s}$ részgráfot. ($K_{(k+1)\times s}$ a teljes $k+1$ részes gráf, amely minden osztálya s elemű).

Az Állítás igazolása

Az Állítás igazolása

Az állítás igazolása k-ra vonatkozó teljes indukcióval történik.

Az Állítás igazolása

Az állítás igazolása k-ra vonatkozó teljes indukcióval történik. Azaz részgráfok egy sorozatát találjuk meg G-ben.

Az Állítás igazolása

Az állítás igazolása k-ra vonatkozó teljes indukcióval történik. Azaz részgráfok egy sorozatát találjuk meg G-ben. A séma a megtalálandó részgráfok izomorfiatípusára

$$K_{1\times s_1} \to K_{2\times s_2} \to K_{3\times s_3} \to \ldots \to K_{(k-1)\times s_{k-1}} \to K_{k\times s_k}.$$

Az Állítás igazolása

Az állítás igazolása k-ra vonatkozó teljes indukcióval történik. Azaz részgráfok egy sorozatát találjuk meg G-ben. A séma a megtalálandó részgráfok izomorfiatípusára

$$K_{1\times s_1} \to K_{2\times s_2} \to K_{3\times s_3} \to \ldots \to K_{(k-1)\times s_{k-1}} \to K_{k\times s_k}.$$

A végső s_k paraméter lesz az állításbeli s.

Az Állítás igazolása

Az állítás igazolása k-ra vonatkozó teljes indukcióval történik. Azaz részgráfok egy sorozatát találjuk meg G-ben. A séma a megtalálandó részgráfok izomorfiatípusára

$$K_{1\times s_1} \to K_{2\times s_2} \to K_{3\times s_3} \to \ldots \to K_{(k-1)\times s_{k-1}} \to K_{k\times s_k}.$$

A végső s_k paraméter lesz az állításbeli s. Nyilván választásunk olyan lesz, hogy $s_i \gg s_{i+1}$ teljesülni fog paramétereinkre.

Az Állítás igazolása

Az állítás igazolása k-ra vonatkozó teljes indukcióval történik. Azaz részgráfok egy sorozatát találjuk meg G-ben. A séma a megtalálandó részgráfok izomorfiatípusára

$$K_{1\times s_1} \to K_{2\times s_2} \to K_{3\times s_3} \to \ldots \to K_{(k-1)\times s_{k-1}} \to K_{k\times s_k}.$$

A végső s_k paraméter lesz az állításbeli s. Nyilván választásunk olyan lesz, hogy $s_i \gg s_{i+1}$ teljesülni fog paramétereinkre.

Az indukció nyilván elindul: $K_{1\times s_1}$ egy s_1 pontú üres gráf és n elég nagy.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Az indukciós lépéshez azt látjuk be, hogy ha tetszőleges s-re létezik olyan $S = S(s)$ szám, ha G elég nagy, a minimális fokszámra tett feltétel teljesül, továbbá G tartalmaz $K_{\ell \times S}$ részgráfot, akkor $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráf is garantálható.

Bizonyítás (folytatás)

Az indukciós lépéshez azt látjuk be, hogy ha tetszőleges s-re létezik olyan $S = S(s)$ szám, ha G elég nagy, a minimális fokszámra tett feltétel teljesül, továbbá G tartalmaz $K_{\ell\times S}$ részgráfot, akkor $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráf is garantálható. $S \gg s$ egy „nagy” szám, amit a későbbiekben rögzítünk.

Bizonyítás (folytatás)

Az indukciós lépéshez azt látjuk be, hogy ha tetszőleges s-re létezik olyan $S = S(s)$ szám, ha G elég nagy, a minimális fokszámra tett feltétel teljesül, továbbá G tartalmaz $K_{\ell \times S}$ részgráfot, akkor $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráf is garantálható. $S \gg s$ egy „nagy” szám, amit a későbbiekben rögzítünk.

Legyen F azon ponthalmaz, amelyen egy $K_{\ell \times S}$ részgráfunk van ($|F| = \ell S$, F csúcshalmaz ℓ darab S elemű részre van osztva, amire mint F részei hivatkozunk).

Bizonyítás (folytatás)

Az indukciós lépéshez azt látjuk be, hogy ha tetszőleges s-re létezik olyan $S = S(s)$ szám, ha G elég nagy, a minimális fokszámra tett feltétel teljesül, továbbá G tartalmaz $K_{\ell\times S}$ részgráfot, akkor $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráf is garantálható. $S \gg s$ egy „nagy” szám, amit a későbbiekben rögzítünk.

Legyen F azon ponthalmaz, amelyen egy $K_{\ell\times S}$ részgráfunk van ($|F| = \ell S$, F csúcshalmaz ℓ darab S elemű részre van osztva, amire mint F részei hivatkozunk).

$\overline{F} = V(G) - F$ elemeit jó (halmazuk J) és rossz csúcsok (halmazuk R) kategóriákba osztjuk ($\overline{F} = J\dot{\cup}R$) a következők szerint.

Bizonyítás (folytatás)

Az indukciós lépéshez azt látjuk be, hogy ha tetszőleges s-re létezik olyan $S = S(s)$ szám, ha G elég nagy, a minimális fokszámra tett feltétel teljesül, továbbá G tartalmaz $K_{\ell\times S}$ részgráfot, akkor $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráf is garantálható. $S \gg s$ egy „nagy” szám, amit a későbbiekben rögzítünk.

Legyen F azon ponthalmaz, amelyen egy $K_{\ell\times S}$ részgráfunk van ($|F| = \ell S$, F csúcshalmaz ℓ darab S elemű részre van osztva, amire mint F részei hivatkozunk).

$\overline{F} = V(G) - F$ elemeit jó (halmazuk J) és rossz csúcsok (halmazuk R) kategóriákba osztjuk ($\overline{F} = J\dot{\cup}R$) a következők szerint.

$x \in J$ akkor és csak akkor, ha x-nek F mindegyik részében legalább s szomszédja van.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|J| > (s-1)\binom{S}{s}^{\ell}$, akkor készen vagyunk: J minden eleméhez rendeljünk egy típust:

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|J| > (s-1)\binom{S}{s}^{\ell}$, akkor készen vagyunk: J minden eleméhez rendeljünk egy típust: s (tetszőlegesen kiválasztott) szomszéd halmazát az ℓ rész mindegyikében.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|J| > (s-1)\binom{S}{s}^{\ell}$, akkor készen vagyunk: J minden eleméhez rendeljünk egy típust: s (tetszőlegesen kiválasztott) szomszéd halmazát az ℓ rész mindegyikében.

$\binom{S}{s}^{\ell}$ a lehetséges típusok száma.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|J| > (s-1)\binom{S}{s}^{\ell}$, akkor készen vagyunk: J minden eleméhez rendeljünk egy típust: s (tetszőlegesen kiválasztott) szomszéd halmazát az ℓ rész mindegyikében.

$\binom{S}{s}^{\ell}$ a lehetséges típusok száma.

J elemszáma akkora, hogy a skatlya-elv garantálja legalább s J-beli csúcs létét közös típussal.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|J| > (s-1)\binom{S}{s}^{\ell}$, akkor készen vagyunk: J minden eleméhez rendeljünk egy típust: s (tetszőlegesen kiválasztott) szomszéd halmazát az ℓ rész mindegyikében.

$\binom{S}{s}^{\ell}$ a lehetséges típusok száma.

J elemszáma akkora, hogy a skatlya-elv garantálja legalább s J-beli csúcs létét közös típussal.

F minden részéből a közös típus szerinti s csúcsot és J-ből a szóban forgó típussal rendelkező s csúcsot kivéve megtaláljuk a keresett $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráfot.

Bizonyítás (folytatás)

Ha $|J| > (s-1)\binom{S}{s}^{\ell}$, akkor készen vagyunk: J minden eleméhez rendeljünk egy típust: s (tetszőlegesen kiválasztott) szomszéd halmazát az ℓ rész mindegyikében.

$\binom{S}{s}^{\ell}$ a lehetséges típusok száma.

J elemszáma akkora, hogy a skatlya-elv garantálja legalább s J-beli csúcs létét közös típussal.

F minden részéből a közös típus szerinti s csúcsot és J-ből a szóban forgó típussal rendelkező s csúcsot kivéve megtaláljuk a keresett $K_{(\ell+1)\times s}$ részgráfot.

J elemszámának becsléséhez becsüljük meg az F és $\overline{F}$ között hiányzó élek számát.

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között I

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között I

Minden csúcs fokát alúlról becsültük,

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között I

Minden csúcs fokát alúlról becsültük, speciálisan F-ben minden csúcs legfeljebb

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1)$$

másikkal nincs összekötve.

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között I

Minden csúcs fokát alúlról becsültük, speciálisan F-ben minden csúcs legfeljebb

$$\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1)$$

másikkal nincs összekötve.

Azaz F és $\overline{F}$ között. legfeljebb

$$|F|\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1)=\ell S\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1)\le S\cdot\left(1-\frac{\varepsilon\ell}{2}\right)n$$

él hiányzik.

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között II

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között II

Másik oldalról R minden elemének a másik oldalon (F-ben) az egyik rész lehetséges S szomszéda közül legfeljebb s valósul meg.

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között II

Másik oldalról R minden elemének a másik oldalon (F-ben) az egyik rész lehetséges S szomszéda közül legfeljebb s valósul meg.

Így R minden eleme legalább $S - s$ élt kihagy. A hiányzó élek teljes száma legalább

$$|R|(S-s) = (n - |F| - |J|)(S-s) = (n - \ell S - |J|)(S-s).$$

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között I+II

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között I+II

$$(n - \ell S - |J|)(S - s) \leq S \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon\ell}{2}\right) n.$$

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között I+II

$$(n - \ell S - |J|)(S - s) \leq S \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon\ell}{2}\right) n.$$

Rendezve

$$(n - \ell S)(S - s) - S \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon\ell}{2}\right) n \leq (S - s)|J|.$$

Bizonyítás: Hiányzó élek F és $\overline{F}$ között I+II

$$(n - \ell S - |J|)(S - s) \le S \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon \ell}{2}\right) n.$$

Rendezve

$$(n - \ell S)(S - s) - S \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon \ell}{2}\right) n \le (S - s)|J|.$$

Azaz

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\ell S - s\right) n - \ell S(S - s) \le (S - s)|J|,$$

$$\frac{\varepsilon \ell S - 2s}{2(S - s)} \cdot n - \ell S \le |J|.$$

Bizonyítás: Befejezés

Az ε, ℓ, s paraméterek adottak, mi S-et választhatjuk.

Bizonyítás: Befejezés

Az ε, ℓ, s paraméterek adottak, mi S-et választhatjuk.

Ez legyen akkora, hogy a bal oldalon szereplő n-nem lineáris függvényben n együtthatója pozitív legyen.

Bizonyítás: Befejezés

Az ε, ℓ, s paraméterek adottak, mi S-et választhatjuk.

Ez legyen akkora, hogy a bal oldalon szereplő n-nem lineáris függvényben n együtthatója pozitív legyen.

Ez nyilván elérhető.

Bizonyítás: Befejezés

Az ε, ℓ, s paraméterek adottak, mi S-et választhatjuk.

Ez legyen akkora, hogy a bal oldalon szereplő n-nem lineáris függvényben n együtthatója pozitív legyen.

Ez nyilván elérhető.

S választása után J-ről kell belátni, hogy elég nagy.

Bizonyítás: Befejezés

Az ε, ℓ, s paraméterek adottak, mi S-et választhatjuk.

Ez legyen akkora, hogy a bal oldalon szereplő n-nem lineáris függvényben n együtthatója pozitív legyen.

Ez nyilván elérhető.

S választása után J-ről kell belátni, hogy elég nagy. Ez könnyen elérhető n választásával.

Bizonyítás: Befejezés

Az ε, ℓ, s paraméterek adottak, mi S-et választhatjuk.

Ez legyen akkora, hogy a bal oldalon szereplő n-nem lineáris függvényben n együtthatója pozitív legyen.

Ez nyilván elérhető.

S választása után J-ről kell belátni, hogy elég nagy. Ez könnyen elérhető n választásával.

Az indukció lépés és a bizonyítás teljes.

Szünet

Mit tudunk és mit nem?

Mit tudunk és mit nem?

Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak.

Mit tudunk és mit nem?

Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak.

Minden más esetben $ext(n; T)$ nagyságrendje kiolvasható az ismertetett eredményekből.

Mit tudunk és mit nem?

Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak.

Minden más esetben $ext(n; T)$ nagyságrendje kiolvasható az ismertetett eredményekből.

Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a $ext(n; T)$ vizsgálatát *degenerált problémának* nevezzük.

Mit tudunk és mit nem?

Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak.

Minden más esetben $ext(n; T)$ nagyságrendje kiolvasható az ismertetett eredményekből.

Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a $ext(n; T)$ vizsgálatát *degenerált problémának* nevezzük.

A degenerált esetben viszonylag kevés pontos eredmény ismert. Ha a tiltott részgráf C_4, C_6, C_{10} vagy $K_{2,k}$, $K_{3,k}$, akkor $ext(n; T)$ nagyságrendje ismert.

Mit tudunk és mit nem?

Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a fentiek nem sokat mondanak.

Minden más esetben $ext(n; T)$ nagyságrendje kiolvasható az ismertetett eredményekből.

Ha T páros, kört tartalmaz, akkor a $ext(n; T)$ vizsgálatát *degenerált problémának* nevezzük.

A degenerált esetben viszonylag kevés pontos eredmény ismert. Ha a tiltott részgráf C_4, C_6, C_{10} vagy $K_{2,k}$, $K_{3,k}$, akkor $ext(n; T)$ nagyságrendje ismert.

Például C_8, C_{12}, C_{14}, $\ldots$, $K_{4,4}$, $K_{4,5}$, $\ldots$, továbbá a kocka esete nem ismert.

Degenerált eset: C_4 példája

Degenerált eset: C_4 példája

Két részből áll a kitűzött probléma.

Degenerált eset: C_4 példája

Két részből áll a kitűzött probléma.

Be kell látnunk, hogy $G \in \mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfnek nem lehet sok éle.

Degenerált eset: C_4 példája

Két részből áll a kitűzött probléma.

Be kell látnunk, hogy $G \in \mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfnek nem lehet sok éle.

A másik oldalról egyetlen $G \in \mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfot kell konstruálnunk, amleynek „sok” éle van.

Degenerált eset: C_4 példája

Két részből áll a kitűzött probléma.

Be kell látnunk, hogy $G \in \mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfnek nem lehet sok éle.

A másik oldalról egyetlen $G \in \mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfot kell konstruálnunk, amleynek „sok" éle van.

Az első, absztrakt metematikai bizonyítás bizonyul könnyebbnek (egy egyszerű kettős leszámlálás lesz az ötlet).

Degenerált eset: C_4 példája

Két részből áll a kitűzött probléma.

Be kell látnunk, hogy $G \in \mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfnek nem lehet sok éle.

A másik oldalról egyetlen $G \in \mathcal{G}_n$ C_4-mentes gráfot kell konstruálnunk, amleynek „sok” éle van.

Az első, absztrakt metematikai bizonyítás bizonyul könnyebbnek (egy egyszerű kettős leszámlálás lesz az ötlet).

A konstrukcióhoz sok algebrai/geometriai ismeret szükséges.

A matematikai tétel

A matematikai tétel

Tétel

Legyen G egy n pontú, C_4-et részgráfként nem tartalmazó egyszerű gráf. Ekkor

$$|E(G)| \leq \frac{1}{4} \cdot n\sqrt{4n-3} + \frac{1}{4} \cdot n.$$

Bizonyítás

Bizonyítás

Két élt szomszédosnak nevezünk, ha van közös csúcsuk,

Bizonyítás

Két élt szomszédosnak nevezünk, ha van közös csúcsuk, azaz a gráf lerajzolásában a két él egy „$\wedge$ alakot” határoz meg.

Bizonyítás

Két élt szomszédosnak nevezünk, ha van közös csúcsuk, azaz a gráf lerajzolásában a két él egy „$\wedge$ alakot” határoz meg. Két ilyen élt *cseresznyének* nevezünk.

Bizonyítás

Két élt szomszédosnak nevezünk, ha van közös csúcsuk, azaz a gráf lerajzolásában a két él egy „$\wedge$ alakot” határoz meg. Két ilyen élt *cseresznyének* nevezünk. A két él közös csúcsa a cseresznye *középpontja*.

Bizonyítás

Két élt szomszédosnak nevezünk, ha van közös csúcsuk, azaz a gráf lerajzolásában a két él egy „$\wedge$ alakot” határoz meg. Két ilyen élt *cseresznyének* nevezünk. A két él közös csúcsa a cseresznye *középpontja*. Az a két pont, amely csak egy-egy élnek végpontja, a cseresznye *szemei*.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Hány cseresznye van a G gráfban?

Bizonyítás (folytatás)

Hány cseresznye van a G gráfban?

Először az összes pont esetén nézzük meg, hány olyan cseresznye van, amelynek középpontja az adott pont.

Bizonyítás (folytatás)

Hány cseresznye van a G gráfban?

Először az összes pont esetén nézzük meg, hány olyan cseresznye van, amelynek középpontja az adott pont.

Ilyen módon számolva $\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2}$ adódik a cseresznyék számára, ahol $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ a G gráf fokszámsorozata.

Bizonyítás (folytatás)

Hány cseresznye van a G gráfban?

Először az összes pont esetén nézzük meg, hány olyan cseresznye van, amelynek középpontja az adott pont.

Ilyen módon számolva $\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$ adódik a cseresznyék számára, ahol $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ a G gráf fokszámsorozata.

Egy másik módon számolva mindegyik pontpárra nézzük meg, hány olyan cseresznye van G-ben, amelynek szemei az adott két pont.

Bizonyítás (folytatás)

Hány cseresznye van a G gráfban?

Először az összes pont esetén nézzük meg, hány olyan cseresznye van, amelynek középpontja az adott pont.

Ilyen módon számolva $\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2}$ adódik a cseresznyék számára, ahol $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ a G gráf fokszámsorozata.

Egy másik módon számolva mindegyik pontpárra nézzük meg, hány olyan cseresznye van G-ben, amelynek szemei az adott két pont.

Mivel G-ben nincs C_4-gyel izomorf részgráf, ezért egy pontpárra legfeljebb egy cseresznye „támaszkodhat". Így a cseresznyék számára az $\binom{n}{2}$ felső becslést kapjuk.

A kétféle összeszámolás összevetése

A kétféle összeszámolás összevetése

$$\binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geq n\binom{\overline{d}}{2},$$

A kétféle összeszámolás összevetése

$$\binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geq n\binom{\overline{d}}{2},$$

ahol $\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$, a fokszámok átlaga, azaz $\frac{2|E|}{n}$.

A kétféle összeszámolás összevetése

$$\binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geq n\binom{\overline{d}}{2},$$

ahol $\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$, a fokszámok átlaga, azaz $\frac{2|E|}{n}$. A második egyenlőtlenség az $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ függvény konvexségéből és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

A kétféle összeszámolás összevetése

$$\binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geq n\binom{\overline{d}}{2},$$

ahol $\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$, a fokszámok átlaga, azaz $\frac{2|E|}{n}$. A második egyenlőtlenség az $\binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$ függvény konvexségéből és a Jensen-egyenlőtlenségből adódik.

Egyszerű számtan adja a bizonyítandót.

A matematikai tétel összefoglalása

A matematikai tétel összefoglalása

$\mathrm{ext}(n; C_4)$-re egy felső becslést kaptunk.

A matematikai tétel összefoglalása

$\mathrm{ext}(n; C_4)$-re egy felső becslést kaptunk.

A becslés aszimptotikus nagyságrendje $\frac{1}{2}n^{3/2}$.

Véges testek

Véges testek

Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test.

Véges testek

Legyen $\mathbb{F}$ egy véges test.

Gondolhatunk $\mathbb{F}_p$-re, ahol p egy prím. Azaz $\mathbb{F}_p$ a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmaz a modulo p aritmetikával.

Véges síkok

Véges síkok

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul.

Véges síkok

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul. Ahogy az Euklideszi sík koordináta geometriája is a valós számok aritmetikáján alapulva egy geometriai struktúrát hoz létre.

Véges síkok

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul. Ahogy az Euklideszi sík koordináta geometriája is a valós számok aritmetikáján alapulva egy geometriai struktúrát hoz létre.

A konstrukciók véges tesetekre is végrehajthatók. Így kapjuk a $PG(2, \mathbb{F})$ projektív síkot, amely koordináta geometriája az $\mathbb{F}$ testen alapul.

Véges síkok

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul. Ahogy az Euklideszi sík koordináta geometriája is a valós számok aritmetikáján alapulva egy geometriai struktúrát hoz létre.

A konstrukciók véges tesetekre is végrehajthatók. Így kapjuk a $PG(2, \mathbb{F})$ projektív síkot, amely koordináta geometriája az $\mathbb{F}$ testen alapul. (a 2-es a dimenzióra utal, PG a projektív geometria két szavának kezdőbetűiből ered.)

Véges síkok

A valós projektív sík koordináta geometriája a valós számokon alapul. Ahogy az Euklideszi sík koordináta geometriája is a valós számok aritmetikáján alapulva egy geometriai struktúrát hoz létre.

A konstrukciók véges tesetekre is végrehajthatók. Így kapjuk a $PG(2, \mathbb{F})$ projektív síkot, amely koordináta geometriája az $\mathbb{F}$ testen alapul. (a 2-es a dimenzióra utal, PG a projektív geometria két szavának kezdőbetűiből ered.)

Ebben a geometriai struktúrában a pontok, egyenesek száma véges.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk $\mathcal{P}$ ponthalmazát.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk $\mathcal{P}$ ponthalmazát. Azaz $\mathbb{F}^3 - \{(0, 0, 0)\}|_\sim$, ennek elemeit $[a, b, c]$-vel, vagy $(a : b : c)$-vel szokás jelölni.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk $\mathcal{P}$ ponthalmazát. Azaz $\mathbb{F}^3 - \{(0, 0, 0)\}|_\sim$, ennek elemeit $[a, b, c]$-vel, vagy $(a : b : c)$-vel szokás jelölni.

Az egyenesek $\mathcal{E}$ halmazát ugyanezen ekvivalenciaosztályokkal azonosítjük.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk $\mathcal{P}$ ponthalmazát. Azaz $\mathbb{F}^3 - \{(0, 0, 0)\}|_\sim$, ennek elemeit $[a, b, c]$-vel, vagy $(a : b : c)$-vel szokás jelölni.

Az egyenesek $\mathcal{E}$ halmazát ugyanezen ekvivalenciaosztályokkal azonosítjük. $[a, b, c]^*$ az (a, b, c) vektor ekvivalenciaosztályának neve, ha egyenest reprezentál.

A véges projektív síkgeometriák alapmodellje

Definíció

$\mathbb{F}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{F}\}$. Ezen a halmazon definiálunk egy relációt: $(a, b, c) \sim (a', b', c')$ akkor és csak akkor, ha található olyan nem-nulla $\lambda \in \mathbb{F}$, hogy $(a, b, c) = \lambda(a', b', c')$. Ez egy ekvivalenciareláció. $(0, 0, 0)$ egy egyelemű ekvivalenciaosztályt alkot. Minden más ekvivalenciaosztály $|\mathbb{F}| - 1$ elemű. Ezen ekvivalenciaosztályok halmaza alkotja a geometriánk $\mathcal{P}$ ponthalmazát. Azaz $\mathbb{F}^3 - \{(0, 0, 0)\}|_\sim$, ennek elemeit $[a, b, c]$-vel, vagy $(a : b : c)$-vel szokás jelölni.

Az egyenesek $\mathcal{E}$ halmazát ugyanezen ekvivalenciaosztályokkal azonosítjük. $[a, b, c]^*$ az (a, b, c) vektor ekvivalenciaosztályának neve, ha egyenest reprezentál.

$[a, b, c]$ és $[a', b', c']^*$ akkor és csak akkor illeszkedik, ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$.

$PG(2,\mathbb{F})$ geometriája

$PG(2, \mathbb{F})$ geometriája

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk

$PG(2, \mathbb{F})$ geometriája

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk Például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást.

$PG(2,\mathbb{F})$ geometriája

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk Például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást. Ezek ellenőrzése az $\mathbb{F}$ feletti lineáris algebra ismerősei számára egyszerű gyakorlatok.

$PG(2, \mathbb{F})$ geometriája

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk Például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást. Ezek ellenőrzése az $\mathbb{F}$ feletti lineáris algebra ismerősei számára egyszerű gyakorlatok.

A fentiekben egy algebrai struktúrából konstruáltunk egy geometriait, amely szép geometrai tulajdonságokkal rendelkezik.

$PG(2, \mathbb{F})$ geometriája

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk Például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást. Ezek ellenőrzése az $\mathbb{F}$ feletti lineáris algebra ismerősei számára egyszerű gyakorlatok.

A fentiekben egy algebrai struktúrából konstruáltunk egy geometriait, amely szép geometrai tulajdonságokkal rendelkezik.

A fordított logika is természetes. Elvárjuk a szép geometriai tulajdonságokat (axiómák) és keresünk ezt teljesítő modelleket.

$PG(2, \mathbb{F})$ geometriája

Az így kapott geometriai struktúra minden illeszkedési tulajdonságot teljesít, amit a valós projektív síkon megszoktunk Például bármely két különböző egyenes pontosan egy pontban metszi egymást. Ezek ellenőrzése az $\mathbb{F}$ feletti lineáris algebra ismerősei számára egyszerű gyakorlatok.

A fentiekben egy algebrai struktúrából konstruáltunk egy geometriait, amely szép geometrai tulajdonságokkal rendelkezik.

A fordított logika is természetes. Elvárjuk a szép geometriai tulajdonságokat (axiómák) és keresünk ezt teljesítő modelleket.

Esetünkben (az axiómák leírását itt nem részletezzük) ezek a véges projektív síkok. $PG(2, \mathbb{F})$ egy modell-sorozat a sok lehetőség közül.

$PG(2, \mathbb{F})$ kombinatorikája

$PG(2, \mathbb{F})$ kombinatorikája

$PG(2, \mathbb{F})$-ben $|\mathcal{P}| = |\mathcal{E}| = (|\mathbb{F}|^3 - 1)/(|\mathbb{F}| - 1) = |\mathbb{F}^2| + |\mathbb{F}| + 1.$

$PG(2,\mathbb{F})$ kombinatorikája

$PG(2,\mathbb{F})$-ben $|\mathcal{P}| = |\mathcal{E}| = (|\mathbb{F}|^3 - 1)/(|\mathbb{F}| - 1) = |\mathbb{F}^2| + |\mathbb{F}| + 1$.

Az is könnyen számolható, hogy minden egyenesre $|\mathbb{F}| + 1$ pont illeszkedik.

A gráfunk

A gráfunk

Konstrukció: Sok élt tartalmazó gráf C_4 nélkül

Legyen p egy prímszám. Definiálunk egy G_p egyszerű gráfot.

A gráfunk

Konstrukció: Sok élt tartalmazó gráf C_4 nélkül

Legyen p egy prímszám. Definiálunk egy G_p egyszerű gráfot.

G_p csúcsait $PG(2, \mathbb{F}_p)$ pontjai alkotják. Két csúcs, $[a, b, c]$ és $[a', b', c']$ akkor és csak akkor szomszédos ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$.

A gráfunk

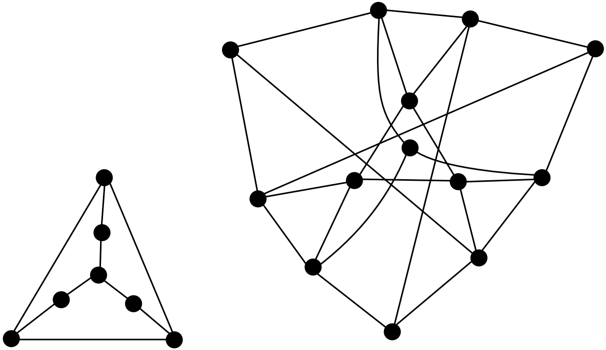
Konstrukció: Sok élt tartalmazó gráf C_4 nélkül

Legyen p egy prímszám. Definiálunk egy G_p egyszerű gráfot.

G_p csúcsait $PG(2, \mathbb{F}_p)$ pontjai alkotják. Két csúcs, $[a, b, c]$ és $[a', b', c']$ akkor és csak akkor szomszédos ha $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$. Azaz az egyik csúcs koordinátáit pontként, a másikét egyenesként olvasva illeszkedő párt kapunk.

Példák

A következő ábrán a $p = 2$ és $p = 3$ esetből adódó két gráfot láthatjuk.



Észrevételek a gráfról

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.*

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást.

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok.

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor $p + 1$ szomszédja van, különben p szomszédja van.

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor $p + 1$ szomszédja van, különben p szomszédja van. Azon v pontok, amelyek illeszkednek a v^* egyenesre olyanok, hogy koordinátáik teljesítik az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ egyenletet (modulo p aritmetikában dolgozunk!).

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor $p + 1$ szomszédja van, különben p szomszédja van. Azon v pontok, amelyek illeszkednek a v^* egyenesre olyanok, hogy koordinátáik teljesítik az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ egyenletet (modulo p aritmetikában dolgozunk!). Ez az egyenlet geometriailag egy kúpszeletet ír le. Ismert, hogy pontainak száma $p + 1$.

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor $p + 1$ szomszédja van, különben p szomszédja van. Azon v pontok, amelyek illeszkednek a v^* egyenesre olyanok, hogy koordinátáik teljesítik az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ egyenletet (modulo p aritmetikában dolgozunk!). Ez az egyenlet geometriailag egy kúpszeletet ír le. Ismert, hogy pontainak száma $p + 1$. Azaz $p + 1$ darab csúcs foka p és így p^2 csúcs foka $p + 1$.

Észrevételek a gráfról

(i) *G_p-ben nincs négy hosszú kör.* Valóban, ha ilyen lenne, akkor felvátva pontnak, egyenesnek értelmezve a négy hosszú kör csúcsait két olyan egyenest kapnánk, ami két különböző pontban metszenék egymást. Ez pedig nem lehetséges.

(ii) $|V(G_p)| = p^2 + p + 1 =: n$.

(iii) Az $v = [a, b, c]$ csúcs szomszédai az $v^* = [a, b, c]^*$ egyenesre illeszkedő v-től különböző pontok. Azaz, ha a v pont nem illeszkedik v^* egyenesre, akkor $p + 1$ szomszédja van, különben p szomszédja van. Azon v pontok, amelyek illeszkednek a v^* egyenesre olyanok, hogy koordinátáik teljesítik az $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ egyenletet (modulo p aritmetikában dolgozunk!). Ez az egyenlet geometriailag egy kúpszeletet ír le. Ismert, hogy pontainak száma $p + 1$. Azaz $p + 1$ darab csúcs foka p és így p^2 csúcs foka $p + 1$.

(iv) $2|E(G_p)| = p^2(p + 1) + (p + 1)p = p^3 + 2p^2 + p$, azaz $|E(G_p)| = (p^3 + 2p^2 + p)/2$.

A konstrukció összefoglalása

A konstrukció összefoglalása

Az észrevételből az élek pontszámtól való függésének nagyságrendjét emeljük ki: $|E| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$.

A konstrukció összefoglalása

Az észrevételből az élek pontszámtól való függésének nagyságrendjét emeljük ki: $|E| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$.

Ez az extremális élszám helyes nagyságrendje.

A konstrukció összefoglalása

Az észrevételből az élek pontszámtól való függésének nagyságrendjét emeljük ki: $|E| \sim \frac{1}{2}n^{3/2}$.

Ez az extremális élszám helyes nagyságrendje.

Tétel

$$ext(n, C_4) \sim \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!