Gráfok metszési paramétere és alkalmazásai

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Bevezetés

Bevezetés

Az előadás a metszési szám nevű gráfparaméterről szól.

Bevezetés

Az előadás a metszési szám nevű gráfparaméterről szól.

Ez egy olyan gráfparaméter, amely egy adott gráfról megmondja, hogy „milyen messze” van a síkgráfoktól.

Bevezetés

Az előadás a metszési szám nevű gráfparaméterről szól.

Ez egy olyan gráfparaméter, amely egy adott gráfról megmondja, hogy „milyen messze” van a síkgráfoktól.

Speciálisan síkgráfok esetén a paraméter 0 lesz.

Reguláris lerajzolás

Reguláris lerajzolás

Definíció

A G gráf egy λ lerajzolását *regulárisnak* nevezünk, ha a lerajzolásban nincs három élgörbe közös belső ponttal.

Reguláris lerajzolás

Definíció

A G gráf egy λ lerajzolását *regulárisnak* nevezünk, ha a lerajzolásban nincs három élgörbe közös belső ponttal.

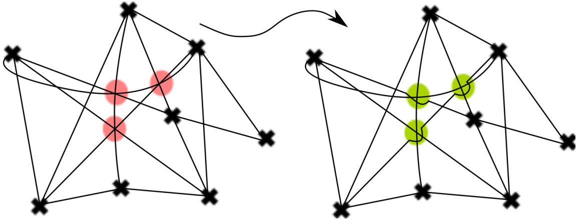
A regularitás egy technikai feltétel. Egy lerajzolás ha megsérti ezt a feltételt, akkor kis lokális változtatással elérhetjük, hogy lényegében ugyanaz a lerajzolás már reguláris legyen.

Reguláris lerajzolás

Definíció

A G gráf egy λ lerajzolását *regulárisnak* nevezünk, ha a lerajzolásban nincs három élgörbe közös belső ponttal.

A regularitás egy technikai feltétel. Egy lerajzolás ha megsérti ezt a feltételt, akkor kis lokális változtatással elérhetjük, hogy lényegében ugyanaz a lerajzolás már reguláris legyen.



Definíció I

Definíció I

Definíció

Legyen G egy gráf λ egy reguláris lerajzolása.

$$x(G,\lambda) = |\{P \in \mathbb{R}^2 : \ P\text{-n több élgörbe áthalad}\}|.$$

Definíció I

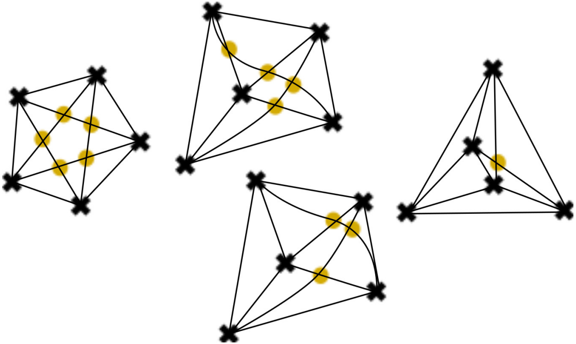
Definíció

Legyen G egy gráf λ egy reguláris lerajzolása.

$$x(G, \lambda) = |\{P \in \mathbb{R}^2 : \ P\text{-n több élgörbe áthalad}\}|.$$

Egy lerajzolás metszési számát definiálhattuk volna úgy is, hogy a regularitást nem tesszük fel. Ekkor azon nem-csúcs pontokat, amin több élgörbe halad át súlyozottan kell számolni. Ha egy ilyen ponton k élgörbe halad át, akkor súlya $\binom{k}{2}$.

Példák



$G = K_5$ esetén több lerajzolást vettünk. A különböző lerajzolásokhoz különböző metszési szám tartozik: $x(K_5, \lambda) = 5$, $x(K_5, \lambda') = 4$, $x(K_5, \lambda''') = 3$, $x(K_5, \lambda'''') = 1$.

Példák

Példák

$G = K_n$, a λ lerajzolás legyen olyan, hogy a csúcsok egy konvex n-szög csúcsaira illeszkedjenek. Azért, hogy reguláris lerajzoláshoz jussunk, kissé perturbáljuk véletlenül a csúcsokat.

Példák

$G = K_n$, a λ lerajzolás legyen olyan, hogy a csúcsok egy konvex n-szög csúcsaira illeszkedjenek. Azért, hogy reguláris lerajzoláshoz jussunk, kissé perturbáljuk véletlenül a csúcsokat. Továbbá az élgörbék legyenek szakaszok.

Példák

$G = K_n$, a λ lerajzolás legyen olyan, hogy a csúcsok egy konvex n-szög csúcsaira illeszkedjenek. Azért, hogy reguláris lerajzoláshoz jussunk, kissé perturbáljuk véletlenül a csúcsokat. Továbbá az élgörbék legyenek szakaszok. Az így kapott λ lerajzolásra $x(K_n, \lambda) = \binom{n}{4}$.

Példák

$G = K_n$, a λ lerajzolás legyen olyan, hogy a csúcsok egy konvex n-szög csúcsaira illeszkedjenek. Azért, hogy reguláris lerajzoláshoz jussunk, kissé perturbáljuk véletlenül a csúcsokat. Továbbá az élgörbék legyenek szakaszok. Az így kapott λ lerajzolásra $x(K_n, \lambda) = \binom{n}{4}$. Hiszen a metszések és a csúcsnégyesek között bijekció létesíthető.

Példák

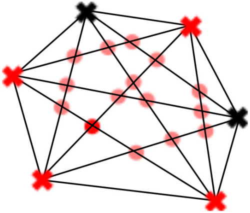
$G = K_n$, a λ lerajzolás legyen olyan, hogy a csúcsok egy konvex n-szög csúcsaira illeszkedjenek. Azért, hogy reguláris lerajzoláshoz jussunk, kissé perturbáljuk véletlenül a csúcsokat. Továbbá az élgörbék legyenek szakaszok. Az így kapott λ lerajzolásra $x(K_n, \lambda) = \binom{n}{4}$. Hiszen a metszések és a csúcsnégyesek között bijekció létesíthető.

K_6 esetét az alábbi ábrán láthatjuk.

Példák

$G = K_n$, a λ lerajzolás legyen olyan, hogy a csúcsok egy konvex n-szög csúcsaira illeszkedjenek. Azért, hogy reguláris lerajzoláshoz jussunk, kissé perturbáljuk véletlenül a csúcsokat. Továbbá az élgörbék legyenek szakaszok. Az így kapott λ lerajzolásra $x(K_n, \lambda) = \binom{n}{4}$. Hiszen a metszések és a csúcsnégyesek között bijekció létesíthető.

K_6 esetét az alábbi ábrán láthatjuk.



Észrevételek

Észrevételek

Ha $R \subseteq G$, akkor a G egy λ lerajzolása megszorítható R-re (λ értelmezési tartományát leszűkítjük a részgráf csúcsaira, éleire). Jelölésben: $\lambda|_R$.

Észrevételek

Ha $R \subseteq G$, akkor a G egy λ lerajzolása megszorítható R-re (λ értelmezési tartományát leszűkítjük a részgráf csúcsaira, éleire). Jelölésben: $\lambda|_R$.

Következmény

Legyen H egy n pontú egyszerű gráf ($H \subseteq K_n$) ekkor $x(H, \lambda|_H) \leq \binom{n}{4} = O(n^4)$, ahol λ a teljes gráf korábbi lerajzolása.

Észrevétel: Hurokélek nem számítanak

Észrevétel: Hurokélek nem számítanak

Legyen G és G_0 két gráf, G-ből úgy kapjuk G_0-at, hogy G-ből hurokéleket hagyunk el (vagy fordítva: G_0-ból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá).

Észrevétel: Hurokélek nem számítanak

Legyen G és G_0 két gráf, G-ből úgy kapjuk G_0-at, hogy G-ből hurokéleket hagyunk el (vagy fordítva: G_0-ból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá). Ekkor G_0 tetszőleges λ lerajzolása kiterjeszthető

Észrevétel: Hurokélek nem számítanak

Legyen G és G_0 két gráf, G-ből úgy kapjuk G_0-at, hogy G-ből hurokéleket hagyunk el (vagy fordítva: G_0-ból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá). Ekkor G_0 tetszőleges λ lerajzolása kiterjeszthető G egy $\widehat{\lambda}$ lerajzolására úgy, hogy ne keletkezzen további metszés, azaz $x(G, \widehat{\lambda}) = x(G_0, \lambda)$.

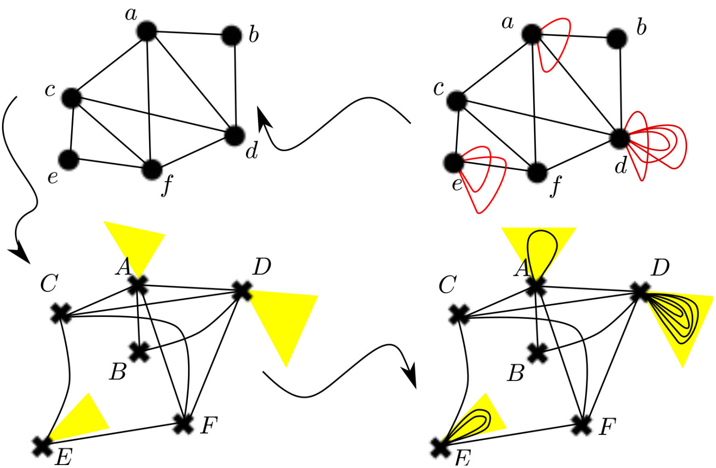
Észrevétel: Hurokélek nem számítanak

Legyen G és G_0 két gráf, G-ből úgy kapjuk G_0-at, hogy G-ből hurokéleket hagyunk el (vagy fordítva: G_0-ból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá). Ekkor G_0 tetszőleges λ lerajzolása kiterjeszthető G egy $\widehat{\lambda}$ lerajzolására úgy, hogy ne keletkezzen további metszés, azaz $x(G, \widehat{\lambda}) = x(G_0, \lambda)$.

Tekintsük a G_0 gráf λ lerajzolását egy x csúcs környékén. Elég kis környezetben az x-ben összefutó élek egy csillag alakzatot alkotnak, amely ágai között „elég hely van” tetszőleges számú hurokélnek.

Hurokélek nem számítanak ábrán

Hurokélek nem számítanak ábrán



Párhuzamos élek számítanak

Párhuzamos élek számítanak

Legyen G egy gráf. Legyen G_0 az az egyszerű gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a hurokéleket és minden párhuzamos élseregből egyetlen élet tartunk meg.

Párhuzamos élek számítanak

Legyen G egy gráf. Legyen G_0 az az egyszerű gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a hurokéleket és minden párhuzamos élseregből egyetlen élet tartunk meg. Fordítva: A G_0 egyszerű gráfból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá vagy/és létező élek mellé párhuzamos élt adunk hozzá.

Párhuzamos élek számítanak

Legyen G egy gráf. Legyen G_0 az az egyszerű gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a hurokéleket és minden párhuzamos élseregből egyetlen élet tartunk meg. Fordítva: A G_0 egyszerű gráfból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá vagy/és létező élek mellé párhuzamos élt adunk hozzá. Ekkor G_0 tetszőleges λ szép lerajzolása kiterjeszthető G egy $\widehat{\lambda}$ szép lerajzolására. Azaz $x(G_0, \lambda) = 0$ esetén $x(G, \widehat{\lambda}) = 0$.

Párhuzamos élek számítanak

Legyen G egy gráf. Legyen G_0 az az egyszerű gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a hurokéleket és minden párhuzamos élseregből egyetlen élet tartunk meg. Fordítva: A G_0 egyszerű gráfból úgy kapjuk G-t, hogy hurokéleket adunk hozzá vagy/és létező élek mellé párhuzamos élt adunk hozzá. Ekkor G_0 tetszőleges λ szép lerajzolása kiterjeszthető G egy $\widehat{\lambda}$ szép lerajzolására. Azaz $x(G_0, \lambda) = 0$ esetén $x(G, \widehat{\lambda}) = 0$.

Tekintsük a G_0 gráf λ lerajzolását egy e élgörbe környékén. Ennek lesz egy kis holdacska szabad környezete, ahol „elég hely van” tetszőleges számú párhuzamosélnek. A hurokélek hozzáadása az előző észrevétel alapján megoldható.

Definíció II

Definíció II

Definíció

(Metszési szám)]

$$x(G) = \min\{x(G, \lambda) : \ \lambda \text{ reguláris}\}.$$

Definíció II

Definíció

(Metszési szám)]

$$x(G) = \min\{x(G, \lambda) : \ \lambda \text{ reguláris}\}.$$

Észrevétel

$x(G) = 0$ akkor és csak akkor, ha G síkgráf.

Definíció II

Definíció

(Metszési szám)]

$$x(G) = \min\{x(G,\lambda) : \ \lambda \text{ reguláris}\}.$$

Észrevétel

$x(G) = 0$ akkor és csak akkor, ha G síkgráf.

Feladat

$x(K_5) = x(K_{3,3}) = 1.$

Definíció II

Definíció

(Metszési szám)]

$$x(G) = \min\{x(G, \lambda) : \ \lambda \text{ reguláris}\}.$$

Észrevétel

$x(G) = 0$ akkor és csak akkor, ha G síkgráf.

Feladat

$x(K_5) = x(K_{3,3}) = 1.$

Egy n pontú G egyszerű gráf esetén $x(G) = O(n^4)$.

Történeti megjegyzések

Történeti megjegyzések

A fogalom a XX. század 40-es éveiben született, amikor Turán Pál munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott.

Történeti megjegyzések

A fogalom a XX. század 40-es éveiben született, amikor Turán Pál munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott.

Feladata csillék tologatása volt kemencék és vasúti kocsik között.

Történeti megjegyzések

A fogalom a XX. század 40-es éveiben született, amikor Turán Pál munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott.

Feladata csillék tologatása volt kemencék és vasúti kocsik között. A kemencék és a felrakodó helyek páronként össze voltak kötve a csillék síneivel.

Történeti megjegyzések

A fogalom a XX. század 40-es éveiben született, amikor Turán Pál munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott.

Feladata csillék tologatása volt kemencék és vasúti kocsik között. A kemencék és a felrakodó helyek páronként össze voltak kötve a csillék síneivel.

A munka lenehezebb része két sín találkozáskor volt, amikor a csillék megzökkentek.

Történeti megjegyzések

A fogalom a XX. század 40-es éveiben született, amikor Turán Pál munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott.

Feladata csillék tologatása volt kemencék és vasúti kocsik között. A kemencék és a felrakodó helyek páronként össze voltak kötve a csillék síneivel.

A munka lenehezebb része két sín találkozáskor volt, amikor a csillék megzökkentek.

Természetes volt a kérdés: olyan sínrendszer tervezése, amely n kemencét és m felrakodó helyet köt össze és minimális számú sín-talákozással rendelkezik.

Történeti megjegyzések

A fogalom a XX. század 40-es éveiben született, amikor Turán Pál munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott.

Feladata csillék tologatása volt kemencék és vasúti kocsik között. A kemencék és a felrakodó helyek páronként össze voltak kötve a csillék síneivel.

A munka lenehezebb része két sín találkozáskor volt, amikor a csillék megzökkentek.

Természetes volt a kérdés: olyan sínrendszer tervezése, amely n kemencét és m felrakodó helyet köt össze és minimális számú sín-talákozással rendelkezik.

Azaz a kérdés $x(K_{n,m})$ meghatározása. Később vetették fel $x(K_n)$ meghatározásának problémáját.

Történeti megjegyzések

A fogalom a XX. század 40-es éveiben született, amikor Turán Pál munkaszolgálatosként egy téglagyárban dolgozott.

Feladata csillék tologatása volt kemencék és vasúti kocsik között. A kemencék és a felrakodó helyek páronként össze voltak kötve a csillék síneivel.

A munka lenehezebb része két sín találkozáskor volt, amikor a csillék megzökkentek.

Természetes volt a kérdés: olyan sínrendszer tervezése, amely n kemencét és m felrakodó helyet köt össze és minimális számú sín-talákozással rendelkezik.

Azaz a kérdés $x(K_{n,m})$ meghatározása. Később vetették fel $x(K_n)$ meghatározásának problémáját.

Habár mindkét esetben sejtik az optimális lerajzolást, a sejtés mind a mai napig központi nyitott kérdés.

Egy szépítési lépés

Egy szépítési lépés

Ha e és f két él, közös v csúccsal rendelkeznek és élgörbéik átmetszik egymást, akkor nem gazdaságos a lerajzolás.

Egy szépítési lépés

Ha e és f két él, közös v csúccsal rendelkeznek és élgörbéik átmetszik egymást, akkor nem gazdaságos a lerajzolás.

v szomszédjai felől v felé haladva az átmetszés helyett „váltsanak görbét az élek”.

Egy szépítési lépés

Ha e és f két él, közös v csúccsal rendelkeznek és élgörbéik átmetszik egymást, akkor nem gazdaságos a lerajzolás.

v szomszédjai felöl v felé haladva az átmetszés helyett „váltsanak görbét az élek”.

Ekkor ugyanazon gráf egy lerajzolását kapjuk, az eredeti λ lerajzolást λ'-re cserélhetjük.

Egy szépítési lépés

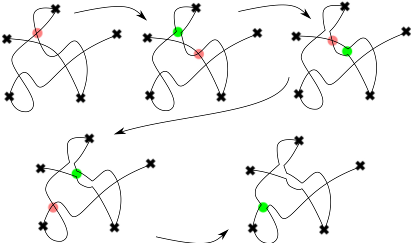
Ha e és f két él, közös v csúccsal rendelkeznek és élgörbéik átmetszik egymást, akkor nem gazdaságos a lerajzolás.

v szomszédjai felöl v felé haladva az átmetszés helyett „váltsanak görbét az élek”.

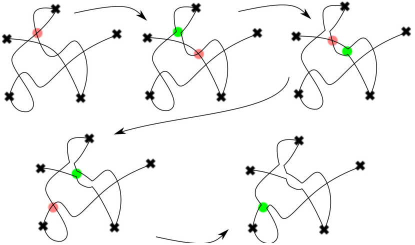
Ekkor ugyanazon gráf egy lerajzolását kapjuk, az eredeti λ lerajzolást λ'-re cserélhetjük. Közben eggyel csökkent a metszési szám.

Egy szépítési lépés ábrán

Egy szépítési lépés ábrán



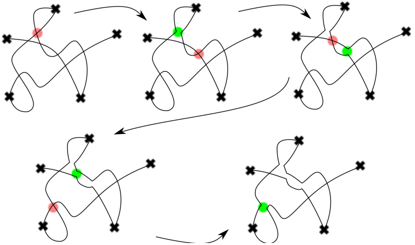
Egy szépítési lépés ábrán



Definíció

Egy λ lerajzolás V-szép lerajzolás, ha az összefutó élgörbék nem metszik át egymást.

Egy szépítési lépés ábrán



Definíció

Egy λ lerajzolás V-szép lerajzolás, ha az összefutó élgörbék nem metszik át egymást.

Észrevétel

A G gráf tetszőleges λ lerajzolásához található olyan λ' V-szép lerajzolás, amelyre $x(G, \lambda') \leq x(G, \lambda)$.

Triviális becslés a metszési számra

Triviális becslés a metszési számra

Emlékeztető

Legyen G egyszerű síkgráf. Ha $|V| \geq 3$, akkor $|E| \leq 3|V| - 6$.

Triviális becslés a metszési számra

Emlékeztető

Legyen G egyszerű síkgráf. Ha $|V| \geq 3$, akkor $|E| \leq 3|V| - 6$.

Következmény (Triviális becslés a metszési számra)

Legyen G egy egyszerű gráf és λ tetszőleges reguláris lerajzolása, ekkor

$$x(G, \lambda) \geq |E| - 3|V|.$$

A triviális becslés bizonyítása

A triviális becslés bizonyítása

Legyen R részgráfja G-nek úgy, hogy $V(G) = V(R)$ és $E(R)$ egy olyan maximális élhalmaz, hogy $\lambda|_R$-ben az élgörbék szépen legyenek lerajzolva.

A triviális becslés bizonyítása

Legyen R részgráfja G-nek úgy, hogy $V(G) = V(R)$ és $E(R)$ egy olyan maximális élhalmaz, hogy $\lambda|_R$-ben az élgörbék szépen legyenek lerajzolva.

Ekkor az emlékeztetőből adódik, hogy $|E(R)| \leq 3|V|$.

A triviális becslés bizonyítása

Legyen R részgráfja G-nek úgy, hogy $V(G) = V(R)$ és $E(R)$ egy olyan maximális élhalmaz, hogy $\lambda|_R$-ben az élgörbék szépen legyenek lerajzolva.

Ekkor az emlékeztetőből adódik, hogy $|E(R)| \leq 3|V|$.

Így $|E(G)| - |E(R)|$, azaz legalább $|E(G)| - 3|V|$ darab él van, ami nincs R-ben.

A triviális becslés bizonyítása

Legyen R részgráfja G-nek úgy, hogy $V(G) = V(R)$ és $E(R)$ egy olyan maximális élhalmaz, hogy $\lambda|_R$-ben az élgörbék szépen legyenek lerajzolva.

Ekkor az emlékeztetőből adódik, hogy $|E(R)| \leq 3|V|$.

Így $|E(G)| - |E(R)|$, azaz legalább $|E(G)| - 3|V|$ darab él van, ami nincs R-ben.

Ezek mindegyikére (külön-külön) a λ-élgörbéjét $(R, \lambda|_R)$-hoz adva metszésnek kell keletkezni (R választása miatt).

A triviális becslés bizonyítása

Legyen R részgráfja G-nek úgy, hogy $V(G) = V(R)$ és $E(R)$ egy olyan maximális élhalmaz, hogy $\lambda|_R$-ben az élgörbék szépen legyenek lerajzolva.

Ekkor az emlékeztetőből adódik, hogy $|E(R)| \leq 3|V|$.

Így $|E(G)| - |E(R)|$, azaz legalább $|E(G)| - 3|V|$ darab él van, ami nincs R-ben.

Ezek mindegyikére (külön-külön) a λ-élgörbéjét $(R, \lambda|_R)$-hoz adva metszésnek kell keletkezni (R választása miatt).

Ezek mind különböző metszések (valemely R-beli és különböző $E(G) - E(R)$-beli élek között vannak).

A triviális becslés bizonyítása

Legyen R részgráfja G-nek úgy, hogy $V(G) = V(R)$ és $E(R)$ egy olyan maximális élhalmaz, hogy $\lambda|_R$-ben az élgörbék szépen legyenek lerajzolva.

Ekkor az emlékeztetőből adódik, hogy $|E(R)| \leq 3|V|$.

Így $|E(G)| - |E(R)|$, azaz legalább $|E(G)| - 3|V|$ darab él van, ami nincs R-ben.

Ezek mindegyikére (külön-külön) a λ-élgörbéjét $(R, \lambda|_R)$-hoz adva metszésnek kell keletkezni (R választása miatt).

Ezek mind különböző metszések (valemely R-beli és különböző $E(G) - E(R)$-beli élek között vannak).

Ezekből következik. hogy

$$x(G, \lambda) \geq |E(G)| - 3|V|.$$

A Metszési Lemma

A Metszési Lemma

Tétel (Metszési lemma)

Ha G egyszerű gráf és $|E| \geq 4|V|$, akkor

$$x(G) \geq \frac{1}{64} \frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

A Metszési Lemma

Tétel (Metszési lemma)

Ha G egyszerű gráf és $|E| \geq 4|V|$, akkor

$$x(G) \geq \frac{1}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Egyszerű gráfunkra vonatkozó élbecslés garantálja, hogy G nem síkgráf, azaz $x(G) \geq 1$.

A Metszési Lemma egy következménye

A Metszési Lemma egy következménye

Következmény

$$x(K_n) \geq \frac{1}{64}\frac{\binom{n}{2}^3}{n^2} = \frac{1}{128}n^4 + O(n^3) = \Omega(n^4).$$

A Metszési Lemma egy következménye

Következmény

$$x(K_n) \geq \frac{1}{64}\frac{\binom{n}{2}^3}{n^2} = \frac{1}{128}n^4 + O(n^3) = \Omega(n^4).$$

Az Ω jelölés jelentése: alsó becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal. (Ahogy O egy felső becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal.)

A Metszési Lemma egy következménye

Következmény

$$x(K_n) \geq \frac{1}{64}\frac{\binom{n}{2}^3}{n^2} = \frac{1}{128}n^4 + O(n^3) = \Omega(n^4).$$

Az Ω jelölés jelentése: alsó becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal. (Ahogy O egy felső becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal.) Ha a nagyságrendben alsó és felső becslés is adható pozitív konstansokkal, akkor a Θ jelölést használjuk.

A Metszési Lemma egy következménye

Következmény

$$x(K_n) \geq \frac{1}{64}\frac{\binom{n}{2}^3}{n^2} = \frac{1}{128}n^4 + O(n^3) = \Omega(n^4).$$

Az Ω jelölés jelentése: alsó becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal. (Ahogy O egy felső becslés egy rejtett (pozitív) konstanssal.) Ha a nagyságrendben alsó és felső becslés is adható pozitív konstansokkal, akkor a Θ jelölést használjuk.

Következmény

$$x(K_n) = \Theta(n^4).$$

A Metszési Lemma bizonyítása

A Metszési Lemma bizonyítása

Legyen λ a G-nek tetszőleges V-szép lerajzolása.

A Metszési Lemma bizonyítása

Legyen λ a G-nek tetszőleges V-szép lerajzolása.

Vegyük azt az $\underline{R}$ véletlen feszített részgráfot, amelyet úgy kapunk, hogy minden csúcsra függetlenül döntünk: p valószínűséggel meghagyjuk, illetve $1-p$ valószínűséggel eltöröljük a csúcsot. (p-t később határozzuk meg.)

A Metszési Lemma bizonyítása

Legyen λ a G-nek tetszőleges V-szép lerajzolása.

Vegyük azt az $\underline{R}$ véletlen feszített részgráfot, amelyet úgy kapunk, hogy minden csúcsra függetlenül döntünk: p valószínűséggel meghagyjuk, illetve $1-p$ valószínűséggel eltöröljük a csúcsot. (p-t később határozzuk meg.)

Alkalmazzuk a lemmát $\underline{R}$-re. Ekkor

$$x(\underline{R}, \lambda|_{\underline{R}}) \geq |E(\underline{R})| - 3|V(\underline{R})|.$$

A Metszési Lemma bizonyítása

Legyen λ a G-nek tetszőleges V-szép lerajzolása.

Vegyük azt az $\underline{R}$ véletlen feszített részgráfot, amelyet úgy kapunk, hogy minden csúcsra függetlenül döntünk: p valószínűséggel meghagyjuk, illetve $1-p$ valószínűséggel eltöröljük a csúcsot. (p-t később határozzuk meg.)

Alkalmazzuk a lemmát $\underline{R}$-re. Ekkor

$$x(\underline{R}, \lambda|_{\underline{R}}) \geq |E(\underline{R})| - 3|V(\underline{R})|.$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét.

A Metszési Lemma bizonyítása

Legyen λ a G-nek tetszőleges V-szép lerajzolása.

Vegyük azt az $\underline{R}$ véletlen feszített részgráfot, amelyet úgy kapunk, hogy minden csúcsra függetlenül döntünk: p valószínűséggel meghagyjuk, illetve $1-p$ valószínűséggel eltöröljük a csúcsot. (p-t később határozzuk meg.)

Alkalmazzuk a lemmát $\underline{R}$-re. Ekkor

$$x(\underline{R}, \lambda|_{\underline{R}}) \geq |E(\underline{R})| - 3|V(\underline{R})|.$$

Vegyük mindkét oldal várható értékét. Az egyenlőtlenség természetesen a várható értékek között is fennáll:

$$\mathbb{E}(x(\underline{R}, \lambda|_{\underline{R}})) \geq \mathbb{E}(|E(\underline{R})|) - 3\mathbb{E}(|V(\underline{R})|).$$

A Metszési Lemma bizonyítása (folytatás)

A Metszési Lemma bizonyítása (folytatás)

Nézzük a várható értékeket! A bal oldalon két metsző él megmaradása szükséges, amihez 4 pont megmaradása kell. A jobb oldalon az élekhez 2 pont megmaradása kell, a pontokhoz pedig egy.

A Metszési Lemma bizonyítása (folytatás)

Nézzük a várható értékeket! A bal oldalon két metsző él megmaradása szükséges, amihez 4 pont megmaradása kell. A jobb oldalon az élekhez 2 pont megmaradása kell, a pontokhoz pedig egy.

Az egyes pontok megmaradásának valószínűsége p, különböző pontok megmaradása független események. Ebből:

$$p^4 x(G, \lambda) \geq p^2 |E(G)| - 3p|V(G)|.$$

A Metszési Lemma bizonyítása (folytatás)

Nézzük a várható értékeket! A bal oldalon két metsző él megmaradása szükséges, amihez 4 pont megmaradása kell. A jobb oldalon az élekhez 2 pont megmaradása kell, a pontokhoz pedig egy.

Az egyes pontok megmaradásának valószínűsége p, különböző pontok megmaradása független események. Ebből:

$$p^4 x(G,\lambda) \geq p^2 |E(G)| - 3p|V(G)|.$$

p értéke pozitív lesz, így egyenlőtlenségünket leoszthatjuk p^4-nel.

$$x(G,\lambda) \geq \frac{|E(G)|}{p^2} - \frac{3|V(G)|}{p^3}.$$

A Metszési Lemma bizonyítása (folytatás)

A Metszési Lemma bizonyítása (folytatás)

Válasszuk p-t $\frac{4|V|}{|E|}$-nek. (Ez feltételünk alapján legfeljebb 1.) Ekkor

$$x(G,\lambda) \geq \frac{1}{16}\frac{|E|^3}{|V|^2} - \frac{3}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2} = \frac{1}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

A Metszési Lemma bizonyítása (folytatás)

Válasszuk p-t $\frac{4|V|}{|E|}$-nek. (Ez feltételünk alapján legfeljebb 1.) Ekkor

$$x(G,\lambda) \geq \frac{1}{16}\frac{|E|^3}{|V|^2} - \frac{3}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2} = \frac{1}{64}\frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Ha λ egy optimális lerajzolás, akkor kapjuk a tétel állítását.

Végső megjegyzés

Végső megjegyzés

Az $\frac{1}{64}$ együttható a bizonyításból adódott.

Végső megjegyzés

Az $\frac{1}{64}$ együttható a bizonyításból adódott.

Több odafigyeléssel javítható,

Végső megjegyzés

Az $\frac{1}{64}$ együttható a bizonyításból adódott.

Több odafigyeléssel javítható, de optimális értéke nem ismert.

Szünet

A metszési lemma geometriai alkalmazása

A metszési lemma geometriai alkalmazása

Definíció

Legyen $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ egy véges síkbeli ponthalmaz és $\mathcal{E}$ egy véges síkbeli egyenes halmaz.

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = |\{(P, e) : P \in \mathcal{P},\ e \in \mathcal{E} \text{ és } P\, I\, e\}|,$$

ahol $P\, I\, e$ az jelöli, hogy a P pont illeszkedik az e egyenesre.

A metszési lemma geometriai alkalmazása

Definíció

Legyen $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ egy véges síkbeli ponthalmaz és $\mathcal{E}$ egy véges síkbeli egyenes halmaz.

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) = |\{(P, e) : P \in \mathcal{P},\ \ e \in \mathcal{E} \text{ és } P\, I\, e\}|,$$

ahol $P\, I\, e$ az jelöli, hogy a P pont illeszkedik az e egyenesre.

Tétel (Szemerédi–Trotter-tétel)

$$I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq 4(|P||E|)^{2/3} + 4|\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|.$$

A felső becslés nagyságrendje

A felső becslés nagyságrendje

$$\mathcal{O}(|P|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|) = \mathcal{O}(\max\{|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3}, |\mathcal{P}|, |\mathcal{E}|\}).$$

A felső becslés nagyságrendje

$$\mathcal{O}(|P|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|) = \mathcal{O}(\max\{|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3}, |\mathcal{P}|, |\mathcal{E}|\}).$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges p és e poitív egészekre megadható olyan p elemű $\mathcal{P}$ ponthalmaz és e elemű $\mathcal{E}$ egyeneshalmaz, hogy a köztük lévő illeszkedés legalább ezred része legyen a felső becslésnek.

A felső becslés nagyságrendje

$$\mathcal{O}(|P|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} + |\mathcal{P}| + |\mathcal{E}|) = \mathcal{O}(\max\{|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3}, |\mathcal{P}|, |\mathcal{E}|\}).$$

Megjegyezzük, hogy tetszőleges p és e poitív egészekre megadható olyan p elemű $\mathcal{P}$ ponthalmaz és e elemű $\mathcal{E}$ egyeneshalmaz, hogy a köztük lévő illeszkedés legalább ezred része legyen a felső becslésnek.

Azaz a felső becslés nagyságrendje optimális.

A bizonyítás

A bizonyítás

Feltehető, hogy minden $e \in \mathcal{E}$ egyenes áthalad $\mathcal{P}$-beli ponton.

A bizonyítás

Feltehető, hogy minden $e \in \mathcal{E}$ egyenes áthalad $\mathcal{P}$-beli ponton.

Készítsünk egy egyszerű gráfot $\mathcal{P}$-ből és $\mathcal{E}$-ből:

A bizonyítás

Feltehető, hogy minden $e \in \mathcal{E}$ egyenes áthalad $\mathcal{P}$-beli ponton.

Készítsünk egy egyszerű gráfot $\mathcal{P}$-ből és $\mathcal{E}$-ből: $\mathcal{P}$ elemei lesznek a csúcsok.

A bizonyítás

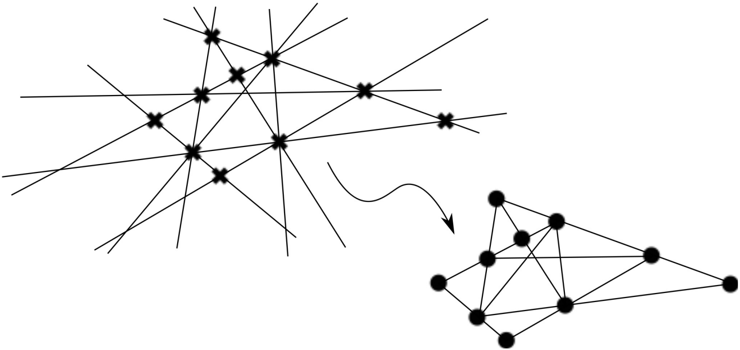
Feltehető, hogy minden $e \in \mathcal{E}$ egyenes áthalad $\mathcal{P}$-beli ponton.

Készítsünk egy egyszerű gráfot $\mathcal{P}$-ből és $\mathcal{E}$-ből: $\mathcal{P}$ elemei lesznek a csúcsok. Két csúcs, $P, Q \in \mathcal{P}$ akkor és csak akkor szomszédos, ha egy $e \in \mathcal{E}$ egyenesre illeszkednek és ezen nincs közöttük más $\mathcal{P}$-beli pont.

A bizonyítás

Feltehető, hogy minden $e \in \mathcal{E}$ egyenes áthalad $\mathcal{P}$-beli ponton.

Készítsünk egy egyszerű gráfot $\mathcal{P}$-ből és $\mathcal{E}$-ből: $\mathcal{P}$ elemei lesznek a csúcsok. Két csúcs, $P, Q \in \mathcal{P}$ akkor és csak akkor szomszédos, ha egy $e \in \mathcal{E}$ egyenesre illeszkednek és ezen nincs közöttük más $\mathcal{P}$-beli pont.



A bizonyítás (folytatás)

A bizonyítás (folytatás)

Ekkor $V = |\mathcal{P}|$.

A bizonyítás (folytatás)

Ekkor $V = |\mathcal{P}|$.

Az élek számát is kifejezhetjük a kiinduló geometriai konfigurációnk paramétereiből:

A bizonyítás (folytatás)

Ekkor $V = |\mathcal{P}|$.

Az élek számát is kifejezhetjük a kiinduló geometriai konfigurációnk paramétereiből:

$k \geq 1$ esetén, ha egy egyenesre k darab $\mathcal{P}$-beli pont esik, akkor ezen az egyenes $k-1$ éllel járul gráfunkhoz.

A bizonyítás (folytatás)

Ekkor $V = |\mathcal{P}|$.

Az élek számát is kifejezhetjük a kiinduló geometriai konfigurációnk paramétereiből:

$k \geq 1$ esetén, ha egy egyenesre k darab $\mathcal{P}$-beli pont esik, akkor ezen az egyenes $k-1$ éllel járul gráfunkhoz.

Az így összeszámolt részeredmémyeket összeadva minden egyenesre, kapjuk hogy $|E| = I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|$.

A bizonyítás (folytatás)

Ekkor $V = |\mathcal{P}|$.

Az élek számát is kifejezhetjük a kiinduló geometriai konfigurációnk paramétereiből:

$k \geq 1$ esetén, ha egy egyenesre k darab $\mathcal{P}$-beli pont esik, akkor ezen az egyenes $k-1$ éllel járul gráfunkhoz.

Az így összeszámolt részeredmémyeket összeadva minden egyenesre, kapjuk hogy $|E| = I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|$.

Legyen λ gráfunk azon lerajzolása, ahol minden csúcs $\mathcal{P}$-beli helye által reprezentált és az élgörbék egyenes szakaszok (így minden élgörbe a megfelelő két végpont szomsédságát bizonyító $\mathcal{E}$-beli egyenes egy szakasza).

A bizonyítás (folytatás)

Ekkor $V = |\mathcal{P}|$.

Az élek számát is kifejezhetjük a kiinduló geometriai konfigurációnk paramétereiből:

$k \geq 1$ esetén, ha egy egyenesre k darab $\mathcal{P}$-beli pont esik, akkor ezen az egyenes $k-1$ éllel járul gráfunkhoz.

Az így összeszámolt részeredmémyeket összeadva minden egyenesre, kapjuk hogy $|E| = I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|$.

Legyen λ gráfunk azon lerajzolása, ahol minden csúcs $\mathcal{P}$-beli helye által reprezentált és az élgörbék egyenes szakaszok (így minden élgörbe a megfelelő két végpont szomsédságát bizonyító $\mathcal{E}$-beli egyenes egy szakasza).

Továbbá $x(G) \leq x(G, \lambda) \leq \binom{|\mathcal{E}|}{2} \leq |\mathcal{E}|^2$.

A bizonyítás (folytatás)

A bizonyítás (folytatás)

1. eset: $|E| < 4|V|$.

A bizonyítás (folytatás)

1. eset: $|E| < 4|V|$. Azaz $I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}| < 4|\mathcal{P}|$.

A bizonyítás (folytatás)

1. eset: $|E| < 4|V|$. Azaz $I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}| < 4|\mathcal{P}|$.

2. eset: $|E| \geq 4|V|$.

A bizonyítás (folytatás)

1. eset: $|E| < 4|V|$. Azaz $I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}| < 4|\mathcal{P}|$.

2. eset: $|E| \geq 4|V|$. Ekkor a metszési lemma alkalmazható:

$$|\mathcal{E}|^2 \geq \binom{|\mathcal{E}|}{2} \geq x(G, p) \geq \frac{1}{64} \frac{(I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|)^3}{|\mathcal{P}|^2}.$$

A bizonyítás (folytatás)

1. eset: $|E| < 4|V|$. Azaz $I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}| < 4|\mathcal{P}|$.

2. eset: $|E| \geq 4|V|$. Ekkor a metszési lemma alkalmazható:

$$|\mathcal{E}|^2 \geq \binom{|\mathcal{E}|}{2} \geq x(G, p) \geq \frac{1}{64} \frac{(I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|)^3}{|\mathcal{P}|^2}.$$

Ebből rendezéssel, adódik, hogy

$$4|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} \geq I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) - |\mathcal{E}|.$$

A bizonyítás (folytatás)

1. eset: $|E| < 4|V|$. Azaz $I(\mathcal{P},\mathcal{E}) - |\mathcal{E}| < 4|\mathcal{P}|$.

2. eset: $|E| \geq 4|V|$. Ekkor a metszési lemma alkalmazható:

$$|\mathcal{E}|^2 \geq \binom{|\mathcal{E}|}{2} \geq x(G,p) \geq \frac{1}{64}\frac{(I(\mathcal{P},\mathcal{E}) - |\mathcal{E}|)^3}{|\mathcal{P}|^2}.$$

Ebből rendezéssel, adódik, hogy

$$4|\mathcal{P}|^{2/3}|\mathcal{E}|^{2/3} \geq I(\mathcal{P},\mathcal{E}) - |\mathcal{E}|.$$

Mindkét esetben igaz a bizonyítandó.

Szünet

Az alapprobléma

Az alapprobléma

Definíció

$A, B \subset \mathbb{R}$ véges halmazok. $A + B = \{a + b : \ a \in A$ és $b \in B\}$ és $A \cdot B = \{a \cdot b : \ a \in A$ és $b \in B\}$. (Azaz a szokásos komplexus összeadás és szorzás műveletét vizsgáljuk.)

Az alapprobléma

Definíció

$A, B \subset \mathbb{R}$ véges halmazok. $A + B = \{a + b : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$ és $A \cdot B = \{a \cdot b : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$. (Azaz a szokásos komplexus összeadás és szorzás műveletét vizsgáljuk.)

$A + A$-t, illetve $A \cdot A$-t az A halmaz összeghalmazának, illetve szorzathalmazának nevezzük.

Az alapprobléma

Definíció

$A, B \subset \mathbb{R}$ véges halmazok. $A + B = \{a + b : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$ és $A \cdot B = \{a \cdot b : \ a \in A \text{ és } b \in B\}$. (Azaz a szokásos komplexus összeadás és szorzás műveletét vizsgáljuk.)

$A + A$-t, illetve $A \cdot A$-t az A halmaz összeghalmazának, illetve szorzathalmazának nevezzük.

Kérdés: Milyen nagy, illetve kicsi lehet $|A + A|$ és $|A \cdot A|$? A továbbiakban legyen $|A| = n$.

Alapészrevételek: Összeghalmaz

Alapészrevételek: Összeghalmaz

$|A+A|$ legfeljebb $\binom{n}{2}+n$.

Alapészrevételek: Összeghalmaz

$|A + A|$ legfeljebb $\binom{n}{2} + n$.

Legyen A egy véletlenül választott n elemszámú számhalmaz, ekkor $A + A$ majdnem biztosan $\binom{n}{2} + n$ elemű lesz.

Alapészrevételek: Összeghalmaz

$|A+A|$ legfeljebb $\binom{n}{2}+n$.

Legyen A egy véletlenül választott n elemszámú számhalmaz, ekkor $A+A$ majdnem biztosan $\binom{n}{2}+n$ elemű lesz.

Becsüljük $|A+A|$ minimumát. Legyen A olyan, hogy elemei $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

- Alsó becslés:
  $a_1+a_1 < a_1+a_2 < \ldots a_1+a_n < a_2+a_n < \ldots < a_n+a_n$.
  alapján mindig lesz legalább $2n-1$ különböző érték $A+A$-ban.
- Felső becslés: Ha A számtani sorozat, akkor $|A+A| = 2n-1$.

Alapészrevételek: Szorzathalmaz

Alapészrevételek: Szorzathalmaz

$|A + A|$ és $|A \cdot A|$ legfeljebb $\binom{n}{2} + n$.

Alapészrevételek: Szorzathalmaz

$|A+A|$ és $|A \cdot A|$ legfeljebb $\binom{n}{2}+n$.

Legyen A egy véletlenül választott n elemszámú számhalmaz, ekkor $A \cdot A$ majdnem biztosan $\binom{n}{2}+n$ elemű lesz.

Alapészrevételek: Szorzathalmaz

$|A + A|$ és $|A \cdot A|$ legfeljebb $\binom{n}{2} + n$.

Legyen A egy véletlenül választott n elemszámú számhalmaz, ekkor $A \cdot A$ majdnem biztosan $\binom{n}{2} + n$ elemű lesz.

Becsülhetjük $|A \cdot A|$ minimumát. $|A \cdot A|$ lehet $2n - 1$, például geometriai sorozatnál.

Alapészrevételek: Szorzathalmaz

$|A + A|$ és $|A \cdot A|$ legfeljebb $\binom{n}{2} + n$.

Legyen A egy véletlenül választott n elemszámú számhalmaz, ekkor $A \cdot A$ majdnem biztosan $\binom{n}{2} + n$ elemű lesz.

Becsülhetjük $|A \cdot A|$ minimumát. $|A \cdot A|$ lehet $2n - 1$, például geometriai sorozatnál.

Lineáris alsó becslés is adható: Ehhez vegyük A-nak egy nagy részét amely azonos előjelű (ez választható legalább $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ elemszámúnak).

Alapészrevételek: Szorzathalmaz

$|A+A|$ és $|A \cdot A|$ legfeljebb $\binom{n}{2}+n$.

Legyen A egy véletlenül választott n elemszámú számhalmaz, ekkor $A \cdot A$ majdnem biztosan $\binom{n}{2}+n$ elemű lesz.

Becsülhetjük $|A \cdot A|$ minimumát. $|A \cdot A|$ lehet $2n-1$, például geometriai sorozatnál.

Lineáris alsó becslés is adható: Ehhez vegyük A-nak egy nagy részét amely azonos előjelű (ez választható legalább $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ elemszámúnak).

Majd a kiválasztott elemek abszolút értékeinek logaritmusára alkalmazzuk az additív rész alsó becslését.

A sejtés

A sejtés

A maximális elemszámmal szemben a minimális elemszámnál az összeghalmaz és a szorzathalmaz esetén teljesen más típusú halmazok lesznek extremálisak (számtani, illetve mértani sorozatok).

A sejtés

A maximális elemszámmal szemben a minimális elemszámnál az összeghalmaz és a szorzathalmaz esetén teljesen más típusú halmazok lesznek extremálisak (számtani, illetve mértani sorozatok).

Van-e olyan halmaz, ahol az összeghalmaz és a szorzathalmaz egyszerre kicsi lesz?

A sejtés

A maximális elemszámmal szemben a minimális elemszámnál az összeghalmaz és a szorzathalmaz esetén teljesen más típusú halmazok lesznek extremálisak (számtani, illetve mértani sorozatok).

Van-e olyan halmaz, ahol az összeghalmaz és a szorzathalmaz egyszerre kicsi lesz?

Erdős Pál kérdése: Mit tudunk mondani az A számhalmaz $\max\{|A+A|, |A\cdot A|\}$ paraméteréről?

A sejtés

A maximális elemszámmal szemben a minimális elemszámnál az összeghalmaz és a szorzathalmaz esetén teljesen más típusú halmazok lesznek extremálisak (számtani, illetve mértani sorozatok).

Van-e olyan halmaz, ahol az összeghalmaz és a szorzathalmaz egyszerre kicsi lesz?

Erdős Pál kérdése: Mit tudunk mondani az A számhalmaz $\max\{|A+A|, |A \cdot A|\}$ paraméteréről?

Sejtés (Erdős—Szemerédi-sejtés)

Minden pozitív ϵ-ra

$$\min_{\substack{A \\ A\subseteq\mathbb{R}, |A|=n}} \max\{|A+A|, |A\cdot A|\} = \Omega(n^{2-\varepsilon}).$$

A sejtés

A maximális elemszámmal szemben a minimális elemszámnál az összeghalmaz és a szorzathalmaz esetén teljesen más típusú halmazok lesznek extremálisak (számtani, illetve mértani sorozatok).

Van-e olyan halmaz, ahol az összeghalmaz és a szorzathalmaz egyszerre kicsi lesz?

Erdős Pál kérdése: Mit tudunk mondani az A számhalmaz $\max\{|A+A|, |A \cdot A|\}$ paraméteréről?

Sejtés (Erdős—Szemerédi-sejtés)

Minden pozitív ϵ-ra

$$\min_{\substack{A \\ A\subseteq\mathbb{R}, |A|=n}} \max\{|A+A|, |A \cdot A|\} = \Omega(n^{2-\varepsilon}).$$

A sejtés mind a mai napig nyitott.

Elekes György tétele

Elekes György tétele

Mi egy rész eredményt bizonyítunk (amelynél már erősebb becslések is ismertek).

Elekes György tétele

Mi egy rész eredményt bizonyítunk (amelynél már erősebb becslések is ismertek).

Tétel (Elekes György)

Elég nagy n-re

$$\min_{\substack{A \\ A\subseteq\mathbb{R}, |A|=n}} \max\{|A+A|, |A\cdot A|\} \geq \frac{1}{10} n^{5/4},$$

azaz tetszőleges n-elemű A számhalmazra $\max\{|A+A|, |A\cdot A|\} = \Omega(n^{5/4})$.

Elekes bizonyítása

Elekes bizonyítása

Tegyük fel, hogy $0 \notin A$.

Elekes bizonyítása

Tegyük fel, hogy $0 \notin A$.

Definiálunk egy síkbeli ponthalmazt és egyeneshalmazt:

$$\mathcal{P}_A = \{(\pi, \sigma) : \pi \in A \cdot A,\ \sigma \in A + A\},$$

Elekes bizonyítása

Tegyük fel, hogy $0 \notin A$.

Definiálunk egy síkbeli ponthalmazt és egyeneshalmazt:

$$\mathcal{P}_A = \{(\pi, \sigma) : \pi \in A \cdot A,\ \sigma \in A + A\},$$

$$\mathcal{E}_A = \{e_{a,a'} :\ y = \frac{1}{a} \cdot x + a',\ a, a' \in A\}.$$

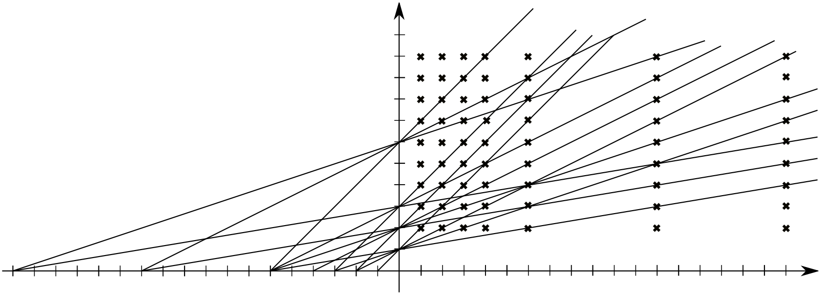
Elekes bizonyítása (folytatás)

Elekes bizonyítása (folytatás)

A következő ábrán a konstrukció látható az $A = \{1, 2, 3, 6\}$ esetben.

Elekes bizonyítása (folytatás)

A következő ábrán a konstrukció látható az $A = \{1, 2, 3, 6\}$ esetben.



Elekes bizonyítása (folytatás)

Elekes bizonyítása (folytatás)

Számoljuk ki a pont- és egyeneshalmazunk azon paramétereit, amik a Szemerédi—Trotter-tételben szerepet játszanak:

Elekes bizonyítása (folytatás)

Számoljuk ki a pont- és egyeneshalmazunk azon paramétereit, amik a Szemerédi—Trotter-tételben szerepet játszanak:

- $|\mathcal{P}_A| = |A \cdot A| \cdot |A + A|$.

Elekes bizonyítása (folytatás)

Számoljuk ki a pont- és egyeneshalmazunk azon paramétereit, amik a Szemerédi—Trotter-tételben szerepet játszanak:

- $|\mathcal{P}_A| = |A \cdot A| \cdot |A + A|$.
- Az $e_{a,a'}$ egyenletét tengelymetszetes alakba írjuk: $\frac{1}{a'} \cdot y - \frac{1}{a \cdot a'} \cdot x = 1$. Látható, hogy a tengelymetszetek (azaz a geometriai ponthalmaz) és (a, a') kölcsönösen meghatározzák egymást. Azaz $|\mathcal{E}_A| = |A|^2$.

Elekes bizonyítása (folytatás)

Számoljuk ki a pont- és egyeneshalmazunk azon paramétereit, amik a Szemerédi—Trotter-tételben szerepet játszanak:

- $|\mathcal{P}_A| = |A \cdot A| \cdot |A + A|$.
- Az $e_{a,a'}$ egyenletét tengelymetszetes alakba írjuk: $\frac{1}{a'} \cdot y - \frac{1}{a \cdot a'} \cdot x = 1$. Látható, hogy a tengelymetszetek (azaz a geometriai ponthalmaz) és (a, a') kölcsönösen meghatározzák egymást. Azaz $|\mathcal{E}_A| = |A|^2$.
- Mennyi az illeszkedések száma? Az $e_{a,a'}$ egyenesre illeszkednek az $(a \cdot a_1, a_1 + a')$, $(a \cdot a_2, a_2 + a'), \dots$, ahol $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. Ebből $I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \geq |A||\mathcal{E}| = |A|^3$.

Elekes bizonyítása (folytatás)

Elekes bizonyítása (folytatás)

Használjuk fel a Szemerédi—Trotter-tételt:

$$n^3 = |A|^3 \leq I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq 4|A{\cdot}A|^{2/3}{\cdot}|A{+}A|^{2/3}{\cdot}(|A|^2)^{2/3}{+}4|A{\cdot}A||A{+}A|{+}|A|^2.$$

Elekes bizonyítása (folytatás)

Használjuk fel a Szemerédi—Trotter-tételt:

$$n^3 = |A|^3 \leq I(\mathcal{P},\mathcal{E}) \leq 4|A{\cdot}A|^{2/3}{\cdot}|A{+}A|^{2/3}{\cdot}(|A|^2)^{2/3}{+}4|A{\cdot}A||A{+}A|{+}|A|^2.$$

Tudjuk, hogy $|A|^2 = n^2 \leq \frac{1}{3}n^3$, ha n elég nagy. Feltehető, hogy $4|A+A||A\cdot A| \leq \frac{1}{3}n^3$, hiszen más esetben a bizonyítandónál erősebb állításunk lenne.

Elekes bizonyítása (folytatás)

Használjuk fel a Szemerédi—Trotter-tételt:

$$n^3 = |A|^3 \leq I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq 4|A{\cdot}A|^{2/3}{\cdot}|A{+}A|^{2/3}{\cdot}(|A|^2)^{2/3}{+}4|A{\cdot}A||A{+}A|{+}|A|^2.$$

Tudjuk, hogy $|A|^2 = n^2 \leq \frac{1}{3}n^3$, ha n elég nagy. Feltehető, hogy $4|A+A||A \cdot A| \leq \frac{1}{3}n^3$, hiszen más esetben a bizonyítandónál erősebb állításunk lenne.

A jobb oldal utolsó két tagját a bal oldalra víve, a bal oldalon még legalább $1/3 \cdot n^3$ marad:

$$\frac{1}{3}n^3 \leq 4|A \cdot A|^{2/3}|A + A|^{2/3} \cdot n^{4/3}.$$

Elekes bizonyítása (folytatás)

Használjuk fel a Szemerédi—Trotter-tételt:

$n^3 = |A|^3 \leq I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq 4|A{\cdot}A|^{2/3}{\cdot}|A{+}A|^{2/3}{\cdot}(|A|^2)^{2/3}{+}4|A{\cdot}A||A{+}A|{+}|A|^2.$

Tudjuk, hogy $|A|^2 = n^2 \leq \frac{1}{3}n^3$, ha n elég nagy. Feltehető, hogy $4|A+A||A\cdot A| \leq \frac{1}{3}n^3$, hiszen más esetben a bizonyítandónál erősebb állításunk lenne.

A jobb oldal utolsó két tagját a bal oldalra víve, a bal oldalon még legalább $1/3 \cdot n^3$ marad:

$$\frac{1}{3}n^3 \leq 4|A \cdot A|^{2/3}|A + A|^{2/3} \cdot n^{4/3}.$$

Ezekután egyszerű rendezés vezet el a bizonyítás befejezéséhez:

$$\frac{1}{12}n^{5/3} \leq |A \cdot A|^{2/3}|A + A|^{2/3}.$$

Elekes bizonyítása (folytatás)

Használjuk fel a Szemerédi—Trotter-tételt:

$n^3 = |A|^3 \leq I(\mathcal{P}, \mathcal{E}) \leq 4|A\cdot A|^{2/3}\cdot|A+A|^{2/3}\cdot(|A|^2)^{2/3}+4|A\cdot A||A+A|+|A|^2.$

Tudjuk, hogy $|A|^2 = n^2 \leq \frac{1}{3}n^3$, ha n elég nagy. Feltehető, hogy $4|A+A||A\cdot A| \leq \frac{1}{3}n^3$, hiszen más esetben a bizonyítandónál erősebb állításunk lenne.

A jobb oldal utolsó két tagját a bal oldalra víve, a bal oldalon még legalább $1/3\cdot n^3$ marad:

$$\frac{1}{3}n^3 \leq 4|A\cdot A|^{2/3}|A+A|^{2/3}\cdot n^{4/3}.$$

Ezekután egyszerű rendezés vezet el a bizonyítás befejezéséhez:

$$\frac{1}{12}n^{5/3} \leq |A\cdot A|^{2/3}|A+A|^{2/3}.$$

$$0{,}15\cdot n^{5/4} \leq \sqrt{|A\cdot A||A+A|} \leq \max\{|A\cdot A|, |A+A|\}.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!