Gráfok élszínezései

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Bevezetés

Bevezetés

Definíció

G gráf élszínezése $c : E(G) \to \mathbb{N}^+$ függvény. c egy k-élszínezése G-nek, ha $c(E(G)) \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$.

Bevezetés

Definíció

G gráf élszínezése $c : E(G) \to \mathbb{N}^+$ függvény. c egy k-élszínezése G-nek, ha $c(E(G)) \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$.

Definíció

c jó élszínezése G-nek, ha minden x csúcsra az ott összefutó éleknek $d(x)$ darab különböző színe van.

Bevezetés

Definíció

G gráf élszínezése $c : E(G) \to \mathbb{N}^+$ függvény. c egy k-élszínezése G-nek, ha $c(E(G)) \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$.

Definíció

c jó élszínezése G-nek, ha minden x csúcsra az ott összefutó éleknek $d(x)$ darab különböző színe van.

Jelölés

$$\chi_e(G) := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : G\text{-nek van jó } k\text{-élszínezése}\}.$$

Bevezetés

Definíció

G gráf élszínezése $c : E(G) \to \mathbb{N}^+$ függvény. c egy k-élszínezése G-nek, ha $c(E(G)) \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$.

Definíció

c jó élszínezése G-nek, ha minden x csúcsra az ott összefutó éleknek $d(x)$ darab különböző színe van.

Jelölés

$$\chi_e(G) := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : G\text{-nek van jó } k\text{-élszínezése}\}.$$

A hurokél akadálya a jó színezésnek. Ebben az előadásban minden gráfunk hurokél-mentes.

Emlékeztető

$\Delta(G) := \max_{x \in V(G)} d(x)$, a G gráf maximális fokszáma.

Emlékeztető

$\Delta(G) := \max_{x \in V(G)} d(x)$, a G gráf maximális fokszáma.

Észrevétel

$$\Delta(G) \leq \chi_e(G).$$

Példa

Példa

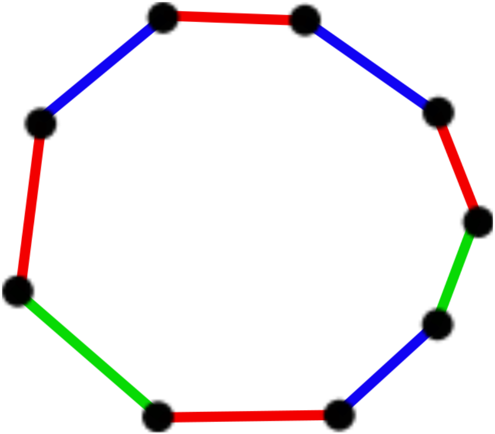


Figure: C_{2k+1} páratlan kör ($k \in \mathbb{Z}^+$) (az ábrán $k = 4$). Könnyen látható, hogy $\Delta(C_{2k+1}) = 2$ és $\chi_e(C_{2k+1}) = 3$.

Példa

Példa

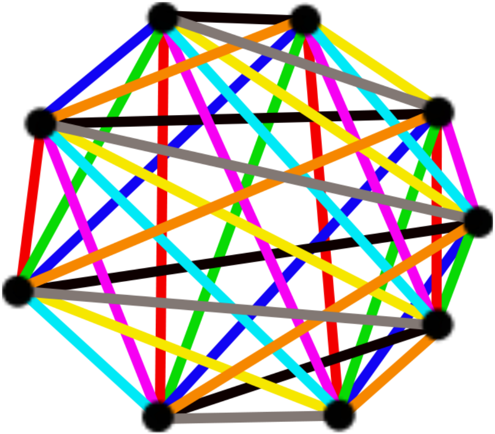


Figure: K_{2k+1} páratlan pontú teljes gráf (az ábrán $k = 4$). Ekkor $\Delta(K_{2k+1}) = 2k$ és $\chi_e(K_{2k+1}) = 2k + 1$.

Példa

Példa

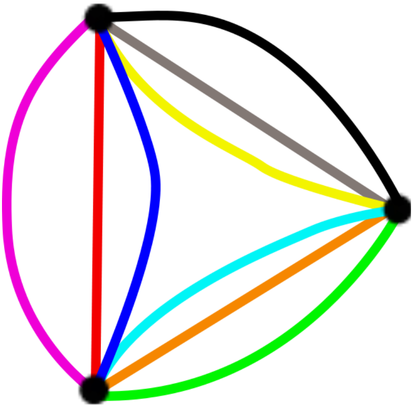


Figure: Legyen T_k az a gráf, amelynek három csúcsa és bármely kettőt k párhuzamos él köti össze (az ábrán $k = 3$). Ekkor bármély két él szomszédos. Így $\Delta(T_k) = 2k$ és $\chi_e(T_k) = 3k$.

Alaptételek

Alaptételek

Tétel (Shannon tétele)

Legyen G hurokél-mentes gráf. Ekkor

$$\chi_e(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G).$$

Alaptételek

Tétel (Shannon tétele)

Legyen G hurokél-mentes gráf. Ekkor

$$\chi_e(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G).$$

Tétel (Vizing tétele)

Legyen G egyszerű gráf. Ekkor

$$\chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

A bizonyítások alapötlete: mohóság

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával.

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk.

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk. c_0 lehet egy algoritmus futásának részeredménye, vagy egy indukció bizonyítás indukciós feltevése.

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk. c_0 lehet egy algoritmus futásának részeredménye, vagy egy indukció bizonyítás indukciós feltevése.

A színezetlen élekre szeretnénk kiterjeszteni c_0-t. Ennek leírása lehet algoritmusunk következő teendője, vagy az indukciós bizonyítás indukciós lépésének igazolása.

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk. c_0 lehet egy algoritmus futásának részeredménye, vagy egy indukció bizonyítás indukciós feltevése.

A színezetlen élekre szeretnénk kiterjeszteni c_0-t. Ennek leírása lehet algoritmusunk következő teendője, vagy az indukciós bizonyítás indukciós lépésének igazolása.

Minden v csúcsra legyen S_v a v körüli éleken nem használt palettabeli színek halmaza.

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk. c_0 lehet egy algoritmus futásának részeredménye, vagy egy indukció bizonyítás indukciós feltevése.

A színezetlen élekre szeretnénk kiterjeszteni c_0-t. Ennek leírása lehet algoritmusunk következő teendője, vagy az indukciós bizonyítás indukciós lépésének igazolása.

Minden v csúcsra legyen S_v a v körüli éleken nem használt palettabeli színek halmaza. Azaz $|S_v| = |P| - d_v$, ahol d_v a v-re illeszkedő színezett élek száma.

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk. c_0 lehet egy algoritmus futásának részeredménye, vagy egy indukció bizonyítás indukciós feltevése.

A színezetlen élekre szeretnénk kiterjeszteni c_0-t. Ennek leírása lehet algoritmusunk következő teendője, vagy az indukciós bizonyítás indukciós lépésének igazolása.

Minden v csúcsra legyen S_v a v körüli éleken nem használt palettabeli színek halmaza. Azaz $|S_v| = |P| - d_v$, ahol d_v a v-re illeszkedő színezett élek száma.

Ha egy színezetlen uv élre $S_u \cap S_v \neq \emptyset$, akkor tetszőleges $\gamma \in S_u \cap S_v$ színre az e élre kioszthatjuk a γ színt.

A bizonyítások alapötlete: mohóság

Feltesszük, hogy G bizonyos éleit már kiszíneztük egy P paletta felhasználásával. erre a részleges színezésre c_0-ként hivatkozunk. c_0 lehet egy algoritmus futásának részeredménye, vagy egy indukció bizonyítás indukciós feltevése.

A színezetlen élekre szeretnénk kiterjeszteni c_0-t. Ennek leírása lehet algoritmusunk következő teendője, vagy az indukciós bizonyítás indukciós lépésének igazolása.

Minden v csúcsra legyen S_v a v körüli éleken nem használt palettabeli színek halmaza. Azaz $|S_v| = |P| - d_v$, ahol d_v a v-re illeszkedő színezett élek száma.

Ha egy színezetlen uv élre $S_u \cap S_v \neq \emptyset$, akkor tetszőleges $\gamma \in S_u \cap S_v$ színre az e élre kioszthatjuk a γ színt. Ezt a c_0 mohó kiterjesztésének nevezzük (a korábban színezett élek megtartják színüket).

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

Kiemelünk két színt: γ és γ'-t.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

Kiemelünk két színt: γ és γ'-t. $G_{\gamma,\gamma'}$-t alkossa G összes csúcsa és a γ, illetve γ' színű élek.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

Kiemelünk két színt: γ és γ'-t. $G_{\gamma,\gamma'}$-t alkossa G összes csúcsa és a γ, illetve γ' színű élek.

Ezen részgráf maximális foka 2. Azaz komponensei utak és körök.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

Kiemelünk két színt: γ és γ'-t. $G_{\gamma,\gamma'}$-t alkossa G összes csúcsa és a γ, illetve γ' színű élek.

Ezen részgráf maximális foka 2. Azaz komponensei utak és körök. A körök páros hosszú körök, amelyeken a két szín alternál.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

Kiemelünk két színt: γ és γ'-t. $G_{\gamma,\gamma'}$-t alkossa G összes csúcsa és a γ, illetve γ' színű élek.

Ezen részgráf maximális foka 2. Azaz komponensei utak és körök. A körök páros hosszú körök, amelyeken a két szín alternál.

Egy P útkomponens mentén (legyen x és y az út két végpontja, amely csúcsokról feltesszük, hogy $x \neq y$) a γ, γ' színek felcserélése egy módosított jó élszínezéshez vezet, amelyben a színezett élek halmaza nem változott.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

Kiemelünk két színt: γ és γ'-t. $G_{\gamma,\gamma'}$-t alkossa G összes csúcsa és a γ, illetve γ' színű élek.

Ezen részgráf maximális foka 2. Azaz komponensei utak és körök. A körök páros hosszú körök, amelyeken a két szín alternál.

Egy P útkomponens mentén (legyen x és y az út két végpontja, amely csúcsokról feltesszük, hogy $x \neq y$) a γ, γ' színek felcserélése egy módosított jó élszínezéshez vezet, amelyben a színezett élek halmaza nem változott.

Könnyű látni, hogy az úton kívüli pontokban, az ott összefutó éleket látva semmi nem érzékelhető a színezés módosításából.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatás

Kiemelünk két színt: γ és γ'-t. $G_{\gamma,\gamma'}$-t alkossa G összes csúcsa és a γ, illetve γ' színű élek.

Ezen részgráf maximális foka 2. Azaz komponensei utak és körök. A körök páros hosszú körök, amelyeken a két szín alternál.

Egy P útkomponens mentén (legyen x és y az út két végpontja, amely csúcsokról feltesszük, hogy $x \neq y$) a γ, γ' színek felcserélése egy módosított jó élszínezéshez vezet, amelyben a színezett élek halmaza nem változott.

Könnyű látni, hogy az úton kívüli pontokban, az ott összefutó éleket látva semmi nem érzékelhető a színezés módosításából. Az út belső pontjaiban két él színe felcserélődött, de az S halmaz nem változott.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatások haszna

A bizonyítások alapötlete: Javítgatások haszna

x-ben és y-ban S megváltozik, az új halmazok: $S_x \Delta \{\gamma, \gamma'\}$, $S_y \Delta \{\gamma, \gamma'\}$. Ez valódi változás.

A bizonyítások alapötlete: Javítgatások haszna

x-ben és y-ban S megváltozik, az új halmazok: $S_x \Delta \{\gamma, \gamma'\}$, $S_y \Delta \{\gamma, \gamma'\}$. Ez valódi változás.

x és y a $G_{\gamma,\gamma'}$ egy útkomponensének végpontjai, így γ, γ' színek egyike az út mentén illeszkedik rá, míg a másik szín szabad szín (a komponens „nem folytatódik tovább").

A bizonyítások alapötlete: Javítgatások haszna

x-ben és y-ban S megváltozik, az új halmazok: $S_x\Delta\{\gamma,\gamma'\}$, $S_y\Delta\{\gamma,\gamma'\}$. Ez valódi változás.

x és y a $G_{\gamma,\gamma'}$ egy útkomponensének végpontjai, így γ,γ' színek egyike az út mentén illeszkedik rá, míg a másik szín szabad szín (a komponens „nem folytatódik tovább").

Ha a mohó kiterjesztés nem működik, akkor ez a kicsinek tűnő változtatás sokat jelenthet.

Szünet

Shannon tételének bizonyítása

Shannon tételének bizonyítása

A tétel $\Delta(G) \leq 1$ esete nyilvánvaló. Így feltesszük, hogy $\Delta(G) \geq 2$.

Shannon tételének bizonyítása

A tétel $\Delta(G) \leq 1$ esete nyilvánvaló. Így feltesszük, hogy $\Delta(G) \geq 2$.

Most $P = \{1, 2, \ldots, \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor\}$. Legyen $e = uv$ egy tetszőleges él (tehát u és v különböző) és tegyük fel, hogy c_0 kiszínezi $G - e$-t. Célunk G teljes színezése.

$S_u \cap S_v \neq \emptyset$ eset: mohóság

$S_u \cap S_v \neq \emptyset$ eset: mohóság

Tudjuk, hogy
$|S_x| \geq |P| - \Delta(G) \geq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor - \Delta(G) = \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ teljesül minden csúcsra és minden parciális (vagy akár teljes) színezésre.

$S_u \cap S_v \neq \emptyset$ eset: mohóság

Tudjuk, hogy
$|S_x| \geq |P| - \Delta(G) \geq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor - \Delta(G) = \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ teljesül minden csúcsra és minden parciális (vagy akár teljes) színezésre.

Sőt u és v körül vagy egy színezetlen él, azaz
$|S_u|, |S_v| \geq \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor + 1$.

$S_u \cap S_v \neq \emptyset$ eset: mohóság

Tudjuk, hogy
$|S_x| \geq |P| - \Delta(G) \geq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor - \Delta(G) = \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ teljesül minden csúcsra és minden parciális (vagy akár teljes) színezésre.

Sőt u és v körül vagy egy színezetlen él, azaz
$|S_u|, |S_v| \geq \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor + 1$.

Ha $S_u \cap S_v \neq \emptyset$, akkor a mohó színezés kiterjesztés működik.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$. Legyen vw egy α színű él.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$. Legyen vw egy α színű él.

Észrevétel

w szükségszerűen egy harmadik csúcs u és v mellett.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$. Legyen vw egy α színű él.

Észrevétel

w szükségszerűen egy harmadik csúcs u és v mellett. // Ezt fontos meggondolni hiszen lehetnek párhuzamos élek gráfunkban!

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$. Legyen vw egy α színű él.

Észrevétel

w szükségszerűen egy harmadik csúcs u és v mellett. // Ezt fontos meggondolni hiszen lehetnek párhuzamos élek gráfunkban!

Ha $P_v \cap P_w \neq \emptyset$, akkor a vw él átszínezhető P_v és P_w egy κ közös elemére.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$. Legyen vw egy α színű él.

Észrevétel

w szükségszerűen egy harmadik csúcs u és v mellett. // Ezt fontos meggondolni hiszen lehetnek párhuzamos élek gráfunkban!

Ha $P_v \cap P_w \neq \emptyset$, akkor a vw él átszínezhető P_v és P_w egy κ közös elemére.

Az átszínezés után az egyetlen változás, hogy az új P_v és P_w halmazok $P_v \Delta \{\alpha, \kappa\}$ és $P_w \Delta \{\alpha, \kappa\}$ lesznek.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ eset: javítgatás

Ekkor vegyünk egy $\alpha \in S_u$ színt. Feltevésünk miatt $\alpha \notin S_v$. Legyen vw egy α színű él.

Észrevétel

w szükségszerűen egy harmadik csúcs u és v mellett. // Ezt fontos meggondolni hiszen lehetnek párhuzamos élek gráfunkban!

Ha $P_v \cap P_w \neq \emptyset$, akkor a vw él átszínezhető P_v és P_w egy κ közös elemére.

Az átszínezés után az egyetlen változás, hogy az új P_v és P_w halmazok $P_v \Delta \{\alpha, \kappa\}$ és $P_w \Delta \{\alpha, \kappa\}$ lesznek.

Speciálisan az uv él már színezhető α színre, készen vagyunk.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset: javítgatás

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset: javítgatás

A tétel érdekes esete: $S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset: javítgatás

A tétel érdekes esete: $S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$.

Egy kis számtan után azt kapjuk, hogy $|S_u| + |S_v| + |S_w| > |P|$:

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset: javítgatás

A tétel érdekes esete: $S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$.

Egy kis számtan után azt kapjuk, hogy $|S_u| + |S_v| + |S_w| > |P|$:
Ha $\Delta(G) = 2k$ vagy $\Delta(G) = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor

$$
\begin{aligned}
|S_u| + |S_v| + |S_w| \geq & \left(\left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor \\
= & 3k + 2 > |P| = \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor \\
= & \begin{cases} 3k, & |\Delta(G)| = 2k \\ 3k + 1, & |\Delta(G)| = 2k + 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset: javítgatás

A tétel érdekes esete: $S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$.

Egy kis számtan után azt kapjuk, hogy $|S_u| + |S_v| + |S_w| > |P|$:
Ha $\Delta(G) = 2k$ vagy $\Delta(G) = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor

$$\begin{aligned}|S_u| + |S_v| + |S_w| \geq & \left(\left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 1\right) + \left(\left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor + 1\right) + \left\lfloor \frac{\Delta(G)}{2} \right\rfloor \\ =& 3k + 2 > |P| = \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor \\ =& \begin{cases} 3k, & |\Delta(G)| = 2k \\ 3k+1, & |\Delta(G)| = 2k+1. \end{cases}\end{aligned}$$

Ebből nyilvánvaló, hogy $S_u \cap S_w = \emptyset$ nem lehetséges.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Legyen $\beta \in S_u \cap S_w$. Feltevéseink szerint $\beta \notin S_v$.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Legyen $\beta \in S_u \cap S_w$. Feltevéseink szerint $\beta \notin S_v$. Speciálisan léteznie kell egy vs élnek, ami β színű.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Legyen $\beta \in S_u \cap S_w$. Feltevéseink szerint $\beta \notin S_v$. Speciálisan léteznie kell egy vs élnek, ami β színű. Könnyen látható, hogy s egy eddig nem szerepelt, negyedik csúcs.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Legyen $\beta \in S_u \cap S_w$. Feltevéseink szerint $\beta \notin S_v$. Speciálisan léteznie kell egy vs élnek, ami β színű. Könnyen látható, hogy s egy eddig nem szerepelt, negyedik csúcs.

Tudjuk, hogy $S_v \neq \emptyset$, így alkalmas $\gamma \in P$ színre $\gamma \in S_v$.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Legyen $\beta \in S_u \cap S_w$. Feltevéseink szerint $\beta \notin S_v$. Speciálisan léteznie kell egy *vs* élnek, ami β színű. Könnyen látható, hogy *s* egy eddig nem szerepelt, negyedik csúcs.

Tudjuk, hogy $S_v \neq \emptyset$, így alkalmas $\gamma \in P$ színre $\gamma \in S_v$.

Feltevéseink szerint $\gamma \notin S_u, S_w$.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Vizsgáljuk $G_{\beta,\gamma}$ w-t tartalmazó komponensét.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Vizsgáljuk $G_{\beta,\gamma}$ w-t tartalmazó komponensét.

Ez szükségszerűen út: v-nél szabad β, így nem illeszkedik rá β színű él. w-ből indulva a v-re illeszkedő γ színű éllel indul.

$S_u \cap S_v = \emptyset$ és $S_v \cap S_w = \emptyset$ eset (folytatás)

Vizsgáljuk $G_{\beta,\gamma}$ w-t tartalmazó komponensét.

Ez szükségszerűen út: v-nél szabad β, így nem illeszkedik rá β színű él. w-ből indulva a v-re illeszkedő γ színű éllel indul.

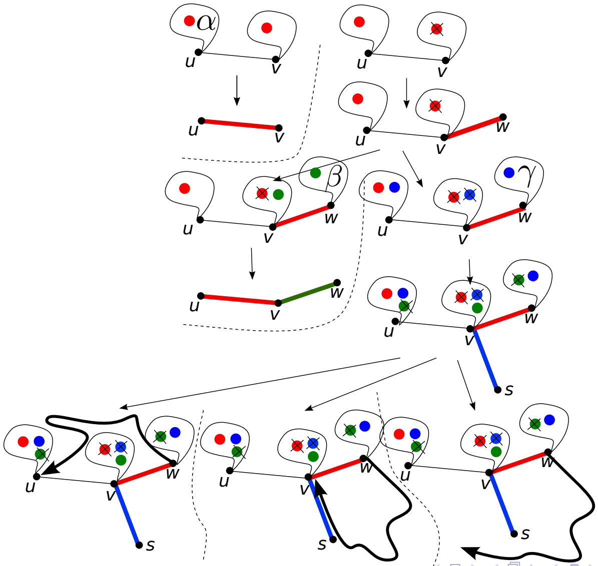
Végződésére több lehetőség van:

(1) u-ban fejeződik be γ színnel.

(2) v-ben fejeződik be az sv, β színű éllel.

(3) Egy eddig nem szereplő x csúcsban fejeződik be.

A bizonyítás képen



A bizonyítás vége

A bizonyítás vége

P mentén cseréljünk meg a β, γ színeket.

A bizonyítás vége

P mentén cseréljünk meg a β, γ színeket.

Egy módósított jó színezéshez jutunk. (1) és (3) esetén a *vw* él átszínezhető lesz γ színre, és a *v* mellett felszabadult α szín kiosztható *uv*-re.

A bizonyítás vége

P mentén cseréljünk meg a β, γ színeket.

Egy módósított jó színezéshez jutunk. (1) és (3) esetén a *vw* él átszínezhető lesz γ színre, és a *v* mellett felszabadult α szín kiosztható *uv*-re.

(2) esetén a *v*-re illeszkedő β színű (nyilván egyetlen) él veszti el színét. Így *uv* a β színt kaphatja.

Szünet

Vizing tételének bizonyítása: Előkészületek

Vizing tételének bizonyítása: Előkészületek

Színezendő G gráfunk egyszerű gráf, azaz ha két pont szomszédos, akkor egyetlen él köti őket össze.

Vizing tételének bizonyítása: Előkészületek

Színezendő G gráfunk egyszerű gráf, azaz ha két pont szomszédos, akkor egyetlen él köti őket össze.

Most a $P = \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ palettával dolgozunk.

Vizing tételének bizonyítása: Előkészületek

Színezendő G gráfunk egyszerű gráf, azaz ha két pont szomszédos, akkor egyetlen él köti őket össze.

Most a $P = \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ palettával dolgozunk.

Ismét feltesszük hogy G egyetlen $e = uv$ él kivételével színezett (c_0 a részleges színező függvény).

Vizing tételének bizonyítása: Előkészületek

Színezendő G gráfunk egyszerű gráf, azaz ha két pont szomszédos, akkor egyetlen él köti őket össze.

Most a $P = \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ palettával dolgozunk.

Ismét feltesszük hogy G egyetlen $e = uv$ él kivételével színezett (c_0 a részleges színező függvény).

Tudjuk, hogy minden x csúcs esetén S_x nem üres.

Vizing tételének bizonyítása: Előkészületek

Színezendő G gráfunk egyszerű gráf, azaz ha két pont szomszédos, akkor egyetlen él köti őket össze.

Most a $P = \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$ palettával dolgozunk.

Ismét feltesszük hogy G egyetlen $e = uv$ él kivételével színezett (c_0 a részleges színező függvény).

Tudjuk, hogy minden x csúcs esetén S_x nem üres.

Feltehetjük, hogy $S_u \cap S_v = \emptyset$.

Vizing tételének bizonyítása

Legyen $\alpha \in S_u$, így $\alpha \notin S_v$, azaz v-re illeszkedik α színű él: vu_1.

Vizing tételének bizonyítása

Legyen $\alpha \in S_u$, így $\alpha \notin S_v$, azaz v-re illeszkedik α színű él: vu_1.

$u \neq u_1$, hiszen gráfunk egyszerű (a továbbiakban $v = v_0$ jelöléssel élünk).

Vizing tételének bizonyítása

Legyen $\alpha \in S_u$, így $\alpha \notin S_v$, azaz v-re illeszkedik α színű él: vu_1.

$u \neq u_1$, hiszen gráfunk egyszerű (a továbbiakban $v = v_0$ jelöléssel élünk).

Feltehetjük, hogy $S_{u_1} \cap S_v = \emptyset$.

Vizing tételének bizonyítása

Legyen $\alpha \in S_u$, így $\alpha \notin S_v$, azaz v-re illeszkedik α színű él: vu_1.

$u \neq u_1$, hiszen gráfunk egyszerű (a továbbiakban $v = v_0$ jelöléssel élünk).

Feltehetjük, hogy $S_{u_1} \cap S_v = \emptyset$.

Valóban, ha a fenti metszet nem üres, akkor az $u_1 v$ él átszínezhető, amiáltal az α szín szabaddá válik az uv élre és készen vagyunk.

Vizing tételének bizonyítása (folytatás)

Vizing tételének bizonyítása (folytatás)

Legyen $\alpha_2 \in S_{u_1}$ (a továbbiakban α-ra mint α_1 is hivatkozunk).

Vizing tételének bizonyítása (folytatás)

Legyen $\alpha_2 \in S_{u_1}$ (a továbbiakban α-ra mint α_1 is hivatkozunk).

Tegyük fel, hogy $\alpha_2 \neq \alpha_1 = \alpha$.

Vizing tételének bizonyítása (folytatás)

Legyen $\alpha_2 \in S_{u_1}$ (a továbbiakban α-ra mint α_1 is hivatkozunk).

Tegyük fel, hogy $\alpha_2 \neq \alpha_1 = \alpha$. A fentiek során tett feltevéseink miatt $\alpha_2 \notin S_v$.

Vizing tételének bizonyítása (folytatás)

Legyen $\alpha_2 \in S_{u_1}$ (a továbbiakban α-ra mint α_1 is hivatkozunk).

Tegyük fel, hogy $\alpha_2 \neq \alpha_1 = \alpha$. A fentiek során tett feltevéseink miatt $\alpha_2 \notin S_v$. Azaz lesz egy u_2 szomszédja v-nek, amelyre a vu_2 él színe α_2.

Vizing tételének bizonyítása (folytatás)

Legyen $\alpha_2 \in S_{u_1}$ (a továbbiakban α-ra mint α_1 is hivatkozunk).

Tegyük fel, hogy $\alpha_2 \neq \alpha_1 = \alpha$. A fentiek során tett feltevéseink miatt $\alpha_2 \notin S_v$. Azaz lesz egy u_2 szomszédja v-nek, amelyre a vu_2 él színe α_2.

Folytassuk eljárásunkat, amíg tudjuk.

Vizing tételének bizonyítása (folytatás)

Legyen $\alpha_2 \in S_{u_1}$ (a továbbiakban α-ra mint α_1 is hivatkozunk).

Tegyük fel, hogy $\alpha_2 \neq \alpha_1 = \alpha$. A fentiek során tett feltevéseink miatt $\alpha_2 \notin S_v$. Azaz lesz egy u_2 szomszédja v-nek, amelyre a vu_2 él színe α_2.

Folytassuk eljárásunkat, amíg tudjuk. Így kapjuk az $u_0, u_1, \ldots, u_\ell$ különböző csúcsokat és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell$ különböző színeket.

Elakadás

Elakadás

Egy véges gráfban el kell akadnunk.

Elakadás

Egy véges gráfban el kell akadnunk. Hogy történhet ez meg?

Elakadás

Egy véges gráfban el kell akadnunk. Hogy történhet ez meg? Két lehetőség van:

Elakadás

Egy véges gráfban el kell akadnunk. Hogy történhet ez meg? Két lehetőség van:

(i) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín lehet új az eddigi α_j színekhez képest, azonban lehet, hogy v-re nem illeszkedik ilyen színű él.

Elakadás

Egy véges gráfban el kell akadnunk. Hogy történhet ez meg? Két lehetőség van:

(i) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín lehet új az eddigi α_j színekhez képest, azonban lehet, hogy v-re nem illeszkedik ilyen színű él.

(ii) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín előfordulhat az eddigi α_j színek között.

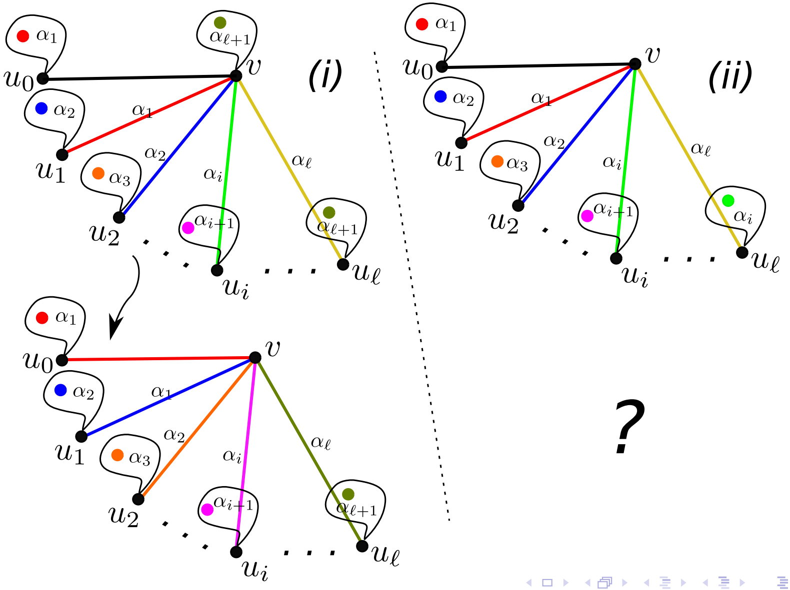
Elakadás

Egy véges gráfban el kell akadnunk. Hogy történhet ez meg? Két lehetőség van:

(i) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín lehet új az eddigi α_j színekhez képest, azonban lehet, hogy v-re nem illeszkedik ilyen színű él.

(ii) Az u_ℓ csúcsban választott $\alpha_{\ell+1}$ szabad szín előfordulhat az eddigi α_j színek között. Legyen i az az index, amelyre $\alpha_{\ell+1} = \alpha_i$.

Elakadás képen



(i)

(i)

A vu_ℓ él átszínezhető $\alpha_{\ell+1}$-re, ezzel egy időben minden vu_i kaphatja az α_{i+1} színt $(i = 0, 1, \ldots, \ell - 1)$.

(i)

A vu_ℓ él átszínezhető $\alpha_{\ell+1}$-re, ezzel egy időben minden vu_i kaphatja az α_{i+1} színt ($i = 0, 1, \ldots, \ell - 1$).

Speciálisan az uv kiszínezhető. Az (ii) eset a problémás.

(ii)

(ii)

Ekkor vegyünk egy $b \in S_v$ színt.

(ii)

Ekkor vegyünk egy $b \in S_v$ színt. Feltehető, hogy β nem szerepel egyik S_{u_j} halmazban sem (lásd (i) eset).

(ii)

Ekkor vegyünk egy $b \in S_v$ színt. Feltehető, hogy β nem szerepel egyik S_{u_j} halmazban sem (lásd (i) eset).

Vegyük a $G_{\alpha_i \beta}$ gráf u_ℓ-et tartalmazó komponensét, ami nyilván út lesz.

(ii)

Ekkor vegyünk egy $b \in S_v$ színt. Feltehető, hogy β nem szerepel egyik S_{u_j} halmazban sem (lásd (i) eset).

Vegyük a $G_{\alpha_i\beta}$ gráf u_ℓ-et tartalmazó komponensét, ami nyilván út lesz.

Három esetünk van:

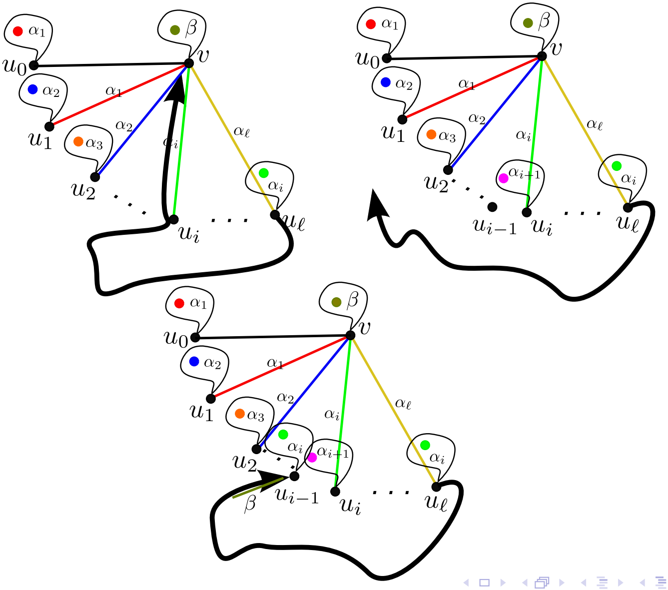
(iia) ez az út áthalad az u_i csúcson (amikor is áthalad az α_i színú $u_i v$ élen és v-ben végződik),

(iib) ez az út áthalad az u_{i-1} csúcson (amikor is ide egy β színű élen érkezett és itt végződik),

(iic) nem halad át sem az u_i, sem az u_{i-1} csúcsokon.

A bizonyítás vége esetei ábrán

A bizonyítás vége esetei ábrán



A bizonyítás vége

A bizonyítás vége

Az út mentén hajtsuk végre az α_i/β színcserét.

A bizonyítás vége

Az út mentén hajtsuk végre az α_i/β színcserét.

A (iia) esetben $u_i v$ színe β lesz. Míg $u_1 v$, $u_2 v$, ..., $u_i v$ színeit „elforgathatjuk”, amivel uv színt kap.

A bizonyítás vége

Az út mentén hajtsuk végre az α_i/β színcserét.

A (iia) esetben $u_i v$ színe β lesz. Míg $u_1 v$, $u_2 v$, $\ldots$, $u_i v$ színeit „elforgathatjuk”, amivel uv színt kap.

A (iib) esetben $u_{i-1}v$-nél felszabadul a β szín körül és az (iia) eset alapján dolgozhatunk.

A bizonyítás vége

Az út mentén hajtsuk végre az α_i/β színcserét.

A (iia) esetben $u_i v$ színe β lesz. Míg $u_1 v$, $u_2 v$, ..., $u_i v$ színeit „elforgathatjuk", amivel uv színt kap.

A (iib) esetben $u_{i-1}v$-nél felszabadul a β szín körül és az (iia) eset alapján dolgozhatunk.

A (iic) esetben az β szín szabadul fel a vu_ℓ élre.

A bizonyítás vége

Az út mentén hajtsuk végre az α_i/β színcserét.

A (iia) esetben $u_i v$ színe β lesz. Míg $u_1 v$, $u_2 v$, ..., $u_i v$ színeit „elforgathatjuk”, amivel uv színt kap.

A (iib) esetben $u_{i-1}v$-nél felszabadul a β szín körül és az (iia) eset alapján dolgozhatunk.

A (iic) esetben az β szín szabadul fel a vu_ℓ élre. Ismét jövethetjük az (i) eset átszínezésének gondolatmenetét.

Kőnig tétele

Kőnig tétele

Megemlítjük, hogy a BSc-ben tanult Kőnig-tétel egy egyszerű következménye a következő tétel.

Kőnig tétele

Megemlítjük, hogy a BSc-ben tanult Kőnig-tétel egy egyszerű következménye a következő tétel.

Tétel

Ha G egy páros gráf, akkor

$$\chi_e(G) = \Delta(G).$$

Bonyolultságelmélet

Bonyolultságelmélet

A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy egyszerű gráfok élszínezése egy egyszerűbb feladat mint a csúcsszínezési probléma.

Bonyolultságelmélet

A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy egyszerű gráfok élszínezése egy egyszerűbb feladat mint a csúcsszínezési probléma.

A látszat csal. A következő tétel erre világít rá azon hallgatók számára, akik bonyolultságelmélet alapfogalmait ismerik.

Bonyolultságelmélet

A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy egyszerű gráfok élszínezése egy egyszerűbb feladat mint a csúcsszínezési probléma.

A látszat csal. A következő tétel erre világít rá azon hallgatók számára, akik bonyolultságelmélet alapfogalmait ismerik.

Tétel

Vizsgáljuk az alábbi döntési problémát: Adott G egyszerű gráfról döntsük el, hogy $\chi_e(G)$ értéke $\Delta(G)$ vagy $\Delta(G)+1$.

Bonyolultságelmélet

A fentiek alapján úgy tűnhet, hogy egyszerű gráfok élszínezése egy egyszerűbb feladat mint a csúcsszínezési probléma.

A látszat csal. A következő tétel erre világít rá azon hallgatók számára, akik bonyolultságelmélet alapfogalmait ismerik.

Tétel

Vizsgáljuk az alábbi döntési problémát: Adott G egyszerű gráfról döntsük el, hogy $\chi_e(G)$ értéke $\Delta(G)$ vagy $\Delta(G)+1$.

Ez a probléma $\mathcal{NP}$-nehéz.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!