

# Gráfok csúcsszínezései

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

# Emlékeztető

# Emlékeztető

## Definíció

Egy  $c : V(G) \rightarrow P$  leképezést a  $G$  gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A  $c(v)$  a  $v$  csúcs színe.

# Emlékeztető

## Definíció

Egy  $c : V(G) \rightarrow P$  leképezést a  $G$  gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A  $c(v)$  a  $v$  csúcs színe.

A  $P$  halmazt palettának nevezzük, elemei színek. Gondolhatunk  $P = \{\text{piros, kék}\}$  hamazra, vagy  $P = \mathbb{N}_+$  halmazokra.

# Emlékeztető

## Definíció

Egy  $c : V(G) \rightarrow P$  leképezést a  $G$  gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A  $c(v)$  a  $v$  csúcs színe.

A  $P$  halmazt palettának nevezzük, elemei színek. Gondolhatunk  $P = \{\text{piros, kék}\}$  halmazra, vagy  $P = \mathbb{N}_+$  halmazokra.

## Definíció

A  $G$  gráf egy színezése jó színezés, ha minden  $e \in E(G)$  élre  $e = uv$  esetén  $c(u) \neq c(v)$ .

Ebben a témakörben egyszerű gráfokkal dolgozunk, tehát csúcsszínezések vizsgálatánál MINDEN GRÁFON EGYSZERŰ GRÁFOT FOGUNK ÉRTENI.

# Emlékeztető (folytatás)

# Emlékeztető (folytatás)

## Definíció

A  $G$  gráf egy színezése  $k$ -színezés, ha a paletta mérete  $k$ .

# Emlékeztető (folytatás)

## Definíció

A  $G$  gráf egy színezése  $k$ -színezés, ha a paletta mérete  $k$ .

## Definíció

Egy  $G$  gráf kromatikus száma

$$\chi(G) = \min \{k : G\text{-nek létezik jó } k\text{-színezése}\}.$$



# Színezések és független ponthalmazok

# Színezések és független ponthalmazok

## Definíció

A  $G$  gráf esetén egy  $F \subset V(G)$  csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két  $F$ -beli pont között nincs él.

# Színezések és független ponthalmazok

## Definíció

A  $G$  gráf esetén egy  $F \subset V(G)$  csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két  $F$ -beli pont között nincs él.

## Definíció

$\alpha(G) = \max \{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$

# Színezések és független ponthalmazok

## Definíció

A  $G$  gráf esetén egy  $F \subset V(G)$  csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két  $F$ -beli pont között nincs él.

## Definíció

$\alpha(G) = \max \{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$

Egy színezés jó színezés, ha minden színosztály egy független halmaz.

# Színezések és független ponthalmazok

## Definíció

A  $G$  gráf esetén egy  $F \subset V(G)$  csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két  $F$ -beli pont között nincs él.

## Definíció

$\alpha(G) = \max \{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$

Egy színezés jó színezés, ha minden színosztály egy független halmaz.

Egy jó színezés felfogható úgy is mint a csúcshalmaz egy osztályozása független ponthalmazokra.

# Színezések és klikkek

# Színezések és klikkek

## Definíció

A  $G$  gráf esetén egy  $K \subset V(G)$  csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két  $K$ -beli pont között van él.

# Színezések és klikkek

## Definíció

A  $G$  gráf esetén egy  $K \subset V(G)$  csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két  $K$ -beli pont között van él.

## Definíció

$\omega(G) = \max \{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$



# Színezések és klikkek

## Definíció

A  $G$  gráf esetén egy  $K \subset V(G)$  csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két  $K$ -beli pont között van él.

## Definíció

$\omega(G) = \max \{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$

## Észrevétel

Tetszőleges  $G$  gráfra  $\chi(G) \geq \omega(G).$

# Színezések és klikkek

## Definíció

A  $G$  gráf esetén egy  $K \subset V(G)$  csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két  $K$ -beli pont között van él.

## Definíció

$\omega(G) = \max \{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$

## Észrevétel

Tetszőleges  $G$  gráfra  $\chi(G) \geq \omega(G).$

Ez következik abból, hogy egy klikkben minden csúcsnak más-más színt kell adnunk jó színezésnél.

# Szünet



# Emlékeztető

# Emlékeztető

## Trivialitás

$G$  nem 1-színezhető  $\iff G$ -ben létezik él.

# Emlékeztető

## Trivialitás

$G$  nem 1-színezhető  $\iff G$ -ben létezik él.

## Lemma

$G$  nem 2-színezhető  $\iff G$ -ben létezik páratlan hosszú kör.

# Emlékeztető

## Trivialitás

$G$  nem 1-színezhető  $\iff G$ -ben létezik él.

## Lemma

$G$  nem 2-színezhető  $\iff G$ -ben létezik páratlan hosszú kör.

## Észrevétel

$G$  nem 3-színezhető  $\iff G$ -nek részgráfja a  $K_4$  ( $K_4 = 4$  csúcsú teljes gráf).

# Emlékeztető

## Trivialitás

$G$  nem 1-színezhető  $\iff G$ -ben létezik él.

## Lemma

$G$  nem 2-színezhető  $\iff G$ -ben létezik páratlan hosszú kör.

## Észrevétel

$G$  nem 3-színezhető  $\iff G$ -nek részgráfja a  $K_4$  ( $K_4 = 4$  csúcsú teljes gráf).

Az utolsó állításában a  $\implies$  irány nem teljesül.



# Emlékeztető

## Trivialitás

$G$  nem 1-színezhető  $\iff G$ -ben létezik él.

## Lemma

$G$  nem 2-színezhető  $\iff G$ -ben létezik páratlan hosszú kör.

## Észrevétel

$G$  nem 3-színezhető  $\iff G$ -nek részgráfja a  $K_4$  ( $K_4 = 4$  csúcsú teljes gráf).

Az utolsó állításában a  $\implies$  irány nem teljesül.

4-klikk/ $K_4$  részgráf felmutatása egy jó módszer nem-3-színezhetőség bizonyítására. (Jó és gyors, hatásos.)

# Emlékeztető

## Trivialitás

$G$  nem 1-színezhető  $\iff G$ -ben létezik él.

## Lemma

$G$  nem 2-színezhető  $\iff G$ -ben létezik páratlan hosszú kör.

## Észrevétel

$G$  nem 3-színezhető  $\iff G$ -nek részgráfja a  $K_4$  ( $K_4 = 4$  csúcsú teljes gráf).

Az utolsó állításában a  $\implies$  irány nem teljesül.

4-klikk/ $K_4$  részgráf felmutatása egy jó módszer nem-3-színezhetőség bizonyítására. (Jó és gyors, hatásos.) De a módszer NEM teljes.

# Operációk

# Operációk

## Definíció

# Operációk

## Definíció

(Op1) Bővítés: Él vagy csúcs hozzáadása a gráfhoz. Legyen  $G^+$  a  $G$ -ből kapott gráf.

# Operációk

## Definíció

(Op1) Bővítés: Él vagy csúcs hozzáadása a gráfhoz. Legyen  $G^+$  a  $G$ -ből kapott gráf.

(Op2) Csúcsösszevonás: Két nem szomszédos csúcs  $(x, x')$  azonosítása. Ha  $x$  csúcs szomszédságát  $N(x)$ -szel jelöljük, akkor az összevonással keletkezett pont szomszédsága megegyezik  $N(x) \cup N(x')$ -vel. Legyen  $\tilde{G}$  a  $G$ -ből kapott gráf.

# Operációk

## Definíció

(Op1) Bővítés: Él vagy csúcs hozzáadása a gráfhoz. Legyen  $G^+$  a  $G$ -ből kapott gráf.

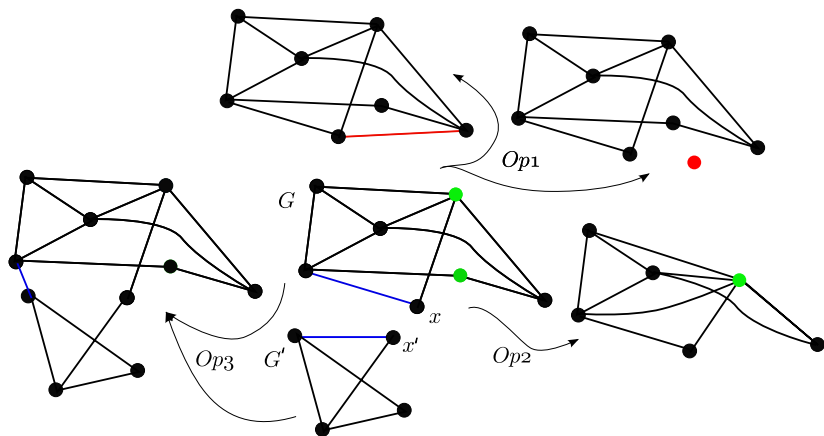
(Op2) Csúcsösszevonás: Két nem szomszédos csúcs  $(x, x')$  azonosítása. Ha  $x$  csúcs szomszédságát  $N(x)$ -szel jelöljük, akkor az összevonással keletkezett pont szomszédsága megegyezik  $N(x) \cup N(x')$ -vel. Legyen  $\tilde{G}$  a  $G$ -ből kapott gráf.

(Op3) Hajós-operáció: Legyen  $e \in E(G)$ ,  $e' \in E(G')$ ,  $\vec{e} = xy$ ,  $\vec{e}' = x'y'$ . Az operáció eredményét jelöljük  $H = \text{Hajós}_{\vec{e}, \vec{e}'}(G, G')$ -val.

$$V(H) = (V(G) - \{x\}) \dot{\cup} (V(G') - \{x'\}) \dot{\cup} \{[x]\},$$

$E(H) = (E(G) - \{e\}) \dot{\cup} (E(G') - \{e'\}) \dot{\cup} \{xx'\}$ , az illeszkedés pedig természetes.

## Példa





# Észrevétel

# Észrevétel

## Lemma

Ha  $G$  és  $G'$  nem  $k$ -színezhető, akkor  $G^+$ ,  $\tilde{G}$  és  $\text{Hajós}(G, G')$  sem  $k$ -színezhető.

# Észrevétel

## Lemma

Ha  $G$  és  $G'$  nem  $k$ -színezhető, akkor  $G^+$ ,  $\tilde{G}$  és  $\text{Hajós}(G, G')$  sem  $k$ -színezhető.

## Lemma

Ha  $G^+$  és  $\tilde{G}$   $k$ -színezhető, akkor  $G$  is az. Ha  $\text{Hajós}(G, G')$   $k$ -színezhető, akkor  $G$  vagy  $G'$  is az.

# Észrevétel

## Lemma

Ha  $G$  és  $G'$  nem  $k$ -színezhető, akkor  $G^+$ ,  $\tilde{G}$  és  $\text{Hajós}(G, G')$  sem  $k$ -színezhető.

## Lemma

Ha  $G^+$  és  $\tilde{G}$   $k$ -színezhető, akkor  $G$  is az. Ha  $\text{Hajós}(G, G')$   $k$ -színezhető, akkor  $G$  vagy  $G'$  is az.

$G^+$  a Lemma nyilvánvaló, ugyanis több objektum esetén nehezebbé válik a színezés.  $\tilde{G}$  és  $\text{Hajós}(G, G')$  esetén is egyszerű az állítás.

# Az észrevétel kihasználása

# Az észrevétel kihasználása

## Definíció

A  $G$  gráf Hajós-konstruálható  $K_{k+1}$ -ekből, ha létezik olyan  $G_1, G_2, \dots, G_l$  sorozat, hogy mindegyik  $G_i$  vagy  $K_{k+1}$ , vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

# Az észrevétel kihasználása

## Definíció

A  $G$  gráf Hajós-konstruálható  $K_{k+1}$ -ekből, ha létezik olyan  $G_1, G_2, \dots, G_l$  sorozat, hogy mindegyik  $G_i$  vagy  $K_{k+1}$ , vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

Nyilván  $G_1$  mindig csak  $K_{k+1}$  lehet,  $G_2$  pedig csak  $K_{k+1}$  vagy egy olyan gráf, ami  $K_{k+1}$ -ből (Op1) operációval kapható ((Op2) nem alkalmazható teljes gráfokra, (Op3)-hoz szükséges két korábbi gráf).

# Az észrevétel kihasználása

## Definíció

A  $G$  gráf Hajós-konstruálható  $K_{k+1}$ -ekből, ha létezik olyan  $G_1, G_2, \dots, G_l$  sorozat, hogy mindegyik  $G_i$  vagy  $K_{k+1}$ , vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

Nyilván  $G_1$  mindig csak  $K_{k+1}$  lehet,  $G_2$  pedig csak  $K_{k+1}$  vagy egy olyan gráf, ami  $K_{k+1}$ -ből (Op1) operációval kapható ((Op2) nem alkalmazható teljes gráfokra, (Op3)-hoz szükséges két korábbi gráf).

## Következmény

Ha  $G$  Hajós-konstruálható, akkor  $G$  nem  $k$ -színezhető.



# Az észrevétel kihasználása

## Definíció

A  $G$  gráf Hajós-konstruálható  $K_{k+1}$ -ekből, ha létezik olyan  $G_1, G_2, \dots, G_l$  sorozat, hogy mindegyik  $G_i$  vagy  $K_{k+1}$ , vagy a korábbi gráfokból a fent leírt három operáció valamelyikével nyerhető.

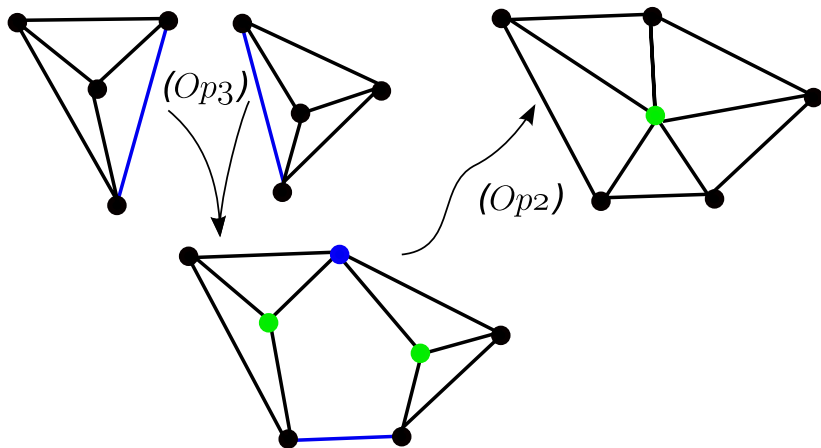
Nyilván  $G_1$  mindig csak  $K_{k+1}$  lehet,  $G_2$  pedig csak  $K_{k+1}$  vagy egy olyan gráf, ami  $K_{k+1}$ -ből (Op1) operációval kapható ((Op2) nem alkalmazható teljes gráfokra, (Op3)-hoz szükséges két korábbi gráf).

## Következmény

Ha  $G$  Hajós-konstruálható, akkor  $G$  nem  $k$ -színezhető.

A következmény bizonyítása teljes indukcióval történhet.

# Példa: Az 5-kerék nem 3-színezhető.



**Figure:** Először a  $G_1$  és  $G_2$  gráfokon (két négy pontú teljes) hajtjuk végre az  $(Op_3)$  operációt. A  $G_3$  gráfon pedig az  $(Op_2)$  operációt hajtjuk végre, és az eredmény nem 3-színezhető  $G_4$  gráf lesz, ami egy 5-kerék.

# A főtételek

## Tétel [Hajós György]

$G$  akkor és csak akkor nem  $k$ -színezhető, ha  $G$  Hajós-konstruálható  $K_{k+1}$ -ből.

# A főtételek

## Tétel [Hajós György]

$G$  akkor és csak akkor nem  $k$ -színezhető, ha  $G$  Hajós-konstruálható  $K_{k+1}$ -ből.

Az egyik irányt már láttuk.

# A főtételek

## Tétel [Hajós György]

$G$  akkor és csak akkor nem  $k$ -színezhető, ha  $G$  Hajós-konstruálható  $K_{k+1}$ -ből.

Az egyik irányt már láttuk. A tétel nehezebbik „felét” pedig indirekt módon bizonyítjuk.

# Bizonyítás: A kezdet

# Bizonyítás: A kezdet

- Tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, azaz létezik olyan  $G$  nem  $k$ -színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható.

# Bizonyítás: A kezdet

- Tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, azaz létezik olyan  $G$  nem  $k$ -színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható.
- Tegyük a  $G$  gráfot telítetté, azaz adjunk hozzá éleket mindaddig, amíg az ellenpéldára vonatkozó két tulajdonság teljesül. Így kapjuk a  $G^{tel}$  gráfot.



# Bizonyítás: A kezdet

- Tegyük fel, hogy létezik ellenpélda, azaz létezik olyan  $G$  nem  $k$ -színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható.
- Tegyük a  $G$  gráfot telítetté, azaz adjunk hozzá éleket mindaddig, amíg az ellenpéldára vonatkozó két tulajdonság teljesül. Így kapjuk a  $G^{tel}$  gráfot.
- A telítés során a nem  $k$ -színezhetőség megmarad. Így  $G^{tel}$  gráfhoz élet adva egy Hajós-konstruálható gráfot kell kapnunk.

# Többrészes gráfok

# Többrészes gráfok

## Definíció

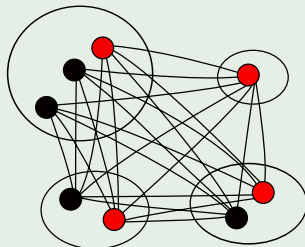
Egy  $G$  gráf teljes  $r$ -részes gráf, ha a  $V(G)$  csúcshalmaz  $r$  darab osztály uniója, és az  $E(G)$  élhalmaz pedig az összes „keresztél” az osztályok között.

# Többrészes gráfok

## Definíció

Egy  $G$  gráf teljes  $r$ -részes gráf, ha a  $V(G)$  csúcshalmaz  $r$  darab osztály uniója, és az  $E(G)$  élhalmaz pedig az összes „keresztél” az osztályok között.

## Példa



# Lemma

# Lemma

## Definíció

A teljes  $r$ -részes gráf ekvivalens definíciója a következő: az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció ekvivalenciareláció, továbbá az ekvivalenciareláció osztályainak száma  $r$ .

# Lemma

## Definíció

A teljes  $r$ -részes gráf ekvivalens definíciója a következő: az „egyenlőnek vagy nem összekötöttek lenni” reláció ekvivalenciareláció, továbbá az ekvivalenciareláció osztályainak száma  $r$ .

## Lemma

$G^{tel}$  teljes  $r$ -részes gráf.

# Lemma bizonyítás



# Lemma bizonyítás

A bizonyítás indirekt módon történik.

# Lemma bizonyítás

A bizonyítás indirekt módon történik.

Tegyük fel, hogy  $G^{tel}$  nem teljes  $r$ -részes gráf, azaz az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció nem ekvivalencia.

# Lemma bizonyítás

A bizonyítás indirekt módon történik.

Tegyük fel, hogy  $G^{tel}$  nem teljes  $r$ -részes gráf, azaz az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció nem ekvivalencia.

Ekkor nyilván csak a tranzitivitás sérülhet, azaz léteznek olyan  $x, y, z \in V(G^{tel})$  különböző pontok, hogy  $xy, xz \in E(G^{tel})$ , de  $yz \notin E(G^{tel})$ .

# Lemma bizonyítás

A bizonyítás indirekt módon történik.

Tegyük fel, hogy  $G^{tel}$  nem teljes  $r$ -részes gráf, azaz az „egyenlőnek vagy nem összekötöttnek lenni” reláció nem ekvivalencia.

Ekkor nyilván csak a tranzitivitás sérülhet, azaz léteznek olyan  $x, y, z \in V(G^{tel})$  különböző pontok, hogy  $xy, xz \notin E(G^{tel})$ , de  $yz \in E(G^{tel})$ .

Ekkor az  $xy$  és  $xz$  él hiánya kétféle módot is ad a  $G^{tel}$  telített gráf bővítésére. mindkét esetben a telítettség definíciója alapján olyan gráfot kapunk, amely Hajós-konstruálható.

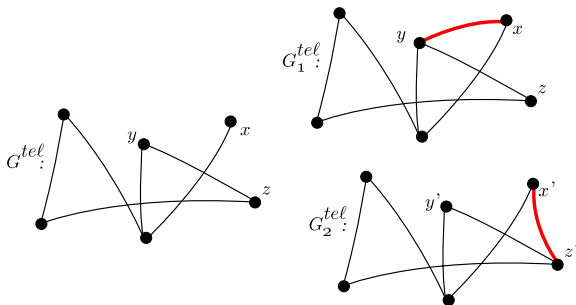
# Lemma bizonyítás (folytatás)

# Lemma bizonyítás (folytatás)

Az egyértelműség végett a második gráf (amelyet az  $xz$  él hozzáadásával kapunk  $G^{tel}$ -ből) csúcsait vesszőkkel látjuk el.

# Lemma bizonyítás (folytatás)

Az egyértelműség végett a második gráf (amelyet az  $xz$  él hozzáadásával kapunk  $G^{tel}$ -ből) csúcsait vesszőkkel látjuk el.



# Lemma bizonyítás (folytatás)

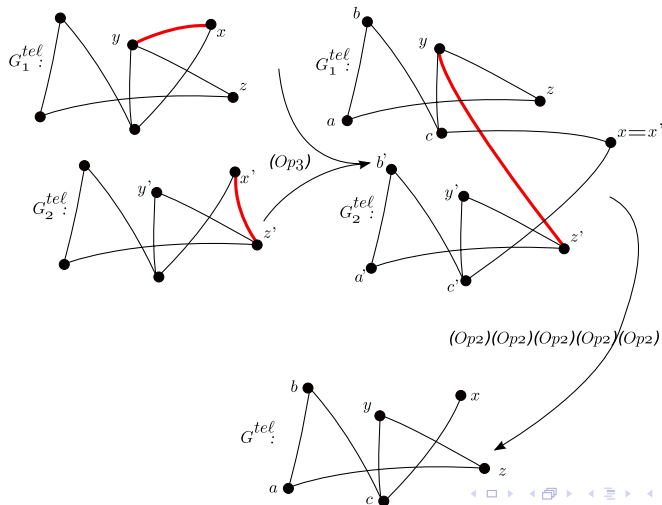


# Lemma bizonyítás (folytatás)

Ha erre két gráfra végrehajtjuk a  $\text{Hajós}_{xy,x'z'}(G_1^{tel}, G_2^{tel})$  operációt, akkor a következő gráfot kapjuk:

# Lemma bizonyítás (folytatás)

Ha erre két gráfra végrehajtjuk a  $\text{Hajós}_{xy, x'z'}(G_1^{tel}, G_2^{tel})$  operációt, akkor a következő gráfot kapjuk:



# Hajós-tétel bizonyításának folytatása

# Hajós-tétel bizonyításának folytatása

Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan  $G$  nem  $k$ -színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a  $G$  gráfot, és az így kapott  $G^{tel}$  gráfról beláttuk, hogy teljes  $r$ -részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

# Hajós-tétel bizonyításának folytatása

Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan  $G$  nem  $k$ -színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a  $G$  gráfot, és az így kapott  $G^{tel}$  gráfról beláttuk, hogy teljes  $r$ -részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

- (1) Ha  $r \geq k + 1$ , akkor  $G^{tel}$  gráfnak létezik egy  $k + 1$  pontú teljes részgráfja, ugyanis minden osztályból egy tetszőleges csúcst kiválasztva egy ilyen részgráfot kapunk. A részgráfság miatt  $G^{tel}$  megkapható  $K_{k+1}$ -ből egyszerű bővítésekkel, azaz az (Op1) operáció többszöri alkalmazásával. Ez viszont ellentmond annak, hogy  $G^{tel}$  nem Hajós-konstruálható.

# Hajós-tétel bizonyításának folytatása

Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan  $G$  nem  $k$ -színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a  $G$  gráfot, és az így kapott  $G^{tel}$  gráfról beláttuk, hogy teljes  $r$ -részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

- (1) Ha  $r \geq k + 1$ , akkor  $G^{tel}$  gráfnak létezik egy  $k + 1$  pontú teljes részgráfja, ugyanis minden osztályból egy tetszőleges csúcsot kiválasztva egy ilyen részgráfot kapunk. A részgráfság miatt  $G^{tel}$  megkapható  $K_{k+1}$ -ből egyszerű bővítésekkel, azaz az (Op1) operáció többszöri alkalmazásával. Ez viszont ellentmond annak, hogy  $G^{tel}$  nem Hajós-konstruálható.
- (2) Ha pedig  $r \leq k$ , akkor nyilvánvaló, hogy  $G^{tel}$  gráf  $k$ -színezhető, ami szintén ellentmondás.

# Hajós-tétel bizonyításának folytatása

Emlékezzünk, hogy a tételt indirekt módon kezdtük bizonyítani, azaz feltettük, hogy létezik olyan  $G$  nem  $k$ -színezhető gráf, ami nem Hajós-konstruálható. Telítettük a  $G$  gráfot, és az így kapott  $G^{tel}$  gráfról beláttuk, hogy teljes  $r$ -részes gráf. Folytatva a bizonyítást két eset lehetséges.

- (1) Ha  $r \geq k + 1$ , akkor  $G^{tel}$  gráfnak létezik egy  $k + 1$  pontú teljes részgráfja, ugyanis minden osztályból egy tetszőleges csúcsot kiválasztva egy ilyen részgráfot kapunk. A részgráfság miatt  $G^{tel}$  megkapható  $K_{k+1}$ -ből egyszerű bővítésekkel, azaz az (Op1) operáció többszöri alkalmazásával. Ez viszont ellentmond annak, hogy  $G^{tel}$  nem Hajós-konstruálható.
- (2) Ha pedig  $r \leq k$ , akkor nyilvánvaló, hogy  $G^{tel}$  gráf  $k$ -színezhető, ami szintén ellentmondás.

Mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, így ezzel a Hajós-tétel bizonyítása véget ért.

# Szünet





# Emlékeztető

# Emlékeztető

## Tétel (BSc)

Létezik olyan  $\{G_n\}$  gráfsorozat, melyre teljesül, hogy  $\omega(G_n) = 2$  (azaz  $G$  háromszögmentes), illetve  $\chi(G_n) \rightarrow \infty$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

# Emlékeztető

## Tétel (BSc)

Létezik olyan  $\{G_n\}$  gráfsorozat, melyre teljesül, hogy  $\omega(G_n) = 2$  (azaz  $G$  háromszögmentes), illetve  $\chi(G_n) \rightarrow \infty$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .

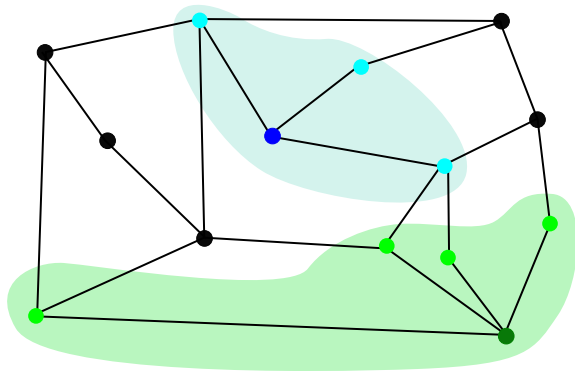


Figure: Háromszögmentes gráf

# Lokális vs globális

# Lokális vs globális

Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk.

# Lokális vs globális

Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk.

Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja.

# Lokális vs globális

Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk.

Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk a színezési problémával kapcsolatban.

# Lokális vs globális

Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk.

Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk a színezési problémával kapcsolatban.

A gráf globális színezéséhez szükséges színszám tetszőlegesen nagy lehet. Ez rávilágít a probléma nehézségére.



# Lokális vs globális

Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk.

Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk a színezési problémával kapcsolatban.

A gráf globális színezéséhez szükséges színszám tetszőlegesen nagy lehet. Ez rávilágít a probléma nehézségére. A nehézség formálisan is igazolható: ez az egyik alap  $\mathcal{NP}$ -teljes probléma (szerepel Richard Karp 1972-ben összegyűjtött 21  $\mathcal{NP}$ -teljes problémája között).

# Kiterjesztés

# Kiterjesztés

## Definíció

Tetszőleges  $G$  gráf esetén rögzítsünk egy  $o \in V(G)$  csúcsot, és tetszőleges  $r \in \mathbb{N}^+$  esetén definiáljuk a következő részgráfot:

$$B(o, r) = G \mid_{\{v \in V : d(o, v) \leq r\}},$$

ahol  $d(o, v)$  a legrövidebb  $ov$  út hosszát jelöli.

# Kiterjesztés

## Definíció

Tetszőleges  $G$  gráf esetén rögzítsünk egy  $o \in V(G)$  csúcsot, és tetszőleges  $r \in \mathbb{N}^+$  esetén definiáljuk a következő részgráfot:

$$B(o, r) = G |_{\{v \in V : d(o, v) \leq r\}},$$

ahol  $d(o, v)$  a legrövidebb  $ov$  út hosszát jelöli.

Az, hogy minden  $B(o, 1)$  csillag az azzal ekvivalens gráfunkban nincs háromszög.

# title

# title

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

# title

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan  $B(o, r)$ -re tett egyszerűségi feltételekre több lehetőség van

# title

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan  $B(o, r)$ -re tett egyszerűségi feltételekre több lehetőség van

(1) Minden  $o$  csúcsra  $B(o, r)$  páros gráf.



# title

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan  $B(o, r)$ -re tett egyszerűségi feltételekre több lehetőség van

- (1) Minden  $o$  csúcsra  $B(o, r)$  páros gráf. Ez azzal ekvivalens, hogy  $G$ -ben nem létezik  $2r + 1$  hosszú, vagy rövidebb páratlan kör.

# title

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan  $B(o, r)$ -re tett egyszerűségi feltételekre több lehetőség van

- (1) Minden  $o$  csúcsra  $B(o, r)$  páros gráf. Ez azzal ekvivalens, hogy  $G$ -ben nem létezik  $2r + 1$  hosszú, vagy rövidebb páratlan kör.
- (2) Minden  $o$  csúcsra  $B(o, r)$  fa (körmentes, hisz a gömbök összefüggősége nyilvánvaló).

# title

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan  $B(o, r)$ -re tett egyszerűségi feltételekre több lehetőség van

- (1) Minden  $o$  csúcsra  $B(o, r)$  páros gráf. Ez azzal ekvivalens, hogy  $G$ -ben nem létezik  $2r + 1$  hosszú, vagy rövidebb páratlan kör.
- (2) Minden  $o$  csúcsra  $B(o, r)$  fa (körmentes, hisz a gömbök összefüggősége nyilvánvaló). Ez azzal ekvivalens, hogy  $G$ -ben nem létezik  $2r + 1$  hosszú, vagy rövidebb kör.

# title

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan  $B(o, r)$ -re tett egyszerűségi feltételekre több lehetőség van

- (1) Minden  $o$  csúcsra  $B(o, r)$  páros gráf. Ez azzal ekvivalens, hogy  $G$ -ben nem létezik  $2r + 1$  hosszú, vagy rövidebb páratlan kör.
- (2) Minden  $o$  csúcsra  $B(o, r)$  fa (körmentes, hisz a gömbök összefüggősége nyilvánvaló). Ez azzal ekvivalens, hogy  $G$ -ben nem létezik  $2r + 1$  hosszú, vagy rövidebb kör.

## Definíció

A  $G$  gráf derékbőségének (girth) nevezzük a következő gráfparamétert

$$g(G) = \min \{ \ell : G\text{-ben létezik } \ell \text{ hosszú kör} \}.$$

# Erdős Pál tétele

# Erdős Pál tétele

Adott egy  $\gamma$  és egy  $\tau$  pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan  $G$  gráf, melyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ ?

# Erdős Pál tétele

Adott egy  $\gamma$  és egy  $\tau$  pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan  $G$  gráf, melyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ ? Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e színezésre bonyolult gráf?

# Erdős Pál tétele

Adott egy  $\gamma$  és egy  $\tau$  pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan  $G$  gráf, melyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ ? Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e színezésre bonyolult gráf? A válasz igen.



# Erdős Pál tétele

Adott egy  $\gamma$  és egy  $\tau$  pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan  $G$  gráf, melyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ ? Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e színezésre bonyolult gráf? A válasz igen.

## Tétel (Erdős Pál)

Bármely  $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$  számokhoz létezik olyan  $G$  gráf, amelyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ .

# Erdős Pál tétele

Adott egy  $\gamma$  és egy  $\tau$  pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan  $G$  gráf, melyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ ? Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e színezésre bonyolult gráf? A válasz igen.

## Tétel (Erdős Pál)

Bármely  $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$  számokhoz létezik olyan  $G$  gráf, amelyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ .

Nem konstruktív bizonyítást adunk a tételre. (Konstruktív bizonyítások is léteznek, de azok nehezebbek.)

# Erdős Pál tétele

Adott egy  $\gamma$  és egy  $\tau$  pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan  $G$  gráf, melyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ ? Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e színezésre bonyolult gráf? A válasz igen.

## Tétel (Erdős Pál)

Bármely  $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$  számokhoz létezik olyan  $G$  gráf, amelyre  $g(G) \geq \gamma$  és  $\chi(G) \geq \tau$ .

Nem konstruktív bizonyítást adunk a tételre. (Konstruktív bizonyítások is léteznek, de azok nehezebbek.)

A következőkben egy valószínűségszámítási módszeren alapuló bizonyítást mutatunk meg.

# Véletlen gráfok

# Véletlen gráfok

Legyen  $V$  egy  $n$  elemű csúcshalmaz.

# Véletlen gráfok

Legyen  $V$  egy  $n$  elemű csúcshalmaz.  $n$  értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk  $n$ -ről, hogy elég nagy.

# Véletlen gráfok

Legyen  $V$  egy  $n$  elemű csúcshalmaz.  $n$  értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk  $n$ -ről, hogy elég nagy.

Bármely  $V$ -beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt  $p$  valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége  $1 - p$ ).

# Véletlen gráfok

Legyen  $V$  egy  $n$  elemű csúcshalmaz.  $n$  értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk  $n$ -ről, hogy elég nagy.

Bármely  $V$ -beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt  $p$  valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége  $1 - p$ ).

A  $p$  ( $0 < p < 1$ ) értékét később adjuk meg  $n, \tau, \gamma$  függvényében.



# Véletlen gráfok

Legyen  $V$  egy  $n$  elemű csúcshalmaz.  $n$  értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk  $n$ -ről, hogy elég nagy.

Bármely  $V$ -beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt  $p$  valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége  $1 - p$ ).

A  $p$  ( $0 < p < 1$ ) értékét később adjuk meg  $n, \tau, \gamma$  függvényében.

Ezzel a módszerrel felépítünk egy gráf értékű valószínűségi változót. Ez az Erdős—Rényi-féle véletlengráf modell, jelölése

$\underline{G}_{n,p}$ .

# Véletlen gráfok

Legyen  $V$  egy  $n$  elemű csúcshalmaz.  $n$  értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk  $n$ -ről, hogy elég nagy.

Bármely  $V$ -beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt  $p$  valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége  $1 - p$ ).

A  $p$  ( $0 < p < 1$ ) értékét később adjuk meg  $n, \tau, \gamma$  függvényében.

Ezzel a módszerrel felépítünk egy gráf értékű valószínűségi változót. Ez az Erdős—Rényi-féle véletlengráf modell, jelölése  $\underline{G}_{n,p}$ .

Több ismeretlen paraméterünk is van. Ennek ellenére előre kijelentett „ígéreteket” teszünk, és ezeket vastag betűtípussal fogjuk jelölni.

# Véletlen gráfok

Legyen  $V$  egy  $n$  elemű csúcshalmaz.  $n$  értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk  $n$ -ről, hogy elég nagy.

Bármely  $V$ -beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt  $p$  valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége  $1 - p$ ).

A  $p$  ( $0 < p < 1$ ) értékét később adjuk meg  $n, \tau, \gamma$  függvényében.

Ezzel a módszerrel felépítünk egy gráf értékű valószínűségi változót. Ez az Erdős—Rényi-féle véletlengráf modell, jelölése  $\underline{G}_{n,p}$ .

Több ismeretlen paraméterünk is van. Ennek ellenére előre kijelentett „ígéretek” teszünk, és ezeket vastag betűtípussal fogjuk jelölni. Majd a bizonyítás végén megmutatjuk, hogy ezek az ígéretek valóban teljesülnek/kielégíthetők.

# Kromatikus szám helyett független halmazok

# Kromatikus szám helyett független halmazok

A kromatikus szám vizsgálata helyett a könnyebben kezelhető legnagyobb független halmaz méretét vizsgáljuk (szokásos jelölése  $\alpha(G)$ ).

# Kromatikus szám helyett független halmazok

A kromatikus szám vizsgálata helyett a könnyebben kezelhető legnagyobb független halmaz méretét vizsgáljuk (szokásos jelölése  $\alpha(G)$ ).

## Észrevétel

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)| = n.$$

# Kromatikus szám helyett független halmazok

A kromatikus szám vizsgálata helyett a könnyebben kezelhető legnagyobb független halmaz méretét vizsgáljuk (szokásos jelölése  $\alpha(G)$ ).

## Észrevétel

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)| = n.$$

Azaz, „ha  $\alpha(G)$  kicsi, akkor  $\chi(G)$  nagy”.

# Kromatikus szám helyett független halmazok

A kromatikus szám vizsgálata helyett a könnyebben kezelhető legnagyobb független halmaz méretét vizsgáljuk (szokásos jelölése  $\alpha(G)$ ).

## Észrevétel

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)| = n.$$

Azaz, „ha  $\alpha(G)$  kicsi, akkor  $\chi(G)$  nagy”. Egyszerűbb nyelven: „ha csak kicsik lehetnek a színosztályok, akkor sok színre lesz szükség egy jó színezéshez”.



# Az $\mathcal{A}_t$ esemény

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény

Jelölje  $\mathcal{A}_t$  azt az eseményt, hogy  $\alpha(G) < t$ .

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény

Jelölje  $\mathcal{A}_t$  azt az eseményt, hogy  $\alpha(G) < t$ . Ez ekvivalens azzal, hogy  $G$ -ben nincs  $t$  elemű független ponthalmaz.

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény

Jelölje  $\mathcal{A}_t$  azt az eseményt, hogy  $\alpha(G) < t$ . Ez ekvivalens azzal, hogy  $G$ -ben nincs  $t$  elemű független ponthalmaz.

Jelölje  $\mathcal{F}_R$  pedig azt az eseményt, hogy  $R$  független ponthalmaz  $G$ -ben.

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény

Jelölje  $\mathcal{A}_t$  azt az eseményt, hogy  $\alpha(G) < t$ . Ez ekvivalens azzal, hogy  $G$ -ben nincs  $t$  elemű független ponthalmaz.

Jelölje  $\mathcal{F}_R$  pedig azt az eseményt, hogy  $R$  független ponthalmaz  $G$ -ben. Ekkor

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1 - p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény

Jelölje  $\mathcal{A}_t$  azt az eseményt, hogy  $\alpha(G) < t$ . Ez ekvivalens azzal, hogy  $G$ -ben nincs  $t$  elemű független ponthalmaz.

Jelölje  $\mathcal{F}_R$  pedig azt az eseményt, hogy  $R$  független ponthalmaz  $G$ -ben. Ekkor

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1 - p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

Érvényes továbbá az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{R \subseteq V \\ |R|=t}} \mathcal{F}_R\right).$$

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény

Jelölje  $\mathcal{A}_t$  azt az eseményt, hogy  $\alpha(G) < t$ . Ez ekvivalens azzal, hogy  $G$ -ben nincs  $t$  elemű független ponthalmaz.

Jelölje  $\mathcal{F}_R$  pedig azt az eseményt, hogy  $R$  független ponthalmaz  $G$ -ben. Ekkor

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1 - p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

Érvényes továbbá az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{R \subseteq V \\ |R|=t}} \mathcal{F}_R\right).$$

Valóban, korábbi megjegyzéseink alapján  $\mathcal{A}_t$  az  $\bigcup_{R \subseteq V, |R|=t} \mathcal{F}_R$  esemény komplementere.

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény valószínűségének becslése



# Az $\mathcal{A}_t$ esemény valószínűségének becslése

Felhasználva azt a triviális tényt, hogy  $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$  azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \binom{n}{t} (1 - p)^{\binom{t}{2}}.$$

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény valószínűségének becslése

Felhasználva azt a triviális tényt, hogy  $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$  azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \binom{n}{t} (1 - p)^{\binom{t}{2}}.$$

Felhasználtuk azt is, hogy  $\binom{n}{t}$  tag unióját kell nézni, illetve az unió által leírt esemény valószínűségét egy olyan összeggel becsülhetjük, amelyben minden  $\mathbb{P}(\mathcal{F}_R)$  tag értéke közös:  $(1 - p)^{\binom{t}{2}}$ .

# Az $\mathcal{A}_t$ esemény valószínűségének becslése

Felhasználva azt a triviális tényt, hogy  $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$  azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}}.$$

Felhasználtuk azt is, hogy  $\binom{n}{t}$  tag unióját kell nézni, illetve az unió által leírt esemény valószínűségét egy olyan összeggel becsülhetjük, amelyben minden  $\mathbb{P}(\mathcal{F}_R)$  tag értéke közös:  $(1-p)^{\binom{t}{2}}$ .

A becslést egyszerűsíthetjük a  $\binom{n}{t} < n^t$  durva és az  $1-p < e^{-p}$  nem annyira durva becslésekkel ( $p$  pozitív és közel lesz 0-hoz)

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - n^t e^{-p \binom{t}{2}} = 1 - e^{t \log n} e^{-p \frac{t(t-1)}{2}} = 1 - e^{t \log n - p \frac{t(t-1)}{2}}.$$

# $t$ választása

**Feltesszük, hogy  $n/2t \geq \tau$  és  $\mathcal{A}_t$  valószínűségére adott alsó becslés legalább  $2/3$ ,**

# Derékbőség helyett rövid körök száma

# Derékbőség helyett rövid körök száma

Jelöljük  $\xi_{\leq \gamma}$ -val azt a valószínűségi változót, amely megadja a  $\gamma$ -nál nemhosszabb körök számát  $G$ -ben.

# Derékbőség helyett rövid körök száma

Jelöljük  $\xi_{\leq \gamma}$ -val azt a valószínűségi változót, amely megadja a  $\gamma$ -nál nemhosszabb körök számát  $G$ -ben. Keressük ennek a várható értékét.

# Derékbőség helyett rövid körök száma

Jelöljük  $\xi_{\leq \gamma}$ -val azt a valószínűségi változót, amely megadja a  $\gamma$ -nál nemhosszabb körök számát  $G$ -ben. Keressük ennek a várható értékét.

Ehhez vezessük be a

$$\xi_C = \begin{cases} 1, & \text{ha } C \subseteq G_{n,p} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

valószínűségi változót, ahol  $C$  egy lehetséges kör.



# Derékbőség helyett rövid körök száma

Jelöljük  $\xi_{\leq \gamma}$ -val azt a valószínűségi változót, amely megadja a  $\gamma$ -nál nemhosszabb körök számát  $G$ -ben. Keressük ennek a várható értékét.

Ehhez vezessük be a

$$\xi_C = \begin{cases} 1, & \text{ha } C \subseteq G_{n,p} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

valószínűségi változót, ahol  $C$  egy lehetséges kör.

Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi_{\leq \gamma}) = \mathbb{E}\left(\sum_{\text{Chossza} \leq \gamma} \xi_C\right) = \sum_{l=3}^{\gamma} \left(\sum_{\text{Chossza}=l} \mathbb{E}(\xi_C)\right).$$

# Rövid körök számnak várható értékének becslése

# Rövid körök számnak várható értékének becslése

Ha a  $C$  hossza  $\ell$ , akkor  $\mathbb{E}(\xi_C) = p^\ell$ . Hány darab lehetséges  $\ell$  hosszú kör van?

# Rövid körök számnak várható értékének becslése

Ha a  $C$  hossza  $\ell$ , akkor  $\mathbb{E}(\xi_C) = p^\ell$ . Hány darab lehetséges  $\ell$  hosszú kör van? A válasz  $\binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2}$ , ugyanis a csúcsokat  $\binom{n}{\ell}$ -féleképpen választhatjuk ki,

# Rövid körök számnak várható értékének becslése

Ha a  $C$  hossza  $\ell$ , akkor  $\mathbb{E}(\xi_C) = p^\ell$ . Hány darab lehetséges  $\ell$  hosszú kör van? A válasz  $\binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2}$ , ugyanis a csúcsokat  $\binom{n}{\ell}$ -féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott  $\ell$  pontokat  $\frac{(\ell-1)!}{2}$ -féleképpen rendezhetjük körbe.

# Rövid körök számnak várható értékének becslése

Ha a  $C$  hossza  $\ell$ , akkor  $\mathbb{E}(\xi_C) = p^\ell$ . Hány darab lehetséges  $\ell$  hosszú kör van? A válasz  $\binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2}$ , ugyanis a csúcsokat  $\binom{n}{\ell}$ -féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott  $\ell$  pontokat  $\frac{(\ell-1)!}{2}$ -féleképpen rendezhetjük körbe.

Felhasználva az

$$\binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2} = \frac{n(n-1)\dots(n-\ell+1)}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{6}$$

egyenlőtlenséget,

# Rövid körök számnak várható értékének becslése

Ha a  $C$  hossza  $\ell$ , akkor  $\mathbb{E}(\xi_C) = p^\ell$ . Hány darab lehetséges  $\ell$  hosszú kör van? A válasz  $\binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2}$ , ugyanis a csúcsokat  $\binom{n}{\ell}$ -féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott  $\ell$  pontokat  $\frac{(\ell-1)!}{2}$ -féleképpen rendezhetjük körbe.

Felhasználva az

$$\binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2} = \frac{n(n-1)\dots(n-\ell+1)}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{6}$$

egyenlőtlenséget, felírhatunk  $\mathbb{E}(\xi_{\leq \gamma})$ -ra egy felső becslést:

$$\mathbb{E}(\xi_{\leq \gamma}) \leq \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{n^\ell}{6} p^\ell = \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{n^\ell p^\ell}{6} \stackrel{(!)}{\leq} \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{(np)^\ell}{6} \leq \gamma \frac{(np)^\gamma}{6}.$$

# További feltevések



# További feltevések

**A becslésnél feltettük, hogy  $np \geq 1$ ,**

## További feltevések

**A becslésnél feltettük, hogy  $np \geq 1$ , így használhattuk, hogy az 1-nél nagyobb kvóciensű geometriai sorozat monoton nő, minden eleme az utolsóval felülről becsülhető.**

## További feltevések

**A becslésnél feltettük, hogy  $np \geq 1$ , így használhattuk, hogy az 1-nél nagyobb kvóciensű geometriai sorozat monoton nő, minden eleme az utolsóval felülről becsülhető.**

A paramétereinket úgy fogjuk megválasztani, **hogy**  
 $\gamma(np)^\gamma/6 \leq n/6$  **teljesüljön.**

# A végső következtetés

# A végső következtetés

A fenti választások után a Markov-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} > \frac{n}{2}\right) < \mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} > 3\mathbb{E}\xi_{\leq \gamma}\right) < \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} \leq \frac{n}{2}\right) > \frac{2}{3}.$$

# A végső következtetés

A fenti választások után a Markov-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} > \frac{n}{2}\right) < \mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} > 3\mathbb{E}\xi_{\leq \gamma}\right) < \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} \leq \frac{n}{2}\right) > \frac{2}{3}.$$

Ezek után felírhatjuk a

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_t \wedge \left(\xi_{\leq \gamma} \leq \frac{n}{2}\right)\right) > 0$$

megállapítást, mivel a  $\wedge$  két oldalán álló események valószínűsége külön-külön legalább  $\frac{2}{3}$ .

# A keresett gráf létezik!

# A keresett gráf létezik!

Ebből következik, hogy létezik olyan  $G$  gráf, amelynek  $n$  csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:



# A keresett gráf létezik!

Ebből következik, hogy létezik olyan  $G$  gráf, amelynek  $n$  csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A  $G$ -ben lévő  $\gamma$ -nál nem hosszabb körök száma  $\frac{n}{2}$ -nél kevesebb,

# A keresett gráf létezik!

Ebből következik, hogy létezik olyan  $G$  gráf, amelynek  $n$  csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A  $G$ -ben lévő  $\gamma$ -nál nem hosszabb körök száma  $\frac{n}{2}$ -nél kevesebb, azaz alkalmas  $n/2$  csúcs elhagyásával egy olyan  $G_0$  gráfot kapunk, amely derékbősége legalább  $\gamma$ .

# A keresett gráf létezik!

Ebből következik, hogy létezik olyan  $G$  gráf, amelynek  $n$  csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A  $G$ -ben lévő  $\gamma$ -nál nem hosszabb körök száma  $\frac{n}{2}$ -nél kevesebb, azaz alkalmas  $n/2$  csúcs elhagyásával egy olyan  $G_0$  gráfot kapunk, amely derékbősége legalább  $\gamma$ .
- $G_0$  minden színosztálya legfeljebb  $t$  méretű.

# A keresett gráf létezik!

Ebből következik, hogy létezik olyan  $G$  gráf, amelynek  $n$  csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A  $G$ -ben lévő  $\gamma$ -nál nem hosszabb körök száma  $\frac{n}{2}$ -nél kevesebb, azaz alkalmas  $n/2$  csúcs elhagyásával egy olyan  $G_0$  gráfot kapunk, amely derékbősége legalább  $\gamma$ .
- $G_0$  minden színosztálya legfeljebb  $t$  méretű. Így  $\chi(G_0) \geq |V(G_0)|/t \geq \tau$ .

# A keresett gráf létezik!

Ebből következik, hogy létezik olyan  $G$  gráf, amelynek  $n$  csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A  $G$ -ben lévő  $\gamma$ -nál nem hosszabb körök száma  $\frac{n}{2}$ -nél kevesebb, azaz alkalmas  $n/2$  csúcs elhagyásával egy olyan  $G_0$  gráfot kapunk, amely derékbősége legalább  $\gamma$ .
- $G_0$  minden színosztálya legfeljebb  $t$  méretű. Így  $\chi(G_0) \geq |V(G_0)|/t \geq \tau$ .

Azaz  $G_0$  a tételt igazolja.

# A paraméter választások konzisztenciája

# A paraméter választások konzisztenciája

Csak az van hátra, hogy a  $p$ ,  $t$  paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy az ezekre tett ígéreteink igazak legyenek:

$$0 < 1 - e^{t \log n - p \frac{t(t-1)}{2}} < \frac{1}{3}, \quad np > 1, \quad \gamma(np)^\gamma \leq n,$$

és emellett  $n \geq 2t\tau$ .

# A paraméter választások konzisztenciája

Csak az van hátra, hogy a  $p$ ,  $t$  paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy az ezekre tett ígéreteink igazak legyenek:

$$0 < 1 - e^{t \log n - p \frac{t(t-1)}{2}} < \frac{1}{3}, \quad np > 1, \quad \gamma(np)^\gamma \leq n,$$

és emellett  $n \geq 2t\tau$ .

Egy lehetséges választás:  $p$  legyen olyan, hogy  $\gamma(np)^\gamma = n$ .



# A paraméter választások konzisztenciája

Csak az van hátra, hogy a  $p$ ,  $t$  paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy az ezekre tett ígéreteink igazak legyenek:

$$0 < 1 - e^{t \log n - p \frac{t(t-1)}{2}} < \frac{1}{3}, \quad np > 1, \quad \gamma(np)^\gamma \leq n,$$

és emellett  $n \geq 2t\tau$ .

Egy lehetséges választás:  $p$  legyen olyan, hogy  $\gamma(np)^\gamma = n$ . Azaz a harmadik feltétel igazsága „definiálja”  $p$ -t.

# A paraméter választások konzisztenciája

Csak az van hátra, hogy a  $p$ ,  $t$  paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy az ezekre tett ígéreteink igazak legyenek:

$$0 < 1 - e^{t \log n - p \frac{t(t-1)}{2}} < \frac{1}{3}, \quad np > 1, \quad \gamma(np)^\gamma \leq n,$$

és emellett  $n \geq 2t\tau$ .

Egy lehetséges választás:  $p$  legyen olyan, hogy  $\gamma(np)^\gamma = n$ . Azaz a harmadik feltétel igazsága „definiálja”  $p$ -t.

Ekkor  $np = (n/\gamma)^{1/\gamma}$ , azaz a második feltétel automatikusan igaz ( $n$ -et nagyon nagyoknak választjuk).

$$p = \frac{1}{n} \cdot (n/\gamma)^{1/\gamma} = c(\gamma)n^{-(1-1/\gamma)},$$

ahol  $c(\gamma)$  csak a  $\gamma$ -tól függő konstans.

# Paraméterek választása (folytatás)

# Paraméterek választása (folytatás)

Az első feltételben szereplő kitevő

$$t \log n - c(\gamma) n^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} t(t-1)/2.$$

Ennek negatív, kis abszolút értékű számnak kell lenni.

# Paraméterek választása (folytatás)

Az első feltételben szereplő kitevő

$$t \log n - c(\gamma)n^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} t(t-1)/2.$$

Ennek negatív, kis abszolút értékű számnak kell lenni.

Ezt a

$$t = 3(\log n)n^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

választás (nagy  $n$  mellett) teljesíti.

# Paraméterek választása (folytatás)

Az első feltételben szereplő kitevő

$$t \log n - c(\gamma)n^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} t(t-1)/2.$$

Ennek negatív, kis abszolút értékű számnak kell lenni.

Ezt a

$$t = 3(\log n)n^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

választás (nagy  $n$  mellett) teljesíti.

$n \geq 2t\tau$  nyilván teljesül.

# Vége van!

Köszönöm a figyelmet!