Algebrai párosítási algoritmusok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2021. ősz

Az alapkérdés

Alapkérdés

Adott G egyszerű, páros gráf, $|A| = |F| = n$.

Az alapkérdés

Alapkérdés

Adott G egyszerű, páros gráf, $|A| = |F| = n$.

Van-e G-ben teljes párosítás?

Az alapkérdés

Alapkérdés

Adott G egyszerű, páros gráf, $|A| = |F| = n$.

Van-e G-ben teljes párosítás?

Az egyszerűség és a két színosztály azonos mérete természetes módon, az általánosság megszorítása nélkül feltehető.

Az alapkérdés

Alapkérdés

Adott G egyszerű, páros gráf, $|A| = |F| = n$.

Van-e G-ben teljes párosítás?

Az egyszerűség és a két színosztály azonos mérete természetes módon, az általánosság megszorítása nélkül feltehető.

Módszerünk általános gráfok vizsgálatát is megengedi, de a technikai nehézségekbe nem mélyedünk el.

Kódolás mátrixokkal

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf.

Kódolás mátrixokkal

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf.

G szomszédsági mátrixa A_G, az a mátrix, amely sorai és oszlopai V-vel vannak azonosítva, továbbá egy $u \in V$-nak megfelelő sor és egy $v \in V$-nek megfelelő oszlop találkozásában 1 szerepl, ha szomszédosak, 0 különben.

Kódolás mátrixokkal

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf.

G szomszédsági mátrixa A_G, az a mátrix, amely sorai és oszlopai V-vel vannak azonosítva, továbbá egy $u \in V$-nak megfelelő sor és egy $v \in V$-nek megfelelő oszlop találkozásában 1 szerepl, ha szomszédosak, 0 különben.

Definíció

Legyen G egy $A \dot{\cup} F$ színosztályokkal rendelkező egyszerű páros gráf.

Kódolás mátrixokkal

Definíció

Legyen G egy egyszerű gráf.

G szomszédsági mátrixa A_G, az a mátrix, amely sorai és oszlopai V-vel vannak azonosítva, továbbá egy $u \in V$-nak megfelelő sor és egy $v \in V$-nek megfelelő oszlop találkozásában 1 szerepl, ha szomszédosak, 0 különben.

Definíció

Legyen G egy $A\dot{\cup}F$ színosztályokkal rendelkező egyszerű páros gráf.

G páros szomszédsági mátrixa B_G, az a mátrix, amely sorai A-val, oszlopai F-fel vannak azonosítva, továbbá egy $a \in A$-nak megfelelő sor és egy $f \in F$-nek megfelelő oszlop találkozásában 1 szerepl, ha szomszédosak, 0 különben.

A különböző mátrixok kapcsolatai

A különböző mátrixok kapcsolatai

Ha A_G szomszédsági mátrixban a sorok/oszlopok felsorolásában A elemei megelőzik F elemeit, akkor az A-A, illetve F-F élek hiánya miatt a mátrix bal felső és jobb alsó sarkában 0-k egy nagy blokkja található.

A különböző mátrixok kapcsolatai

Ha A_G szomszédsági mátrixban a sorok/oszlopok felsorolásában A elemei megelőzik F elemeit, akkor az A-A, illetve F-F élek hiánya miatt a mátrix bal felső és jobb alsó sarkában 0-k egy nagy blokkja található.

Míg a jobb felső sarokban B_G szerepel, a bal alsó sarokban pedig B_G^T, a páros szomszédsági mátrix transzponáltja

A különböző mátrixok kapcsolatai

Ha A_G szomszédsági mátrixban a sorok/oszlopok felsorolásában A elemei megelőzik F elemeit, akkor az A-A, illetve F-F élek hiánya miatt a mátrix bal felső és jobb alsó sarkában 0-k egy nagy blokkja található.

Míg a jobb felső sarokban B_G szerepel, a bal alsó sarokban pedig B_G^T, a páros szomszédsági mátrix transzponáltja

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & B_G \\ B_G^T & 0 \end{pmatrix}$$

A különböző mátrixok kapcsolatai

Ha A_G szomszédsági mátrixban a sorok/oszlopok felsorolásában A elemei megelőzik F elemeit, akkor az A-A, illetve F-F élek hiánya miatt a mátrix bal felső és jobb alsó sarkában 0-k egy nagy blokkja található.

Míg a jobb felső sarokban B_G szerepel, a bal alsó sarokban pedig B_G^T, a páros szomszédsági mátrix transzponáltja

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & B_G \\ B_G^T & 0 \end{pmatrix}$$

Azaz a páros szomszédsági mátrix csak a szokásos szomszédsági mátrix tömörítése.

A gráf és mátrixa

A gráf és mátrixa

A B_G mátrix leírja a G egyszerű páros gráfot.

A gráf és mátrixa

A B_G mátrix leírja a G egyszerű páros gráfot. A G páros gráfra vonatkozó fogalmak átfogalmazhatóak a mátrixok nyelvére. Az alábbiakban egy „szótárat” ismertetünk.

A gráf és mátrixa

A B_G mátrix leírja a G egyszerű páros gráfot. A G páros gráfra vonatkozó fogalmak átfogalmazhatóak a mátrixok nyelvére. Az alábbiakban egy „szótárat" ismertetünk.

$$
\begin{aligned}
B_G \text{ pozíciói} &\equiv \ A \times F \\
B_G \text{ 1-esei} &\equiv \ E(G) \\
|A| = |F| &\equiv B_G \textit{ négyzetes mátrix} \\
\text{M párosítás} &\equiv \textit{minden sorban és oszlopban max egy 1-es van} \\
\text{M teljes párosítás} &\equiv \textit{minden sorban és oszlopban pontosan egy 1-es van} \\
&\equiv \textit{a megfelelő 1-esek egy kifejtési tag tényezői}
\end{aligned}
$$

A determináns

A determináns

Következmény

$\det B_G \neq 0$ esetén $\det B_G$ kifejtésében létezik nem 0 tag.

A determináns

Következmény

$\det B_G \neq 0$ esetén $\det B_G$ kifejtésében létezik nem 0 tag.

Ez ekvivalens azzal, hogy létezik teljes párosítás G-ben.

A determináns

Következmény

$\det B_G \neq 0$ esetén $\det B_G$ kifejtésében létezik nem 0 tag.

Ez ekvivalens azzal, hogy létezik teljes párosítás G-ben.

A fordított irány nem igaz.

A permanens

A permanens

Definíció

Az M *permanense*

$$\operatorname{per} M_{n\times n} = \sum_{\pi\in S_n} \prod_{i=1}^{n} M_{i\pi(i)}$$

A permanens

Definíció

Az M permanense

$$\text{per } M_{n\times n} = \sum_{\pi\in S_n} \prod_{i=1}^{n} M_{i\pi(i)}$$

Észrevétel

(i) per $B_G \neq 0$ esetén G-ben létezik teljes párosítás.

(ii) per B_G a teljes párosítások száma G-ben.

A permanens

Definíció

Az M *permanense*

$$\text{per } M_{n\times n} = \sum_{\pi\in S_n} \prod_{i=1}^{n} M_{i\pi(i)}$$

Észrevétel

(i) per $B_G \neq 0$ esetén G-ben létezik teljes párosítás.

(ii) per B_G a teljes párosítások száma G-ben.

Sajnos ez az észrevétel nem segít algoritmikus problémánk megoldásában: per B_G kiszámítása $\#P$-nehéz.

Polinomok

Polinomok

Definíció

$X_G \in \mathbb{R}[x_e : e \in E(G)]^{n \times n}$: $\forall e \in E(G)$ esetén B_G e-nek megfelelő 1-esét x_e-vel helyettesítjük.

Polinomok

Definíció

$X_G \in \mathbb{R}[x_e : e \in E(G)]^{n\times n}$: $\forall e \in E(G)$ esetén B_G e-nek megfelelő 1-esét x_e-vel helyettesítjük.

Tétel

$det(X_G)$ nem az azonosan 0 polinom akkor és csak akkor, ha létezik G-ben teljes párosítás.

Polinomok

Definíció

$X_G \in \mathbb{R}[x_e : e \in E(G)]^{n\times n}$: $\forall e \in E(G)$ esetén B_G e-nek megfelelő 1-esét x_e-vel helyettesítjük.

Tétel

$det(X_G)$ nem az azonosan 0 polinom akkor és csak akkor, ha létezik G-ben teljes párosítás.

Észrevétel

(i) G-beli teljes párosítások száma megegyezik a $det(X_G)$-ben szereplő különböző monomok számával.

(ii) $det(X_G)$-nek túl hosszú lehet a standard leírása, de hatékonyan kiértékelhető, ha $x_e = \alpha_e$, ahol $\alpha_e \in \mathbb{R}$, (lásd numerikus analízis vagy algebra előadás).

Egy véletlen algoritmus

Egy véletlen algoritmus

Véletlen algoritmus

Egy véletlen algoritmus

Véletlen algoritmus

Véletlen helyettesítés: Minden e élre vegyünk egy $r_e \in \{1, \ldots, N\}$-t, ahol r_e uniform eloszlású valószínűségi változó.

Egy véletlen algoritmus

Véletlen algoritmus

Véletlen helyettesítés: Minden e élre vegyünk egy $r_e \in \{1, \ldots, N\}$-t, ahol r_e uniform eloszlású valószínűségi változó.

DET számolás: Számítsuk ki $det(X_G)|_{x_e=r_e}$-t.

Egy véletlen algoritmus

Véletlen algoritmus

Véletlen helyettesítés: Minden e élre vegyünk egy $r_e \in \{1, \dots, N\}$-t, ahol r_e uniform eloszlású valószínűségi változó.

DET számolás: Számítsuk ki $det(X_G)|_{x_e=r_e}$-t.

Kiértékelés:
Ha ez nem 0, akkor az output legyen „Létezik teljes párosítás”.

Egy véletlen algoritmus

Véletlen algoritmus

Véletlen helyettesítés: Minden e élre vegyünk egy $r_e \in \{1, \ldots, N\}$-t, ahol r_e uniform eloszlású valószínűségi változó.

DET számolás: Számítsuk ki $det(X_G)|_{x_e=r_e}$-t.

Kiértékelés:
Ha ez nem 0, akkor az output legyen „Létezik teljes párosítás”.
Ha ez 0, akkor az output legyen „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”.

Tévedés

Tévedés

Az algoritmusunk tévedhet. De hogyan?

Tévedés

Az algoritmusunk tévedhet. De hogyan?

- „Létezik teljes párosítás": biztosan jó a válasz.

Tévedés

Az algoritmusunk tévedhet. De hogyan?

- „Létezik teljes párosítás”: biztosan jó a válasz.
- „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”:

Tévedés

Az algoritmusunk tévedhet. De hogyan?

- „Létezik teljes párosítás”: biztosan jó a válasz.
- „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás”:
    - ha $det(X_G)$ az azonosan 0 polinom, akkor jó a válasz;

Tévedés

Az algoritmusunk tévedhet. De hogyan?

- „Létezik teljes párosítás": biztosan jó a válasz.
- „Valószínűleg nem létezik teljes párosítás":
  - ha $det(X_G)$ az azonosan 0 polinom, akkor jó a válasz;
  - ha $det(X_G)$ nem az azonosan 0 polinom, akkor szerencsétlen r_e-ket választottunk, épp $det(X_G)$ gyökeit: az algoritmus téved.

Célunk, hogy a hibázás lehetőségét minél kisebbé tegyük. Érezhető, hogy minél nagyobb az N, annál kisebb a hibázás valószínűsége.

Schwartz-lemma

Schwartz-lemma

Tétel (Schwartz-lemma)

Legyen $p(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_k]$ egy nem azonos 0 polinom, és legyenek $r_i \in \{1, \ldots, N\}$-k uniform eloszlású független valószínűségi változók, $(1 \leq i \leq k)$. Ekkor

$$\mathbb{P}(p(r_1, \ldots, r_k) = 0) \leq \frac{\deg\, p}{N}$$

Bizonyítás

Bizonyítás

k-ra vonatkozó teljes inducióval bizonyítunk.

Bizonyítás

k-ra vonatkozó teljes induciόval bizonyítunk.

$k = 1$ esetén $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $|\{r \in \mathbb{R} : p(r) = 0\}| \leq \deg p$, így annak a valószínűsége, hogy egy adott $r \in \{1, \ldots, N\}$ épp gyöke a p-nek felülről becsülhető $\frac{\deg p}{N}$-nel (r uniform eloszlású).

Bizonyítás

k-ra vonatkozó teljes inducióval bizonyítunk.

$k = 1$ esetén $p \in \mathbb{R}[x]$. Ekkor $|\{r \in \mathbb{R} : p(r) = 0\}| \leq \deg p$, így annak a valószínűsége, hogy egy adott $r \in \{1, \ldots, N\}$ épp gyöke a p-nek felülről becsülhető $\frac{\deg p}{N}$-nel (r uniform eloszlású).

Tegyük fel, hogy $k-1$ határozatlan esetén teljesül az állítás. Írjuk fel a k-változós p polinomot a következő alakban:

$$p(x_1, \ldots, x_k) = p_\alpha(x_1, \ldots, x_{k-1}) \cdot x_k^\alpha + p_{\alpha-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) \cdot x_k^{\alpha-1} + \cdots + p_0(x$$

ahol $p_\alpha(x_1, \ldots, x_{k-1})$ egy nem azonosan 0 polinom. A felírásból következik, hogy $\deg p \geq \deg p_\alpha + \alpha$.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $R_k = \{(r_1, \ldots, r_k) : p(r_1, \ldots, r_k) = 0\}$.

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $R_k = \{(r_1, \dots, r_k) : p(r_1, \dots, r_k) = 0\}$.

Legyen $R_{k-1} = \{(r_1, \dots, r_k) : p_\alpha(r_1, \dots, r_{k-1}) = 0\}$.

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $R_k = \{(r_1, \ldots, r_k) : p(r_1, \ldots, r_k) = 0\}$.

Legyen $R_{k-1} = \{(r_1, \ldots, r_k) : p_\alpha(r_1, \ldots, r_{k-1}) = 0\}$.

Legyen
$Q = \{(r_1, \ldots, r_k) : (r_1, \ldots, r_{k-1}) \notin R_{k-1}, de\ (r_1, \ldots, r_k) \in R_k\}$.

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $R_k = \{(r_1, \ldots, r_k) : p(r_1, \ldots, r_k) = 0\}$.

Legyen $R_{k-1} = \{(r_1, \ldots, r_k) : p_\alpha(r_1, \ldots, r_{k-1}) = 0\}$.

Legyen
$Q = \{(r_1, \ldots, r_k) : (r_1, \ldots, r_{k-1}) \notin R_{k-1}, de\ (r_1, \ldots, r_k) \in R_k\}$.

Könnyen látható, hogy $R_k \subseteq R_{k-1} \cup Q$.

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $R_k = \{(r_1, \dots, r_k) : p(r_1, \dots, r_k) = 0\}$.

Legyen $R_{k-1} = \{(r_1, \dots, r_k) : p_\alpha(r_1, \dots, r_{k-1}) = 0\}$.

Legyen
$Q = \{(r_1, \dots, r_k) : (r_1, \dots, r_{k-1}) \notin R_{k-1}, de\ (r_1, \dots, r_k) \in R_k\}$.

Könnyen látható, hogy $R_k \subseteq R_{k-1} \cup Q$.

Az indukciós feltevésből R_{k-1} valószínűsége becsülhető.

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $R_k = \{(r_1, \ldots, r_k) : p(r_1, \ldots, r_k) = 0\}$.

Legyen $R_{k-1} = \{(r_1, \ldots, r_k) : p_\alpha(r_1, \ldots, r_{k-1}) = 0\}$.

Legyen
$Q = \{(r_1, \ldots, r_k) : (r_1, \ldots, r_{k-1}) \notin R_{k-1}, de\ (r_1, \ldots, r_k) \in R_k\}$.

Könnyen látható, hogy $R_k \subseteq R_{k-1} \cup Q$.

Az indukciós feltevésből R_{k-1} valószínűsége becsülhető.

Az egy határozatlanú polinomok esete alapján Q valószínűsége becsülhető.

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $R_k = \{(r_1, \ldots, r_k) : p(r_1, \ldots, r_k) = 0\}$.

Legyen $R_{k-1} = \{(r_1, \ldots, r_k) : p_\alpha(r_1, \ldots, r_{k-1}) = 0\}$.

Legyen
$Q = \{(r_1, \ldots, r_k) : (r_1, \ldots, r_{k-1}) \notin R_{k-1}, de\ (r_1, \ldots, r_k) \in R_k\}$.

Könnyen látható, hogy $R_k \subseteq R_{k-1} \cup Q$.

Az indukciós feltevésből R_{k-1} valószínűsége becsülhető.

Az egy határozatlanú polinomok esete alapján Q valószínűsége becsülhető.

Összegezve kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(R_k) \leq \mathbb{P}(R_{k-1}) + \mathbb{P}(Q) \leq \frac{\deg\ p_\alpha}{N} + \frac{\alpha}{N} \leq \frac{\deg\ p}{N}.$$

Ezzel beláttuk a tétel állítását.

A hibázás valószínűségének csökkentése

A hibázás valószínűségének csökkentése

A lemmát alkalmazva a véletlen algoritmusra ($p = det(X_G)$, $\deg p = n (= |A| = |F|)$) kapjuk, hogy az $N = 2n$ választással élve a hibázás valószínűsége legfeljebb $\frac{1}{2}$.

A hibázás valószínűségének csökkentése

A lemmát alkalmazva a véletlen algoritmusra ($p = det(X_G)$, deg $p = n(= |A| = |F|)$) kapjuk, hogy az $N = 2n$ választással élve a hibázás valószínűsége legfeljebb $\frac{1}{2}$.

A hibázás valószínűsége tovább csökkenthető:

A hibázás valószínűségének csökkentése

A lemmát alkalmazva a véletlen algoritmusra ($p = det(X_G)$, deg $p = n (= |A| = |F|)$) kapjuk, hogy az $N = 2n$ választással élve a hibázás valószínűsége legfeljebb $\frac{1}{2}$.

A hibázás valószínűsége tovább csökkenthető:

N értékének növelésével

A hibázás valószínűségének csökkentése

A lemmát alkalmazva a véletlen algoritmusra ($p = det(X_G)$, deg $p = n(= |A| = |F|)$) kapjuk, hogy az $N = 2n$ választással élve a hibázás valószínűsége legfeljebb $\frac{1}{2}$.

A hibázás valószínűsége tovább csökkenthető:

N értékének növelésével

A fenti paraméterválasztáson alapuló változat többszöri, független ismétlésével.

Szünet

Bevezetés

Probléma

Legyen G páros gráf, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ Keressük a $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$ maximumát, ahol $M \subset E(G)$ a G párosításain fut keresztül.

Bevezetés

Probléma

Legyen G páros gráf, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ Keressük a $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$ maximumát, ahol $M \subset E(G)$ a G párosításain fut keresztül.

Definíció

Az $M \subseteq E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ párosításhoz tartozó karakterisztikus függvény $\underline{\chi}_M = (v_i) \in \mathbb{R}^m$, ahol $v_i = 1$, ha $e_i \in M$, különben 0.

Bevezetés

Probléma

Legyen G páros gráf, $c : E(G) \to \mathbb{R}^+$ Keressük a $c(M) = \sum_{e \in M} c(e)$ maximumát, ahol $M \subset E(G)$ a G párosításain fut keresztül.

Definíció

Az $M \subseteq E(G) = \{e_1, \ldots, e_m\}$ párosításhoz tartozó karakterisztikus függvény $\underline{\chi}_M = (v_i) \in \mathbb{R}^m$, ahol $v_i = 1$, ha $e_i \in M$, különben 0.

A karakterisztikus vektor komponensei a gráf éleivel vannak azonosítva. $m = |E(G)|$ miatt $\mathbb{R}^{E(G)}$ és $\mathbb{R}^m$ azonosítható. Ezt használjuk: v_i a karakterisztikus vektor i-edik komponense, de egyben az $e_i \in E(G)$ élnek megfelelő komponens is.

Algebraizálás

Algebraizálás

$c(M) = \langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle$, ahol $\underline{c} \in \mathbb{R}^{E(G)}$.

Algebraizálás

$c(M) = \langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle$, ahol $\underline{c} \in \mathbb{R}^{E(G)}$.

Így a feladat:

$$max\{\langle \underline{c}, \underline{\chi}_M \rangle : M\text{párosítás}\} = max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in \{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}\}$$
$$= max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in conv\{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}\}$$

Geometria

Geometria

Az utolsó kifejezésben szereplő geometriai fogalmakat itt is ismertetjük.

Geometria

Az utolsó kifejezésben szereplő geometriai fogalmakat itt is ismertetjük.

Definíció

Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^m$ ponthalmaz. Ekkor P *konvex burka*,

$$convP = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{p}_i : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, \underline{p}_i \in P\}$$

a legszűkebb konvex halmaz, amely P-t tartalmazza.

A konvex burokban összegyűjtött vektorokat a P ponthalmaz elemei konvex kombinációinak nevezzük.

Geometria

Az utolsó kifejezésben szereplő geometriai fogalmakat itt is ismertetjük.

Definíció

Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^m$ ponthalmaz. Ekkor P *konvex burka*,

$$convP = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{p}_i : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, \underline{p}_i \in P\}$$

a legszűkebb konvex halmaz, amely P-t tartalmazza.

A konvex burokban összegyűjtött vektorokat a P ponthalmaz elemei konvex kombinációinak nevezzük.

Jelölés

A $conv\{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}$ halmazt jelöljük $MP(G)$-vel.

Geometria

Az utolsó kifejezésben szereplő geometriai fogalmakat itt is ismertetjük.

Definíció

Legyen $P \subseteq \mathbb{R}^m$ ponthalmaz. Ekkor P *konvex burka*,

$$convP = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{p}_i : \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1, \underline{p}_i \in P\}$$

a legszűkebb konvex halmaz, amely P-t tartalmazza.

A konvex burokban összegyűjtött vektorokat a P ponthalmaz elemei konvex kombinációinak nevezzük.

Jelölés

A $conv\{\underline{\chi}_M : M\text{párosítás}\}$ halmazt jelöljük $MP(G)$-vel.

A diszkrét és folytonos feladat kapcsolata

A diszkrét és folytonos feladat kapcsolata

Általában a lehetséges megoldások halmazának bővítése kihat a maximalizálási feladatra is.

A diszkrét és folytonos feladat kapcsolata

Általában a lehetséges megoldások halmazának bővítése kihat a maximalizálási feladatra is.

Ebben az esetben ez nem így van. $MP(G)$ konvex, korlátos, zárt halmaz.

A diszkrét és folytonos feladat kapcsolata

Általában a lehetséges megoldások halmazának bővítése kihat a maximalizálási feladatra is.

Ebben az esetben ez nem így van. $MP(G)$ konvex, korlátos, zárt halmaz.

Egy lineáris függvény $MP(G)$-beli optimumát egy $\underline{\chi}_M$ pontban veszi fel, hiszen

$$\langle \underline{c}, \sum \lambda_i \underline{p}_i \rangle = \sum \lambda_i \langle \underline{c}, \underline{p}_i \rangle \leq \max \langle \underline{c}, \underline{p}_i \rangle.$$

Lineáris programozás

Lineáris programozás

A $max\{\langle \underline{c}, \underline{x}\rangle : \underline{x} \in MP(G)\}$ optimalizálási feladat megoldása egy lineáris programozási feladat.

Lineáris programozás

A $max\{\langle \underline{c}, \underline{x}\rangle : \underline{x} \in MP(G)\}$ optimalizálási feladat megoldása egy lineáris programozási feladat.

Ennek szimplex módszerrel történő megoldásához szükséges $MP(G)$ lineáris egyenlőtlenségekkel való leírása.

Lineáris programozás

A $max\{\langle \underline{c}, \underline{x} \rangle : \underline{x} \in MP(G)\}$ optimalizálási feladat megoldása egy lineáris programozási feladat.

Ennek szimplex módszerrel történő megoldásához szükséges $MP(G)$ lineáris egyenlőtlenségekkel való leírása.

Az alábbiakban néhany olyan egyenlőtlenséget gyűjtünk össze, amelyek $\{\chi_M : M \text{párosítás}\}$ elemeire (így $MP(G)$ pontjaira is) teljesülnek.

Lineáris programozás

A $max\{\langle \underline{c}, \underline{x}\rangle : \underline{x} \in MP(G)\}$ optimalizálási feladat megoldása egy lineáris programozási feladat.

Ennek szimplex módszerrel történő megoldásához szükséges $MP(G)$ lineáris egyenlőtlenségekkel való leírása.

Az alábbiakban néhany olyan egyenlőtlenséget gyűjtünk össze, amelyek $\{\chi_M : M \text{párosítás}\}$ elemeire (így $MP(G)$ pontjaira is) teljesülnek.

Definíció

Tekintsük $\underline{x} = (x_e : e \in E(G)) \in \mathbb{R}^{E(G)}$ vektort.

Lineáris programozás

A $max\{\langle \underline{c}, \underline{x}\rangle : \underline{x} \in MP(G)\}$ optimalizálási feladat megoldása egy lineáris programozási feladat.

Ennek szimplex módszerrel történő megoldásához szükséges $MP(G)$ lineáris egyenlőtlenségekkel való leírása.

Az alábbiakban néhany olyan egyenlőtlenséget gyűjtünk össze, amelyek $\{\chi_M : M \text{párosítás}\}$ elemeire (így $MP(G)$ pontjaira is) teljesülnek.

Definíció

Tekintsük $\underline{x} = (x_e : e \in E(G)) \in \mathbb{R}^{E(G)}$ vektort.

Legyen $\widehat{MP}(G) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^{E(G)} : x_e \geq 0\ \forall e \in E(G),\ \text{és}\ \sum_{e:vIe} x_e \leq 1\ \forall v \in V(G)\}$

A két politóp kapcsolata

A két politóp kapcsolata

A definiált két politóp között egy irányú kapcsolat van:

$$MP(G) \subseteq \widehat{MP}(G).$$

A két politóp kapcsolata

A definiált két politóp között egy irányú kapcsolat van:

$$MP(G) \subseteq \widehat{MP}(G).$$

Általában a tartalmazás valódi.

A két politóp kapcsolata

A definiált két politóp között egy irányú kapcsolat van:

$$MP(G) \subseteq \widehat{MP}(G).$$

Általában a tartalmazás valódi.

Erre példa a $G = C_{2k+1}$ gráf.

A két politóp kapcsolata

A definiált két politóp között egy irányú kapcsolat van:

$$MP(G) \subseteq \widehat{MP}(G).$$

Általában a tartalmazás valódi.

Erre példa a $G = C_{2k+1}$ gráf.

Például $\underline{x}$ minden koordinátáját $\frac{1}{2}$-nek véve, a kapott vektor eleme $\widehat{MP}(G)$-nek, viszont nem eleme $MP(G)$-nek ($\sum_{e \in E(G)} x_e = k + 1/4$ hipersík elvágja ezt a vektort $MP(G)$-től).

Cél

Cél

Célunk belátni, hogy ha G páros, akkor $MP(G) = \widehat{MP}(G)$.

Cél

Célunk belátni, hogy ha G páros, akkor $MP(G) = \widehat{MP}(G)$.

Ehhez elég megmutatni, hogy $\widehat{MP}(G)$ csúcsai egészek.

Cél

Célunk belátni, hogy ha G páros, akkor $MP(G) = \widehat{MP}(G)$.

Ehhez elég megmutatni, hogy $\widehat{MP}(G)$ csúcsai egészek.

Valóban: $\widehat{MP}(G)$ egész koordinátájú pontjai pontosan $\{\chi_M : M\text{párosítás}\}$ elemei!

Cél

Célunk belátni, hogy ha G páros, akkor $MP(G) = \widehat{MP}(G)$.

Ehhez elég megmutatni, hogy $\widehat{MP}(G)$ csúcsai egészek.

Valóban: $\widehat{MP}(G)$ egész koordinátájú pontjai pontosan $\{\chi_M : M\text{párosítás}\}$ elemei!

$\widehat{MP}(G)$ viszont csúcsai konvex burka, így a másik irányú tartalmazás is adódik.

A célhez vezető Lemma

A célhez vezető Lemma

Lemma

Legyen $I\ell\ell_G$ egy G páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. Ekkor $I\ell\ell_G$ minden négyzetes R részmátrixának determinánsa a $\{-1, 0, 1\}$ egy eleme.

A célhez vezető Lemma

Lemma

Legyen $I\ell\ell_G$ egy G páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. Ekkor $I\ell\ell_G$ minden négyzetes R részmátrixának determinánsa a $\{-1, 0, 1\}$ egy eleme.

$\widehat{MP}(G)$ minden csúcsát megkapjuk úgy, hogy a politópot leíró egyenlőtlenségek közül kiválasztunk néhányat, amelyek egyenlőségjellel egy egyértelműen megoldható rendszert alkotnak.

A célhez vezető Lemma

Lemma

Legyen $I\ell\ell_G$ egy G páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. Ekkor $I\ell\ell_G$ minden négyzetes R részmátrixának determinánsa a $\{-1, 0, 1\}$ egy eleme.

$\widehat{MP}(G)$ minden csúcsát megkapjuk úgy, hogy a politópot leíró egyenlőtlenségek közül kiválasztunk néhányat, amelyek egyenlőségjellel egy egyértelműen megoldható rendszert alkotnak.

Az egyértelmű megoldás a tetszőlegesen kiválasztott csúcs.

A célhez vezető Lemma

Lemma

Legyen $I\ell\ell_G$ egy G páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. Ekkor $I\ell\ell_G$ minden négyzetes R részmátrixának determinánsa a $\{-1,0,1\}$ egy eleme.

$\widehat{MP}(G)$ minden csúcsát megkapjuk úgy, hogy a politópot leíró egyenlőtlenségek közül kiválasztunk néhányat, amelyek egyenlőségjellel egy egyértelműen megoldható rendszert alkotnak.

Az egyértelmű megoldás a tetszőlegesen kiválasztott csúcs.

Az egyértelmű megoldás Cramer-szabállyal is felírható. Ekkor a koordináták két determináns hányadosaként adódnak. A deteminánsokban egészek vannak, a nevező értéke pedig nem-nulla.

A célhez vezető Lemma

Lemma

Legyen $I\ell\ell_G$ egy G páros gráf pont-él illeszkedési mátrixa. Ekkor $I\ell\ell_G$ minden négyzetes R részmátrixának determinánsa a $\{-1, 0, 1\}$ egy eleme.

$\widehat{MP}(G)$ minden csúcsát megkapjuk úgy, hogy a politópot leíró egyenlőtlenségek közül kiválasztunk néhányat, amelyek egyenlőségjellel egy egyértelműen megoldható rendszert alkotnak.

Az egyértelmű megoldás a tetszőlegesen kiválasztott csúcs.

Az egyértelmű megoldás Cramer-szabállyal is felírható. Ekkor a koordináták két determináns hányadosaként adódnak. A deteminánsokban egészek vannak, a nevező értéke pedig nem-nulla. A Lemma alapján ez a nem-nulla szám ± 1.

Lemma bizonyítása

Lemma bizonyítása

Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

Lemma bizonyítása

Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

$I\ell\ell_G$ sorai (és így R sorai is) az A és F kategóriák közt oszlanak meg.

Lemma bizonyítása

Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

$I\ell\ell_G$ sorai (és így R sorai is) az A és F kategóriák közt oszlanak meg.

1. eset: R valamelyik oszlopában nulla vagy egy 1-es szerepel.

Lemma bizonyítása

Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

$I\ell\ell_G$ sorai (és így R sorai is) az A és F kategóriák közt oszlanak meg.

1. eset: R valamelyik oszlopában nulla vagy egy 1-es szerepel. Ekkor ezen oszlop szerint fejtsük ki a determinánst. Vagy biztos 0-t kapunk (R-ben csupa 0 oszlop szerepel), vagy az indukciós lépes alapján leszünk készen.

Lemma bizonyítása

Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

$I\ell\ell_G$ sorai (és így R sorai is) az A és F kategóriák közt oszlanak meg.

1. eset: R valamelyik oszlopában nulla vagy egy 1-es szerepel. Ekkor ezen oszlop szerint fejtsük ki a determinánst. Vagy biztos 0-t kapunk (R-ben csupa 0 oszlop szerepel), vagy az indukciós lépes alapján leszünk készen.

2. eset: R minden oszlopában két 1-es van.

Lemma bizonyítása

Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

$I\ell\ell_G$ sorai (és így R sorai is) az A és F kategóriák közt oszlanak meg.

1. eset: R valamelyik oszlopában nulla vagy egy 1-es szerepel. Ekkor ezen oszlop szerint fejtsük ki a determinánst. Vagy biztos 0-t kapunk (R-ben csupa 0 oszlop szerepel), vagy az indukciós lépes alapján leszünk készen.

2. eset: R minden oszlopában két 1-es van. // Ekkor szükségszerűen egy A-beli és egy F-beli.

Lemma bizonyítása

Legyen R egy $k \times k$ méretű részmátrix. k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás.

$I\ell\ell_G$ sorai (és így R sorai is) az A és F kategóriák közt oszlanak meg.

1. eset: R valamelyik oszlopában nulla vagy egy 1-es szerepel. Ekkor ezen oszlop szerint fejtsük ki a determinánst. Vagy biztos 0-t kapunk (R-ben csupa 0 oszlop szerepel), vagy az indukciós lépes alapján leszünk készen.

2. eset: R minden oszlopában két 1-es van. // Ekkor szükségszerűen egy A-beli és egy F-beli.

Ekkor az A-beli sorok összege egyenlő az F-beli sorok összegével. A determináns értéke emiatt 0.

Eredményeink összefoglalása

Eredményeink összefoglalása

Definició

Egy M mátrix *totálisan unimoduláris*, ha minden négyzetes aldeterminánsa 0 vagy ± 1.

Eredményeink összefoglalása

Definició

Egy M mátrix *totálisan unimoduláris*, ha minden négyzetes aldeterminánsa 0 vagy ± 1.

Következmény

Ha G páros, akkor

a) $I\ell\ell_G$ totálisan unimoduláris,

b) $MP(G) = \widehat{MP}(G)$.

Algoritmus

Algoritmus

Lineáris programozáson alapuló algoritmus

Algoritmus

Lineáris programozáson alapuló algoritmus

(Algebraizálás/LP megfogalmazás) Írjuk fel az $\widehat{MP}(G)$-t leíró LP feladatot.

Algoritmus

Lineáris programozáson alapuló algoritmus

(Algebraizálás/LP megfogalmazás) Írjuk fel az $\widehat{MP}(G)$-t leíró LP feladatot.

(LP megoldás) Oldjuk meg szimplex módszerrel.

Algoritmus

Lineáris programozáson alapuló algoritmus

(Algebraizálás/LP megfogalmazás) Írjuk fel az $\widehat{MP}(G)$-t leíró LP feladatot.

(LP megoldás) Oldjuk meg szimplex módszerrel.
// A megoldás garantáltan egész koordinátájú lesz, így egy párosítást ír le.

Algoritmus

Lineáris programozáson alapuló algoritmus

(Algebraizálás/LP megfogalmazás) Írjuk fel az $\widehat{MP}(G)$-t leíró LP feladatot.

(LP megoldás) Oldjuk meg szimplex módszerrel.
// A megoldás garantáltan egész koordinátájú lesz, így egy párosítást ír le.

(Kombinatorizálás) A megoldást elolvassuk mint egy M élhalmaz karakterisztikus vektora. M az algoritmus outputja.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!