Fokszámsorozatok

Hajnal Péter, MSc Diszkrét matematika előadás

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2020. ősz

Bevezetés

Bevezetés

Az előadás a BSc Kombinatorika kurzus folytatása.

Bevezetés

Az előadás a BSc Kombinatorika kurzus folytatása.

Sokszor vissza kell utalnunk, fel kell idéznünk ott elhangzott fogalmakat, összefüggéseket. Az ilyen „emlékeztetők” rendszeresen megszakítják az előadást.

Bevezetés

Az előadás a BSc Kombinatorika kurzus folytatása.

Sokszor vissza kell utalnunk, fel kell idéznünk ott elhangzott fogalmakat, összefüggéseket. Az ilyen „emlékeztetők" rendszeresen megszakítják az előadást.

Idézzünk fel néhány fontos gráfelméleti fogalmat.

Bevezetés

Az előadás a BSc Kombinatorika kurzus folytatása.

Sokszor vissza kell utalnunk, fel kell idéznünk ott elhangzott fogalmakat, összefüggéseket. Az ilyen „emlékeztetők” rendszeresen megszakítják az előadást.

Idézzünk fel néhány fontos gráfelméleti fogalmat.

Definíció: Gráf

Gráfnak nevezzük azokat a (V, E, I) hármasokat, ahol V és E tetszőleges diszjunkt halmazok, $I \subseteq V \times E$ illeszkedési reláció. A V halmazt a gráf *csúcshalmazának*, E-t *élhalmaznak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy a v csúcs illeszkedik az e élre, ha $(v, e) \in I$. Az illeszekdési reláció olyan, hogy minden élre egy vagy két csúcs illeszkedik.

Bevezetés (folytatás)

Bevezetés (folytatás)

Definíció: Egyszerű gráf

Az egyetlen csúcsra illeszedő éleket *hurokéleknek* nevezzük. Ha e_1 és e_2 olyanok, hogy ugyanazon csúcs(ok)ra illeszkednek, őket *párhuzomos éleknek* nevezzük. Az olyan gráfokat, amelyek nem tartalmaznak hurokélt és párhuzamos éleket, *egyszerű gráfoknak* hívjuk.

Bevezetés (folytatás)

Definíció: Egyszerű gráf

Az egyetlen csúcsra illeszedő éleket *hurokéleknek* nevezzük. Ha e_1 és e_2 olyanok, hogy ugyanazon csúcs(ok)ra illeszkednek, őket *párhuzomos éleknek* nevezzük. Az olyan gráfokat, amelyek nem tartalmaznak hurokélt és párhuzamos éleket, *egyszerű gráfoknak* hívjuk.

Definíció: Fokszám

Egy csúcs *fokszámán, fokán* a csúcsra illeszkedő élek számát értjük, úgy számolva, hogy minden hurokél kétszer illeszkedik egyetlen pontra.

Fokszámsorozatok

Fokszámsorozatok

Definíció: Fokszámsorozat

A $d_1, \ldots, d_n$ számsorozatot a G gráf fokszámsorozatának nevezzük, ha G fokainak nemcsökkenő sorozata. Speciálisan $n = |V|$, $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ teljesül.

Fokszámsorozatok

Definíció: Fokszámsorozat

A $d_1, \ldots, d_n$ számsorozatot a G gráf fokszámsorozatának nevezzük, ha G fokainak nemcsökkenő sorozata. Speciálisan $n = |V|$, $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ teljesül.

- Alternatív jelölésként $d_1 = d_{max}$, illetve $d_n = d_{min}$ jelöléseket is használjuk.

Fokszámsorozatok

Definíció: Fokszámsorozat

A $d_1, \ldots, d_n$ számsorozatot a G gráf fokszámsorozatának nevezzük, ha G fokainak nemcsökkenő sorozata. Speciálisan $n = |V|$, $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ teljesül.

- Alternatív jelölésként $d_1 = d_{max}$, illetve $d_n = d_{min}$ jelöléseket is használjuk.
- Megjegyzezzük, hogy a fokszámsorozatból a gráf élszáma is kiolvasható az

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E|$$

összefüggés alapján.

Fokszámsorozatok

Definíció: Fokszámsorozat

A $d_1, \ldots, d_n$ számsorozatot a G gráf fokszámsorozatának nevezzük, ha G fokainak nemcsökkenő sorozata. Speciálisan $n = |V|$, $d_1 \geq \ldots \geq d_n$ teljesül.

- Alternatív jelölésként $d_1 = d_{max}$, illetve $d_n = d_{min}$ jelöléseket is használjuk.
- Megjegyzezzük, hogy a fokszámsorozatból a gráf élszáma is kiolvasható az

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E|$$

összefüggés alapján.

- Ugyanez az összefüggés más formában

$$d_{\text{átlag}} = \sum_{i=1}^{n} d_i/n = 2|E|/n.$$

Az alapkérdés

Az alapkérdés

Alapkérdés

Adott $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ számsorozat. Van-e olyan G gráf, amely fokszámsorozata az adott sorozat?

Az alapkérdés

Alapkérdés

Adott $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ számsorozat. Van-e olyan G gráf, amely fokszámsorozata az adott sorozat?

- Ha igen a válasz, akkor abban az esetben azt mondjuk, hogy a sorozatot realizálja a G gráf.

Az alapkérdés

Alapkérdés

Adott $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ számsorozat. Van-e olyan G gráf, amely fokszámsorozata az adott sorozat?

- Ha igen a válasz, akkor abban az esetben azt mondjuk, hogy a sorozatot realizálja a G gráf.

- Természetesen egy realizálható sorozat elemei mindig természetes számok. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy a realizálhatóság szempontjából vizsgálandó sorozat természetes számokat tartalmaz.

Egy észrevétel

Egy észrevétel

Amennyiben G-re semmilyen kikötést nem teszünk, az alap döntési kérdésre a válasz egyszerű.

Egy észrevétel

Amennyiben G-re semmilyen kikötést nem teszünk, az alap döntési kérdésre a válasz egyszerű.

Állítás

A $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ számsorozat pontosan akkor realizálható, ha $\sum_{i=1}^{n} d_i$ páros.

Egy észrevétel

Amennyiben G-re semmilyen kikötést nem teszünk, az alap döntési kérdésre a válasz egyszerű.

Állítás

A $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ számsorozat pontosan akkor realizálható, ha $\sum_{i=1}^n d_i$ páros.

Az egyszerű bizonyítás (ami egy gyakorló feladat) a hurokélek lehetőségét erősen kihasználja.

További kérdések

További kérdések

- Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg.

További kérdések

• Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg.

• Vagy általában: Mikor realizálható természetes számok egy adott sorozata egy speciális feltételekkel rendelkező gráffal? A következőkben ilyen kérdéseket vizsgálunk.

További kérdések

- Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg.

- Vagy általában: Mikor realizálható természetes számok egy adott sorozata egy speciális feltételekkel rendelkező gráffal? A következőkben ilyen kérdéseket vizsgálunk.

- Amennyiben a kérdésre igenlő a válasz színesíthetjük problémánkat:

További kérdések

• Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg.

• Vagy általában: Mikor realizálható természetes számok egy adott sorozata egy speciális feltételekkel rendelkező gráffal? A következőkben ilyen kérdéseket vizsgálunk.

• Amennyiben a kérdésre igenlő a válasz színesíthetjük problémánkat:

(1) Kérhetjük egy realizáló gráf megadását.

További kérdések

- Természetesen adódik a kérdés, hogy mi a helyzet, ha hurokéleket nem engedünk meg.

- Vagy általában: Mikor realizálható természetes számok egy adott sorozata egy speciális feltételekkel rendelkező gráffal? A következőkben ilyen kérdéseket vizsgálunk.

- Amennyiben a kérdésre igenlő a válasz színesíthetjük problémánkat:

(1) Kérhetjük egy realizáló gráf megadását.

(2) Kérhetjük az összes realizáló gráf felsorolását.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció

Tétel

A $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ csökkenő számsorozat pontosan akkor realizálható hurokél nélküli gráffal, ha

- $\sum_{i=1}^n d_i$ páros, és
- $d_1 = d_{\max} \leq d_2 + d_3 \cdots + d_n$.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Először tegyük fel, hogy $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ realizálható hurokél nélkül.

Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Először tegyük fel, hogy $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ realizálható hurokél nélkül. Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül.
- A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_i-hez tartozó csúcsát, erre d_i élre illeszkedik.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Először tegyük fel, hogy $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ realizálható hurokél nélkül.

Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül.

- A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_i-hez tartozó csúcsát, erre d_i élre illeszkedik.

- Másrészt az összes többi csúcs összesen $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ élre illeszkedik.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Először tegyük fel, hogy $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ realizálható hurokél nélkül. Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül.
- A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_i-hez tartozó csúcsát, erre d_i élre illeszkedik.
- Másrészt az összes többi csúcs összesen $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ élre illeszkedik.
- A hurokélek kizárása miatt az előbbi csúcson átmenő élek mind illeszkednek egy másik csúcsra is, tehát legfeljebb $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ van belőlük.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Először tegyük fel, hogy $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ realizálható hurokél nélkül. Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül.
- A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_i-hez tartozó csúcsát, erre d_i élre illeszkedik.
- Másrészt az összes többi csúcs összesen $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ élre illeszkedik.
- A hurokélek kizárása miatt az előbbi csúcson átmenő élek mind illeszkednek egy másik csúcsra is, tehát legfeljebb $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ van belőlük.
- Így n feltételt kaptunk: fokszámsorozatunk mindegyik eleme legfeljebb annyi mint a többi fok összege.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Először tegyük fel, hogy $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ realizálható hurokél nélkül. Ekkor az *1.* feltételről láttuk, hogy teljesül.
- A *2.* feltételhez tekintsük a realizáló gráf d_i-hez tartozó csúcsát, erre d_i élre illeszkedik.
- Másrészt az összes többi csúcs összesen $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ élre illeszkedik.
- A hurokélek kizárása miatt az előbbi csúcson átmenő élek mind illeszkednek egy másik csúcsra is, tehát legfeljebb $d_1 + \cdots + d_{i-1} + d_{i+1} + \ldots + d_n$ van belőlük.
- Így n feltételt kaptunk: fokszámsorozatunk mindegyik eleme legfeljebb annyi mint a többi fok összege.
- Ezek közül csak az nem nyilvánvaló, amikor a kivett csúcs foka a maximális. Ez éppen a *2.* feltétel.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- A másik irányt $\sum_{i=1}^{n} d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Először tekintsük az elfajuló esteket.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- A másik irányt $\sum_{i=1}^{n} d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket.
- Ha $d_1 \leq 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható).

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- A másik irányt $\sum_{i=1}^{n} d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket.
- Ha $d_1 \leq 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható).
- Ha $n = 1$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = 0$ adódik (az üres összeg értéke 0).

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- A másik irányt $\sum_{i=1}^{n} d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket.
- Ha $d_1 \leq 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható).
- Ha $n = 1$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = 0$ adódik (az üres összeg értéke 0).
- Ha $n = 2$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = d_2$ adódik, így a két csúcs között d_1 darab párhuzamos élt tartalmazó gráf realizálja a sorozatot.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- A másik irányt $\sum_{i=1}^{n} d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket.
- Ha $d_1 \leq 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható).
- Ha $n = 1$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = 0$ adódik (az üres összeg értéke 0).
- Ha $n = 2$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = d_2$ adódik, így a két csúcs között d_1 darab párhuzamos élt tartalmazó gráf realizálja a sorozatot.
- A továbbiakban így feltesszük, hogy $n \geq 3$ és $d_1 \geq 2$ (egyben $d_2 \geq 1$).

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- A másik irányt $\sum_{i=1}^{n} d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket.
- Ha $d_1 \leq 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható).
- Ha $n = 1$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = 0$ adódik (az üres összeg értéke 0).
- Ha $n = 2$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = d_2$ adódik, így a két csúcs között d_1 darab párhuzamos élt tartalmazó gráf realizálja a sorozatot.
- A továbbiakban így feltesszük, hogy $n \geq 3$ és $d_1 \geq 2$ (egyben $d_2 \geq 1$).
- A $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$ esetet ismét realizálja az n pontú, üres élhalmazú gráf.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- A másik irányt $\sum_{i=1}^{n} d_i$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Először tekintsük az elfajuló esteket.
- Ha $d_1 \leq 1$, akkor az állítás könnyen látható (fokszámsorozatunk egy párosítással realizálható).
- Ha $n = 1$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = 0$ adódik (az üres összeg értéke 0).
- Ha $n = 2$, akkor a *2.* feltételből $d_1 = d_2$ adódik, így a két csúcs között d_1 darab párhuzamos élt tartalmazó gráf realizálja a sorozatot.
- A továbbiakban így feltesszük, hogy $n \geq 3$ és $d_1 \geq 2$ (egyben $d_2 \geq 1$).
- A $\sum_{i=1}^{n} d_i = 0$ esetet ismét realizálja az n pontú, üres élhalmazú gráf.
- Legyen $m := \sum_{i=1}^{n} d_i$. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{n} d_i < m$ esetén két feltételünk garantálja a hurokél nélküli realizációt.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Vizsgáljuk a

$$d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, \ldots, d_n$$

sorozatot.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Vizsgáljuk a

$$d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, \ldots, d_n$$

sorozatot.

- Ez nem szükségszerűen csökkenő. Maximális eleme $d_1 - 1$ vagy d_3 (amikor is $d_1 = d_2 = d_3$). Mindkét esetben a két feltételünk teljesül a sorozatra.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Vizsgáljuk a

$$d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, \ldots, d_n$$

sorozatot.

- Ez nem szükségszerűen csökkenő. Maximális eleme $d_1 - 1$ vagy d_3 (amikor is $d_1 = d_2 = d_3$). Mindkét esetben a két feltételünk teljesül a sorozatra.

- Így alkalmazható az indukciós feltevés: az új sorozat realizálható hurokél nélküli gráffal.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, a bizonyítás

- Vizsgáljuk a

$$d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, \ldots, d_n$$

sorozatot.

- Ez nem szükségszerűen csökkenő. Maximális eleme $d_1 - 1$ vagy d_3 (amikor is $d_1 = d_2 = d_3$). Mindkét esetben a két feltételünk teljesül a sorozatra.

- Így alkalmazható az indukciós feltevés: az új sorozat realizálható hurokél nélküli gráffal.

- Ennek két különböző csúcsa $d_1 - 1$ és $d_2 - 1$ fokú. Ezeket egy plusz éllel összekötve olyan gráfhoz jutunk, amely a bizonyítandót adja.

Hurokél nélküli gráfokkal történő realizáció, egy megjegyzés

Az indukciós bizonyításból könnyen kiolvasható egy rekurzív algoritmus, amely az adott feltételeknek elegettevő sorozathoz egy megfelelő realizáló gráfot konstruál.

Szünet

Egyszerű gráfokkal történő realizáció

Egyszerű gráfokkal történő realizáció

Most áttérünk a jóval nehezebb kérdésre, amikor is a realizáló gráfot az egyszerű gráfok között keressük.

Egyszerű gráfokkal történő realizáció

Most áttérünk a jóval nehezebb kérdésre, amikor is a realizáló gráfot az egyszerű gráfok között keressük.

Lemma

Ha a $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ csökkenő számsorozat realizálható egyszerű gráffal, akkor van olyan realizáló egyszerű gráf, amely csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, ahol $d_i = d(v_i)$, és a v_1 csúcs szomszédai pontosan a $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$ csúcsok. (A realizálhatósági feltétel miatt $d_1 \leq n-1$ garantált).

A Lemma egy következménye

A Lemma egy következménye

V. Havel (1955) és S. Hakimi (1962) tétele

$\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ akkor és csak akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

is.

A Lemma egy következménye

V. Havel (1955) és S. Hakimi (1962) tétele

$\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ akkor és csak akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

$$d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

is.

- A következmény egyik iránya nyilvánvaló.

A Lemma egy következménye

V. Havel (1955) és S. Hakimi (1962) tétele

$\langle d_i\rangle_{i=1}^n$ akkor és csak akkor realizálható egyszerű gráffal, ha

$$d_2-1, d_3-1, \ldots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

is.

- A következmény egyik iránya nyilvánvaló.

- A következmény másik iránya egyszerűen adódik az előbbi lemmából, hiszen ha vesszük azt a $\langle d_i\rangle_{i=1}^n$-t realizáló gráfot, amelyben v_1 a d_1 további legkisebb indexű csúccsal szomszédos, akkor a v_1 csúcsot elhagyva olyan gráfot kapunk, amely éppen a fenti fokszámsorozatot realizálja.

A Lemma bizonyítása

A Lemma bizonyítása

- Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_1 szomszédainak indexösszege minimális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.

A Lemma bizonyítása

- Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_1 szomszédainak indexösszege minimális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.
- Indirekt úton tegyük fel, hogy nem, azaz létezik $i < j$ úgy, hogy v_1 szomszédos v_j-vel, de nem szomszédos v_i-vel.

A Lemma bizonyítása

- Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_1 szomszédainak indexösszege minimális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.

- Indirekt úton tegyük fel, hogy nem, azaz létezik $i < j$ úgy, hogy v_1 szomszédos v_j-vel, de nem szomszédos v_i-vel.

- v_j-nek egy szomszédja ismert (v_1), $d_j - 1$ másikról még nem tudunk semmit. v_i-nek van d_i „tisztázatlan” szomszédja (ezekről tudjuk, hogy v_1-től különbözőek).

A Lemma bizonyítása

- Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_1 szomszédainak indexösszege minimális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.

- Indirekt úton tegyük fel, hogy nem, azaz létezik $i < j$ úgy, hogy v_1 szomszédos v_j-vel, de nem szomszédos v_i-vel.

- v_j-nek egy szomszédja ismert (v_1), $d_j - 1$ másikról még nem tudunk semmit. v_i-nek van d_i „tisztázatlan" szomszédja (ezekről tudjuk, hogy v_1-től különbözőek).

- A csökkenő sorrend miatt $d_j - 1 \leq d_i - 1 < d_i$. Ez csak úgy lehet, ha van egy olyan $x \neq v_1$ csúcs, amely v_j-vel szomszédos, de v_i-vel nem.

A Lemma bizonyítása

- Legyen G olyan realizáló gráf, amelyre $d(v_i) = d_i$ és v_1 szomszédainak indexösszege minimális. Azt állítjuk, hogy ez a gráf olyan, amilyet a lemma állít.

- Indirekt úton tegyük fel, hogy nem, azaz létezik $i < j$ úgy, hogy v_1 szomszédos v_j-vel, de nem szomszédos v_i-vel.

- v_j-nek egy szomszédja ismert (v_1), $d_j - 1$ másikról még nem tudunk semmit. v_i-nek van d_i „tisztázatlan" szomszédja (ezekről tudjuk, hogy v_1-től különbözőek).

- A csökkenő sorrend miatt $d_j - 1 \leq d_i - 1 < d_i$. Ez csak úgy lehet, ha van egy olyan $x \neq v_1$ csúcs, amely v_j-vel szomszédos, de v_i-vel nem.

- Képezzük G-ből a $\widetilde{G}$ gráfot úgy, hogy a (v_j, v_1) és (v_i, x) éleket elhagyjuk G-ből, majd hozzávesszük a (v_j, x) és (v_i, v_1) éleket.

Egyszerű gráfokkal történő realizáció, a lemma bizonyítása

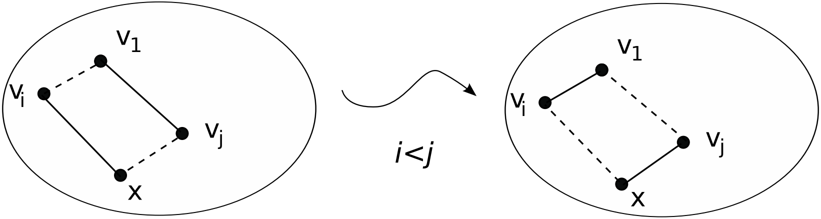


Figure: A szaggatott vonalak élek HIÁNYÁT jelölik. Ez az információ garantálja hogy a “switch” után is egyszerű gráfot kapunk.

Egyszerű gráfokkal történő realizáció, a lemma bizonyítása

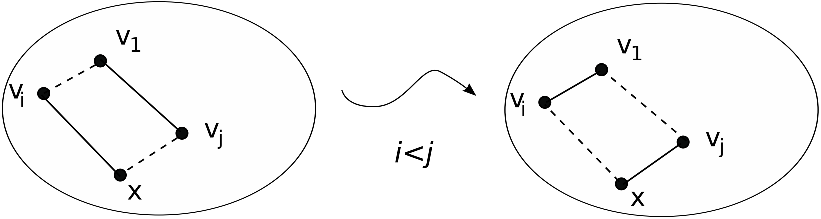


Figure: A szaggatott vonalak élek HIÁNYÁT jelölik. Ez az információ garantálja hogy a “switch” után is egyszerű gráfot kapunk.

• Így a gráf egyszerű maradt és fokszámsorozata sem változott, viszont $\widetilde{G}$-ben v_1 szomszédainak indexösszege csökkent.

Egyszerű gráfokkal történő realizáció, a lemma bizonyítása

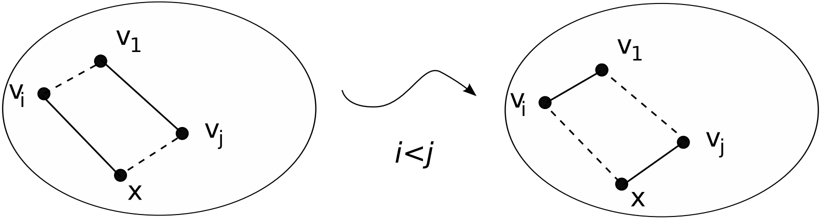


Figure: A szaggatott vonalak élek HIÁNYÁT jelölik. Ez az információ garantálja hogy a "switch" után is egyszerű gráfot kapunk.

- Így a gráf egyszerű maradt és fokszámsorozata sem változott, viszont $\widetilde{G}$-ben v_1 szomszédainak indexösszege csökkent.

- Ez ellentmond G választásának.

Egy megjegyzés

Egy megjegyzés

- Vegyük észre, hogy így a következmény által rekurzív algoritmust (Havel—Hakimi-algoritmus) kaptunk EGY realizáló gráf megkeresésére.

Egy megjegyzés

- Vegyük észre, hogy így a következmény által rekurzív algoritmust (Havel—Hakimi-algoritmus) kaptunk EGY realizáló gráf megkeresésére.

- A bizonyítás egy gyors algoritmust is ad EGY realizáló egyszerű gráf konstrukciójára.

Egy megjegyzés

- Vegyük észre, hogy így a következmény által rekurzív algoritmust (Havel—Hakimi-algoritmus) kaptunk EGY realizáló gráf megkeresésére.

- A bizonyítás egy gyors algoritmust is ad EGY realizáló egyszerű gráf konstrukciójára.

- Az összes realizáló gráf hatékony listázása egy távolról sem triviális kérdés.

Szünet

Fa, alapdefiníciók

Fa, alapdefiníciók

Most fákkal történő realizációkat vizsgáljuk.

Fa, alapdefiníciók

Most fákkal történő realizációkat vizsgáljuk.

Fák

Fa, ághajtás operáció.

Fa, alapdefiníciók

Most fákkal történő realizációkat vizsgáljuk.

Fák

Fa, ághajtás operáció.

Következmény (Fák élszámára vonatkozó alaptétel)

Minden fára

$$|E| = |V| - 1.$$

Fa, alapdefiníciók

Most fákkal történő realizációkat vizsgáljuk.

Fák

Fa, ágháztás operáció.

Következmény (Fák élszámára vonatkozó alaptétel)

Minden fára

$$|E| = |V| - 1.$$

Azaz egy n pontú fának $n-1$ éle van.

Fa, alapdefiníciók

Most fákkal történő realizációkat vizsgáljuk.

Fák

Fa, ághajtás operáció.

Következmény (Fák élszámára vonatkozó alaptétel)

Minden fára

$$|E| = |V| - 1.$$

Azaz egy n pontú fának $n-1$ éle van.

Trivialitás

Egy legalább két pontú fában nem lehet izolált csúcs.

Szükséges és elégséges feltételek

Szükséges és elégséges feltételek

Tétel

Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Ekkor a $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ sorozat pontosan akkor realizálható fával, ha $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ és $d_{min} > 0$ teljesül.

Bizonyítás

Bizonyítás

- Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik.

Bizonyítás

- Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik.
- Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$. Ezt egyetlen gráffal ralizálhatjuk a kétpontú, egy élt tartalmazó fagráffal.

Bizonyítás

- Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik.
- Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$. Ezt egyetlen gráffal ralizálhatjuk a kétpontú, egy élt tartalmazó fagráffal.
- Tegyük fel, hogy $n - 1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$.

Bizonyítás

- Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik.
- Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$. Ezt egyetlen gráffal ralizálhatjuk a kétpontú, egy élt tartalmazó fagráffal.
- Tegyük fel, hogy $n - 1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$.
- Ekkor egyszerű számolással $1 < d_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} < 2$ adódik, és persze $d_1 = d_{max} \geq d_{\text{átlag}} \geq d_{min} = d_n$ teljesül.

Bizonyítás

- Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik.
- Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$. Ezt egyetlen gráffal ralizálhatjuk a kétpontú, egy élt tartalmazó fagráffal.
- Tegyük fel, hogy $n - 1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$.
- Ekkor egyszerű számolással $1 < d_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} < 2$ adódik, és persze $d_1 = d_{max} \geq d_{\text{átlag}} \geq d_{min} = d_n$ teljesül.
- Ebből $d_n = 1$, és $d_1 \geq 2$ adódnak, hiszen a fokszámok egészek.

Bizonyítás

- Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik.
- Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$. Ezt egyetlen gráffal ralizálhatjuk a kétpontú, egy élt tartalmazó fagráffal.
- Tegyük fel, hogy $n - 1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$.
- Ekkor egyszerű számolással $1 < d_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} < 2$ adódik, és persze $d_1 = d_{max} \geq d_{\text{átlag}} \geq d_{min} = d_n$ teljesül.
- Ebből $d_n = 1$, és $d_1 \geq 2$ adódnak, hiszen a fokszámok egészek.
- Így a $d_1 - 1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ számsorozat is teljesíti a tételbeli feltételeket, tehát az indukciós feltevés szerint fával realizálható.

Bizonyítás

- Az elégségesség bizonyítása n szerinti teljes indukcióval történik.
- Ha $n = 2$, akkor a feltételek miatt $d_1 = d_2 = 1$. Ezt egyetlen gráffal ralizálhatjuk a kétpontú, egy élt tartalmazó fagráffal.
- Tegyük fel, hogy $n - 1$ csúcsra igaz az állítás, és $n \geq 3$.
- Ekkor egyszerű számolással $1 < d_{\text{átlag}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} < 2$ adódik, és persze $d_1 = d_{max} \geq d_{\text{átlag}} \geq d_{min} = d_n$ teljesül.
- Ebből $d_n = 1$, és $d_1 \geq 2$ adódnak, hiszen a fokszámok egészek.
- Így a $d_1 - 1, d_2, \dots, d_{n-1}$ számsorozat is teljesíti a tételbeli feltételeket, tehát az indukciós feltevés szerint fával realizálható.
- Ebből a fából megkapható az eredeti fokszámsorozathoz tartozó fagráf egy, a d_1-hez tartozó csúcsból történő ághajtással (az új csúcs/levél tartozik a $d_n = 1$ fokszámhoz).

Fákkal történő realizáció, algoritmus

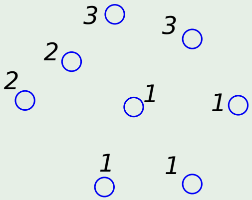
Fákkal történő realizáció, algoritmus

- A bizonyítás most is ad egy egyszerű/gyors eljárást egy realizáló fa konstrukciójára.

Fákkal történő realizáció, algoritmus

- A bizonyítás most is ad egy egyszerű/gyors eljárást egy realizáló fa konstrukciójára.

Példa



Fákkal történő összes realizáció

Fákkal történő összes realizáció

- Az összes realizáló fa felsorolásához kiválasztunk egy 1 fokú csúcsot (a bizonyításban u). Ez tetszőleges lehet, önkényesen választhatjuk.

Fákkal történő összes realizáció

- Az összes realizáló fa felsorolásához kiválasztunk egy 1 fokú csúcsot (a bizonyításban u). Ez tetszőleges lehet, önkényesen választhatjuk.
- A lehetséges szomszédai (v) a legalább 2 fokú pontok ($|V| \geq 3$).

Fákkal történő összes realizáció

- Az összes realizáló fa felsorolásához kiválasztunk egy 1 fokú csúcsot (a bizonyításban u). Ez tetszőleges lehet, önkényesen választhatjuk.
- A lehetséges szomszédai (v) a legalább 2 fokú pontok ($|V| \geq 3$).
- Itt az összes v-t vesszük és képzeletben összekötjük u-t és v-t. Ezzel az u csúcs környezete kialakult. $V - \{u\}$-n tetszőlegesen kialakíthatunk egy fát csak arra kell vigyáznunk, hogy u-ban az új rész az előírt foknál 1-gyel kevesebb legyen (az uv él így módosítja a fokot a kívánt értékre).

Fákkal történő összes realizáció

- Az összes realizáló fa felsorolásához kiválasztunk egy 1 fokú csúcsot (a bizonyításban u). Ez tetszőleges lehet, önkényesen választhatjuk.
- A lehetséges szomszédai (v) a legalább 2 fokú pontok ($|V| \geq 3$).
- Itt az összes v-t vesszük és képzeletben összekötjük u-t és v-t. Ezzel az u csúcs környezete kialakult. $V - \{u\}$-n tetszőlegesen kialakíthatunk egy fát csak arra kell vigyáznunk, hogy u-ban az új rész az előírt foknál 1-gyel kevesebb legyen (az uv él így módosítja a fokot a kívánt értékre).
- Azaz egy új realizációs problémánk lesz eggyel kevesebb csúccsal, azaz eggyel rövidebb fokszámsorozatra. Ezt az ötletet iteráljuk, amíg 2 hosszú fokszámsorozathoz nem jutunk.

Fákkal történő összes realizáció

- Az összes realizáló fa felsorolásához kiválasztunk egy 1 fokú csúcsot (a bizonyításban u). Ez tetszőleges lehet, önkényesen választhatjuk.
- A lehetséges szomszédai (v) a legalább 2 fokú pontok ($|V| \geq 3$).
- Itt az összes v-t vesszük és képzeletben összekötjük u-t és v-t. Ezzel az u csúcs környezete kialakult. $V - \{u\}$-n tetszőlegesen kialakíthatunk egy fát csak arra kell vigyáznunk, hogy u-ban az új rész az előírt foknál 1-gyel kevesebb legyen (az uv él így módosítja a fokot a kívánt értékre).
- Azaz egy új realizációs problémánk lesz eggyel kevesebb csúccsal, azaz eggyel rövidebb fokszámsorozatra. Ezt az ötletet iteráljuk, amíg 2 hosszú fokszámsorozathoz nem jutunk.
- A kiinduló sorozat összes realizáló fáját megkapjuk. Valóban: Egy fa-realizáció, hogyan maradhatna le a listáról? Sőt, a kialakuló listán nem lehet ismétlődés (miért?).

Fákkal történő összes realizáció, algoritmus

Algoritmus

Fákkal történő összes realizáció, algoritmus

Algoritmus

Adott: Egy $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ sorozat amelyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ és $d_{min} > 0$.

Fákkal történő összes realizáció, algoritmus

Algoritmus

Adott: Egy $\langle d_i\rangle_{i=1}^{n}$ sorozat amelyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ és $d_{min} > 0$.

• Ha $n = 1, 2$, akkor egyetlen egy fokszámsorozat jön szóba, amelyet az egyetlen V csúcshalmazú fa realizál.

Fákkal történő összes realizáció, algoritmus

Algoritmus

Adott: Egy $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ sorozat amelyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ és $d_{min} > 0$.

• Ha $n = 1, 2$, akkor egyetlen egy fokszámsorozat jön szóba, amelyet az egyetlen V csúcshalmazú fa realizál.

• $n > 2$ esetén rögzítsünk egy tetszőleges $u \in V$ csúcsot, amelyre $d(u) = 1$.

Fákkal történő összes realizáció, algoritmus

Algoritmus

Adott: Egy $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ sorozat amelyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ és $d_{min} > 0$.

• Ha $n = 1, 2$, akkor egyetlen egy fokszámsorozat jön szóba, amelyet az egyetlen V csúcshalmazú fa realizál.

• $n > 2$ esetén rögzítsünk egy tetszőleges $u \in V$ csúcsot, amelyre $d(u) = 1$.

• Az összes $v \in V$ csúcsra, amelyre $d(v) \geq 2$ vegyük $V - \{u\}$ halmazon a

$$d'(x) = \begin{cases} d(x), & x \neq v, \\ d(v) - 1, & x = v \end{cases}$$

módosított fokszám előírást.

Fákkal történő összes realizáció, algoritmus

Algoritmus

Adott: Egy $\langle d_i \rangle_{i=1}^{n}$ sorozat amelyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n-2$ és $d_{min} > 0$.

• Ha $n = 1, 2$, akkor egyetlen egy fokszámsorozat jön szóba, amelyet az egyetlen V csúcshalmazú fa realizál.

• $n > 2$ esetén rögzítsünk egy tetszőleges $u \in V$ csúcsot, amelyre $d(u) = 1$.

• Az összes $v \in V$ csúcsra, amelyre $d(v) \geq 2$ vegyük $V - \{u\}$ halmazon a

$$d'(x) = \begin{cases} d(x), & x \neq v, \\ d(v) - 1, & x = v \end{cases}$$

módosított fokszám előírást.

• Rekurzív módon a kapott sorozat összes realizációját listázzuk.

Fákkal történő összes realizáció, algoritmus

Algoritmus

Adott: Egy $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ sorozat amelyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^n d_i = 2n-2$ és $d_{min} > 0$.

• Ha $n = 1, 2$, akkor egyetlen egy fokszámsorozat jön szóba, amelyet az egyetlen V csúcshalmazú fa realizál.

• $n > 2$ esetén rögzítsünk egy tetszőleges $u \in V$ csúcsot, amelyre $d(u) = 1$.

• Az összes $v \in V$ csúcsra, amelyre $d(v) \geq 2$ vegyük $V - \{u\}$ halmazon a

$$d'(x) = \begin{cases} d(x), & x \neq v, \\ d(v) - 1, & x = v \end{cases}$$

módosított fokszám előírást.

• Rekurzív módon a kapott sorozat összes realizációját listázzuk.

• A lista összes fájára a v-ből u-ba történő ághajtással kapott gráfot az eredeti sorozat listájára rakjuk.

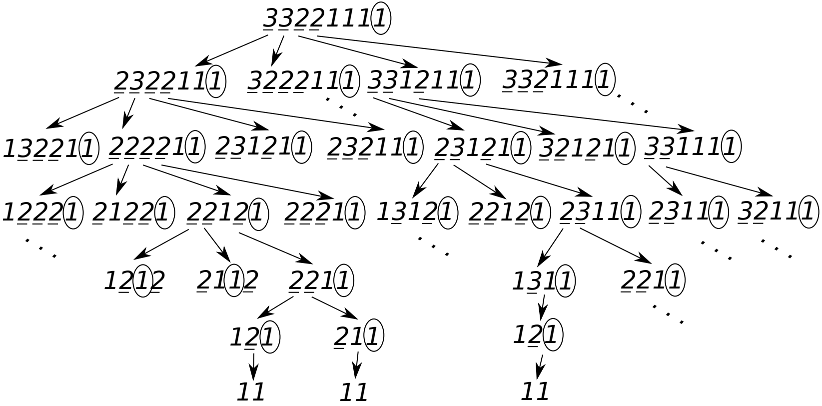
Fákkal történő összes realizáció, példa

Fákkal történő összes realizáció, példa

A rekurzió esetei egy nagy fában foglalhatók össze. Sok csúcsban a feladat ugyanazt a fokszámsorozatot tartalmazza csak más és más csúcshalmazra. Az elburjánzó feladattömeg fájának egy töredékét a következő ábra tartalmazza:

Fákkal történő összes realizáció, példa

A rekurzió esetei egy nagy fában foglalhatók össze. Sok csúcsban a feladat ugyanazt a fokszámsorozatot tartalmazza csak más és más csúcshalmazra. Az elburjánzó feladattömeg fájának egy töredékét a következő ábra tartalmazza:



Fákkal történő összes realizáció, számok

Fákkal történő összes realizáció, számok

- Könnyű összeszámolni, hogy 180 darab realizáló fa van.

Fákkal történő összes realizáció, számok

- Könnyű összeszámolni, hogy 180 darab realizáló fa van.

- Ez annak köszönhető, hogy egy konkrét csúcshalmazon vizsgáljuk a problémát.

Fákkal történő összes realizáció, számok

- Könnyű összeszámolni, hogy 180 darab realizáló fa van.

- Ez annak köszönhető, hogy egy konkrét csúcshalmazon vizsgáljuk a problémát.

- Fa-izomorfiatípusból csak öt különböző realizálja az adott fokszámsorozatot.

Fákkal történő összes realizáció, összeszámlálás

Fákkal történő összes realizáció, összeszámlálás

A fenti rekurzív algoritmus könnyen átalakítható egy tétel indukciós bizonyításává, amely megadja, hogy adott csúcsokhoz rendelt fokszámokat hány fa realizálja (feltéve, hogy a sorozat realizálható). A nehézség, hogy meg kell sejteni a helyes választ.

Fákkal történő összes realizáció, összeszámlálás

A fenti rekurzív algoritmus könnyen átalakítható egy tétel indukciós bizonyításává, amely megadja, hogy adott csúcsokhoz rendelt fokszámokat hány fa realizálja (feltéve, hogy a sorozat realizálható). A nehézség, hogy meg kell sejteni a helyes választ.

Tétel

Legyen $\langle d_i \rangle_{i=1}^n$ egy fával realizálható fokszámsorozat. Ekkor azon fák száma a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ csúcshalmazon, amelyekre $d(v_i) = d_i$ $(i = 1, \ldots, n)$:

$$(n-2)! \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(d_i - 1)!}.$$

Fákkal történő összes realizáció, összeszámlálás

Fákkal történő összes realizáció, összeszámlálás

A tételt egy kicsit más formában bizonyítjuk. A kiinduló fokszámsorozatban megengedünk 0-kat is. A módosított tétel ugyanaz mint az eredeti forma:

Fákkal történő összes realizáció, összeszámlálás

A tételt egy kicsit más formában bizonyítjuk. A kiinduló fokszámsorozatban megengedünk 0-kat is. A módosított tétel ugyanaz mint az eredeti forma:

Tétel

Legyen $\langle d_i \rangle_{i=1}^n \in \mathbb{N}^n$ $(n \geq 2)$ olyan, melyre teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

egyenlőség, ekkor ezen fokszámsorozatot realizáló fák száma:

$$(n-2)! \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i}{d_i!}.$$

Fákkal történő összes realizáció, emlékeztető

Fákkal történő összes realizáció, emlékeztető

- Ha valamely j indexre $d_j = 0$, akkor a fokszámsorozat nem realizálható fával, hiszen legalább egy legalább két pontból álló fa csúcsainak fokszáma minimum 1. Ilyen esetben a formula értéke is 0.

Fákkal történő összes realizáció, emlékeztető

- Ha valamely j indexre $d_j = 0$, akkor a fokszámsorozat nem realizálható fával, hiszen legalább egy legalább két pontból álló fa csúcsainak fokszáma minimum 1. Ilyen esetben a formula értéke is 0.
- Tegyük fel, hogy $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és a realizáló fa csúcsai $\{v_i\}_{i=1}^n$, ahol $d(v_i) = d_i$.

Fákkal történő összes realizáció, emlékeztető

- Ha valamely j indexre $d_j = 0$, akkor a fokszámsorozat nem realizálható fával, hiszen legalább egy legalább két pontból álló fa csúcsainak fokszáma minimum 1. Ilyen esetben a formula értéke is 0.
- Tegyük fel, hogy $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és a realizáló fa csúcsai $\{v_i\}_{i=1}^n$, ahol $d(v_i) = d_i$.
- Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = 2\frac{n-1}{n} < 2,$$

így $d_1 = 1$, azaz a v_1 csúcs minden realizáló fában levél.

Fákkal történő összes realizáció, emlékeztető

- Ha valamely j indexre $d_j = 0$, akkor a fokszámsorozat nem realizálható fával, hiszen legalább egy legalább két pontból álló fa csúcsainak fokszáma minimum 1. Ilyen esetben a formula értéke is 0.
- Tegyük fel, hogy $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ és a realizáló fa csúcsai $\{v_i\}_{i=1}^n$, ahol $d(v_i) = d_i$.
- Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i = 2\frac{n-1}{n} < 2,$$

így $d_1 = 1$, azaz a v_1 csúcs minden realizáló fában levél.
- A realizáló fákat $n-1$ diszjunkt csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a v_1 csúcsnak melyik másik csúcs a szomszédja. Ha realizáljuk a $d_2, d_3, \ldots, d_{i-1}, d_i - 1, d_{i+1}, \ldots, d_n$ fokszámsorozatot fával, akkor megkapjuk az eredeti fokszámsorozat egy realizációját, amelyben v_1 szomszédja v_i.

Fákkal történő összes realizáció, bizonyítás

Fákkal történő összes realizáció, bizonyítás

Ezt felhasználva teljes indukcióval igazoljuk a formula helyességét. Az állítás $n = 2$ esetén nílvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy állítás teljesül $n - 1$ csúcs esetén.

Fákkal történő összes realizáció, bizonyítás

Ezt felhasználva teljes indukcióval igazoljuk a formula helyességét. Az állítás $n = 2$ esetén nílvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy állítás teljesül $n - 1$ csúcs esetén.

$$\sum_{j=2}^{n}(n-3)!\left(\prod_{i=2}^{j-1}\frac{d_i}{d_i!}\right)\cdot\frac{d_j-1}{(d_j-1)!}\cdot\left(\prod_{i=j+1}^{n}\frac{d_i}{d_i!}\right)=$$

$$(n-3)!\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{d_i}{d_i!}\right)\sum_{j=2}^{n}(d_j-1)=(n-2)!\prod_{i=1}^{n}\frac{d_i}{d_i!}.$$

Adott csúcshalmazon lévő fák száma, Cayley tétele

Adott csúcshalmazon lévő fák száma, Cayley tétele

Tétel (Cayley)

A $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ halmazon n^{n-2} fa adható meg.

Adott csúcshalmazon lévő fák száma, Cayley tétele

Tétel (Cayley)

A $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ halmazon n^{n-2} fa adható meg.

Egy alternatív forma:

Adott csúcshalmazon lévő fák száma, Cayley tétele

Tétel (Cayley)

A $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ halmazon n^{n-2} fa adható meg.

Egy alternatív forma:

Tétel (Cayley)

Azaz az n csúcsú teljes gráf (K_n) feszítőfáinak száma n^{n-2}.

Cayley-tétel bizonyítása

Cayley-tétel bizonyítása

A fokszámok eloszlása szerint csoportosítva a megszámolandó fákat a számukra a következő összefüggés adódik

Cayley-tétel bizonyítása

A fokszámok eloszlása szerint csoportosítva a megszámolandó fákat a számukra a következő összefüggés adódik

$$\sum_{\substack{d_1,d_2,\dots,d_n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\\ d_1+d_2+\dots+d_n=2(n-1)}} (n-2)!\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(d_i-1)!}=\sum_{d_1^-+d_2^-+\dots+d_n^-=n-2}\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n} d_i^-!},$$

ahol $d_i^-=d_i-1$.

Cayley-tétel bizonyítása

A fokszámok eloszlása szerint csoportosítva a megszámolandó fákat a számukra a következő összefüggés adódik

$$\sum_{\substack{d_1,d_2,\ldots,d_n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\\ d_1+d_2+\cdots+d_n=2(n-1)}} (n-2)!\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(d_i-1)!}=\sum_{d_1^-+d_2^-+\cdots+d_n^-=n-2}\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}d_i^-!},$$

ahol $d_i^- = d_i - 1$.
Vegyük észre, hogy az egyenlőség jobb oldala a multinomiális tétel speciális esete, így

$$\sum_{d_1^-+d_2^-+\cdots+d_n^-=n-2}\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}d_i^-!}=$$

$$\sum_{d_1^-+d_2^-+\cdots+d_n^-=n-2}\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}d_i^-!}1^{d_1^-}1^{d_2^-}\cdots 1^{d_n^-}=(1+\cdots+1)^{n-2}=n^{n-2}.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!