Algoritmuselmélet és bonyolultságelmélet feladatok
MSc hallgatók számára

Növeléses algoritmusok, Folyamok

2017. Előadó: Hajnal Péter

Definíció. A mohó algoritmus az output kiszámítását döntések sorozatára boontja, majd a döntéseket sorban meghozza úgy, hogy korábbi dönteseit nem bírálja felül. Tehát a mohó algoritmus egy döntési sorrend (gyakran ez egy bonyolult feladat) és a döntések meghozatala (ez leggyakrabban az adott pillanatban legnagyobb haszonnal kecsegtető kimenetel választasa). A mohó algoritmusok nagyon egyszerűek, de sokszor outputjuk nem optimális, esetleg az optimum közelítéseként szolgálhatnak.

1. Feladat. *Egy vasútállomás menetrendje vonatok egy listája. Minden vonatnak van egy érkezési időpontja és egy későbbi, továbbindulási időpontja. A vonatokat párhuzamos sínek egyikére kell terelni azzal a természetes feltétellel, hogy egy időben a pályaudvaron tartózkodó vonatokhoz különböző sínt kell rendelnnünk. Szeretnénk minimálizálni a felhasznált sínek számát.*

Tervezzünk mohó algoritmust a problémára. Optimális lesz-e algoritmusunk?

2. Feladat. *Adottak érme-névértékek. Ezek pozitív egészek és köztük van az '1' is. Adott egy n értékű papírpénz. Szeretnénk érmékre felváltani (mindegyik névértékből van elég érménk).*

Tervezzünk mohó algoritmust, mely amely kiszámol egy jónak tűnő váltást. Optimális-e algoritmusunk?

3. Feladat. *Olyan munkákkal foglalkozunk, amelyek elvégézéséhez pontosan egy nap szükséges. Előre látjuk milyen munkák közül választhatunk. Mindegyik munkának van egy beadási határideje (egy pozitív egész, ahány nap múlva készen kell lennie) és egy profitértéke. Szeretnénk úgy kiválasztani a lehetséges munkákból néhányat, hogy teljesíteni tudjuk a határidőket és közben a legnagyobb profitot érjük el.*

Tervezzünk mohó algoritmust, mely amely kiszámol egy jónak tűnő „vállalást". Optimális-e algoritmusunk?

4. Feladat. *Adott egy élsúlyozott gráf, azaz minden élnek van pozitív súlya. Megszeretnénk keresni azt a körmentes élhamazt, amely össszsúlya maximális.*

Tervezzünk mohó algoritmust, mely amely kiszámol egy jónak tűnő élhalmazt. Optimális-e algoritmusunk?

5. Feladat. *Adott egy élsúlyozott gráf, azaz minden élnek van pozitív súlya. Megszeretnénk keresni azt a párosítást, amely össszsúlya maximális.*

Tervezzünk mohó algoritmust, mely amely kiszámol egy jónak tűnő élhalmazt. Optimális-e algoritmusunk? Ha nem, akkor mondhatunk-e valamit a kiszámolt halmaz össszsúlyának és az optimumnak viszonyáról?

6. Feladat. $\star$ *Adott $\mathcal{E} \subset 2^V$, ahol $V = \cup\mathcal{E}$ és minden $E \in \mathcal{E}$ elemszáma legfeljebb s. Válasszunk ki minél kevesebb halmazt, hogy már ezek lefedjék V-t.*

Tervezzünk egy mohó algoritmust erre a feladatra. Optimális-e algoritmusunk? Ha nem, akkor mondhatunk-e valamit a kiszámolt halmazszámnak és az optimumnak viszonyáról?

7. Feladat. ⋆ *Legyen $\mathcal{H}$ egy V véges halmaz részhalmazainak egy rendszere, amely tartalmazza az üreshalmazt és minden $E \in \mathcal{H}$-val együtt annak összes részhalmazát is. Adott egy $w : V \to \mathbb{R}_{++}$ súlyfüggvény, amely alapján V minden részhalmazához tartozik egy súly (elemei súlyának összege).*

Tervezzünk mohó algoritmust a legsúlyosabb $\mathcal{H}$-beli részhalmaz megkeresésére.

Biztosak lehetünk-e, hogy az output optimális?

Mohó algoritmusunkhoz jellemezzük azokat a halmazrendszereket, amelyek tetszőleges w súlyfüggvény esetén garantáltan optimális outpuytot adnak. (Ekvivalens módon jellemezzük azokat a halmazrendszereket, amelyek alkalmas w súlyfüggvénnyel félrevezethetjük a mohó algoritmusunkat.)

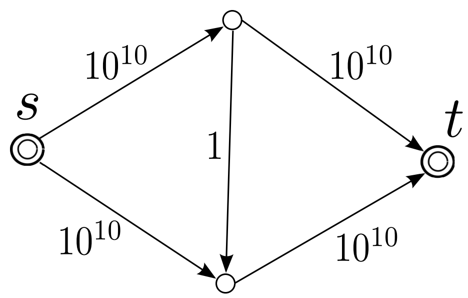
⋆ ⋆ ⋆

8. Feladat. *Adott egy tranzitív turnament, amelyben nincs irányított vágás. Igazoljuk, hogy van benne irányított Hamilton-kör.*

9. Feladat. *Adott egy P kerületű k-szög, $\mathcal{K}$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ nem szabályos k-szög. Adjunk egy eljárást, ami $\mathcal{K}$-ból egy $\widetilde{\mathcal{K}}$, másik P kerületű k-szöget ad, de $\widetilde{\mathcal{K}}$ területe nagyobb lesz mint $\mathcal{K}$-é.*

⋆ ⋆ ⋆

10. Feladat. *Legyen $\mathcal{H}$ az alábbi hálózat.*

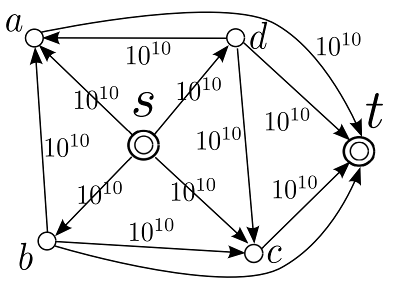


(o) Mi az optimális folyam $\mathcal{H}$-ban? Adjuk meg ennek értékét. Optimalitását igazoljuk egy vágással.

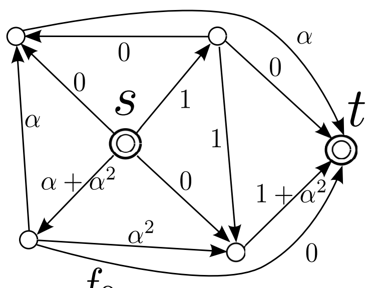
(i) Hány irányítatlan st út van $\overrightarrow{G}$-ben? Ezek közül hány javító út az $f \equiv 0$ folyamra?

(iii) Vegyünk egy három hosszú javító utat az azonosan 0 folyamra és javítsuk. Amíg találunk három hosszú javító utat addig amentén javítsunk tovább. Hány javítás után érjük el az optimális folyamot?

11. Feladat. *Legyen $\mathcal{H}$ az alábbi hálózat, benne egy f_0 folyammal (ahol α az $x^3 + x - 1 = 0$ egyenlet egyetlen valós gyöke).*



$\mathcal{H}$



f_0

Legyenek P_0 : scdabt,P_1 : scbadt, P_2 : sabcdt, P_3 : sadcbt (irányítatlan értelemben vett) st utak. f_0-t javítani kezdjük és definiáljuk az $(f_i)_{i=0}$ folyam sorozatot. Igazoljuk, hogy ha egy ideig f_i-re nézve $P_{i \pmod 4}$ javító út, és aszerinti javítást végzünk, akkor ez így is marad. Ezen javítási sorozat mellett mi lesz az é(f_i) sorozat? Mi lesz a limesze? Mi az optimális folyamérték?

12. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden $\mathcal{H} = (\overrightarrow{G}, s, t, c)$ hálózat esetén*

$$\max\{\acute{e}(f) : f \text{ folyam } \mathcal{H}\text{-ban}\} = \min\{c(\mathcal{V}) : \mathcal{V} \text{ vágás } \mathcal{H}\text{-ban}\}.$$

13. Feladat. *Egy hálózat minden élének egész a kapacitása. Minden élén egész anyagmennyiségű folyammal elindítjuk a Ford—Fulkerson-algoritmust. Igazoljuk hogy az algorutmus leáll és outputja olyan optimális folyam, amely*

Definíció. Egy hálózat unifom hálózat, ha minden élenek ugyanaz a kapacitása. Uniform hálózatok esetén 1 lesz mindig a közös kapacitásérték.

14. Feladat. *Egy uniform hálózat F élhalmazán egységnyi (kapacitásnyi) anyagmennyiséget, míg az F-be nem eső éleken nulla anyagmennyiséget folyatunk. Mikor kapunk így folyamot? Ha folyamot kapunk, akkor milyen értékű lesz ez?*

Definíció. Ha egy F élhalmazból az előző feladatban leírt módon folyamot nyerünk, akkor F-et kombinatorikus folyamnak nevezzük.

15. Feladat. *Egy uniform hálózat gráfjában vegyünk k darab éldiszjunkt forrás-nyelő irányított utat. Ezek élein egységnyi (kapacitásnyi) anyagmennyiséget, míg az utakra nem eső éleken nulla anyagmennyiséget folyatunk. Igazoljuk, hogy egy k értékű folyamot kapunk.*

Definíció. Az előző feladat alapján k éldiszjunkt forrás-nyelő irányított út élhalmaza kombinatorikus folyam. Az ilyeneket egyszerű kombinatorikus folyamoknak nevezzük.

16. Feladat. *Igazoljuk, hogy minden k értékű kombinatorikus folyam tartalmaz k értékű egyszerű kombinatorikus folyamot.*

17. Feladat. *Legyen $\overrightarrow{G}$ egy irányított gráf két különböző s, t csúccsal. Egy $\mathcal{V} = (S, T)$ vágás olyan S, T diszjunkt halmazok, hogy $s \in S$, $t \in T$. $\overrightarrow{E}(\mathcal{V})$ azon éleit tartalmazza G-nek, amely kiinduló csúcsa S-beli, végpontja T-beli. Igazoljuk, hogy*

$$\max\{k : \text{létezik } k \text{ darab éldiszjunkt } st \text{ irányított út}\} = \min\{|\overrightarrow{E}(\mathcal{V})| : \mathcal{V} \text{ vágás}\}.$$