Legrövidebb út problémája

Hajnal Péter

2021. tavasz

A kérdés alapváltozata

Adott

(i) G gráf,

(ii) $\ell : E(G) \to \mathbb{R}_{++}$ hosszfüggvény az éleken,

(iii) s, t két kitüntetett csúcs.

A kérdés

Határozzuk meg s és t távolságát.

Emlékeztető

- G gráf: $V = V(G)$ véges csúcshalmaz, $E = E(G)$ véges élhalmaz, illeszkedési reláció, amely minden élhez két végpontot rendel.

- uv-séta G-ben:

$$\mathcal{S} : u = w_0, e_1, w_1, e_2, \ldots, w_{L-1}, e_L, w_L = v,$$

ahol $w_i \in V$ $(i = 0, 1, \ldots, L)$, $e_i \in E$ $(i = 1, \ldots, L)$, e_i két végpontja w_{i-1} és w_i $(i = 1, \ldots, L)$.

- Az $\mathcal{S}$ uv-séta gráfelméleti hossza L.

- Az $\mathcal{S}$ uv-séta súlyozott hossza

$$\sum_{i=1}^{L} \ell(e_i).$$

Emlékeztető (folytatás)

- u és v távolsága

(i)

$$\min\{\ell(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \text{ egy } uv\text{-séta}\}.$$

(ii)

Minimalizáljuk	$\ell(\mathcal{S})$-t
Feltéve, hogy	$\mathcal{S}$ egy uv séta

optimalizálási feladat p^* optimális értéke.

Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy G összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor $p^* \in \mathbb{R}_{++}$
- Egy gráfban lehetnek hurokélek, párhuzamos élpárok. Feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.
- Egy $\mathcal{S}$ séta **út**, ha csúcsai különbözőek.
- Ha gráfunkban van $\mathcal{S}$ uv-séta, akkor van $\mathcal{S}_0$ uv-út is Sőt, egy ilyen út megkapható $\mathcal{S}$ „kiritkításával". Így $\ell(\mathcal{S}_0) \leq \ell(\mathcal{S})$.
- Elég az st-utak között keresni az optimálisat.

A kérdés irányított változata

Adott

(i) $\overrightarrow{G}$ irányított gráf,

(ii) $\ell : E(\overrightarrow{G}) \to \mathbb{R}_{++}$ hosszfüggvény az éleken,

(iii) s, t két kitüntetett csúcs.

A kérdés

Határozzuk meg s és t távolságát.

Emlékeztető

- G irányított gráf: $V = V(\overrightarrow{G})$ véges csúcshalmaz, $E = E(\overrightarrow{G})$ véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel. $vK\overrightarrow{e}$ jelentése: a v csúcsból kifut az $\overrightarrow{e}$ él. $vB\overrightarrow{e}$ jelentése: a v csúcsba befut az $\overrightarrow{e}$ él.
- $\overrightarrow{uv}$-séta $\overrightarrow{G}$-ben:

$$\overrightarrow{\mathcal{S}} : u = w_0, \overrightarrow{e}_1, w_1, \overrightarrow{e}_2, \dots, w_{L-1}, \overrightarrow{e}_L, w_L = v,$$

ahol $w_i \in V$ $(i = 0, 1, \dots, L)$, $\overrightarrow{e}_i \in E$ $(i = 1, \dots, L)$, e_i kifut w_{i-1}-ből és befut w_i-be $(i = 1, \dots, L)$.

- Az $\overrightarrow{\mathcal{S}}$ $\overrightarrow{uv}$-séta gráfelméleti hossza L.
- Az $\overrightarrow{\mathcal{S}}$ $\overrightarrow{uv}$-séta súlyozott hossza

$$\sum_{i=1}^{L} \ell(\overrightarrow{e}_i).$$

Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy nincs hurokél. Feltesszük, hogy u-ból v-be legfeljebb egy él vezet. Azaz feltesszük, hogy $\overrightarrow{G}$ egyszerű.

- Feltesszük, hogy minden csúcs elérhető s-ből irányított sétával/úttal. $p^* \in \mathbb{R}_+$

Redukció

Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- G esetén legyen $\overleftrightarrow{G}$ a következő irányított gráf:
  (a) csúcsai G csúcsai,
  (b) G minden $e = uv$ élére bevezetünk egy $\overrightarrow{e'} = \overrightarrow{uv}$ és $\overrightarrow{e''} = \overrightarrow{vu}$ élt.
  (c) Az e-hez bevezetett mindkét él hossza $\ell(e)$, azaz $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overrightarrow{e''}) = \ell(e)$.
- $\overleftrightarrow{G}$ gráf $\overrightarrow{st}$-útjai párbaállíthatók az eredeti G gráf st útjaival.
- $\overleftrightarrow{G}$ gráf egy $\overrightarrow{st}$-útjának hossza megegyezik G gráfbeli párjának (egy st-út) hosszával.
- (G, ℓ, s, t) megoldása: $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$ „felépítése” $\rightarrow$ $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$ megoldása, azaz $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\text{opt}}$ kiszámítása $\rightarrow$ $\mathcal{P}_{\text{opt}}$ párjának meghatározása G-ben: $\mathcal{P}_{\text{opt}}$, optimális megoldása a (G, ℓ, s, t) feladatnak.

Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámolásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg. $(\overrightarrow{G}, s)$ lesz az input. Meghatározzuk azon pontok S halmazát, amelyekbe vezet s-ből induló irányított út.
- Ezek halmaza $S = S_0 \dot\cup S_1 \dot\cup \ldots \dot\cup S_L$ lesz, ahol S_i pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyek gráfelméleti távolsága s-től i.
- L jelöli az s-ből induló leghosszabb út hosszát.
- S és $\overline{S} = V(G) - S$ között az összes él $\overline{S}$-ből indul és S-be vezet. Ez bizonyítja, hogy s-ből irányított út nem léphet ki S-ből.

Szélességi keresés

Szélességi keresés

(I) // Inicializálás // Legyen $S_0 = \{s\}$.

(C) // Ciklus // Amíg $S_i \neq \emptyset$

$$S_{i+1} = \{x \in V(G) - (S_0 \cup \ldots \cup S_i) : \text{ van olyan } \sigma \in S_i, \text{ hogy } \overrightarrow{\sigma x} \in E(G)\}$$

és $i \leftarrow i + 1$.

Tétel

A fenti algoritmus outputja korrekt.

(i) Ha $x \in S_i$, akkor s és x gráfelméleti távolsága i.

(ii) Ha $x \notin S$, akkor nem létezik irányított út s-ből x-be.

Szélességi kereső fa

A fenti algoritmusnak vegyük a következő változatát:

• Ha a (C) ciklusban egy x csúcs a S_{i+1} halmazba sorolódik, akkor az algoritmusnak találnia kell egy $\sigma \in S_i$ csúcsot és egy $\overrightarrow{\sigma x}$ élt. A „bizonyító” élt egy F élhalmazba gyűjtsük össze.

Tétel

A $G|_S$ gráfban F egy $\mathcal{F}$ feszítőfa élhalmaza. $\mathcal{F}$ az s csúccsal egy gyökeres fa, amelyben minden él s-től „elfele” vezet.

Minden $x \in S$ csúcsra pontosan egy $\mathcal{F}$-beli $\overrightarrow{sx}$-út van. Ez az út egy legrövidebb (gráfelméleti értelemben) út, amely s-ből x-be vezet.

Szünet

Algebraizálás: az ötlet

Adott $(\overrightarrow{G}, \ell, s, t)$. Keresünk egy legrövidebb st-sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

Jelölés

$$x_e = \text{ hányszor haladunk át az } e \text{ élen}$$

Feltételek:

- Az s-be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel kevesebb mint s-ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.
- A t-be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel több mint t-ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.
- A v-be ($v \in V - \{s, t\}$) befutó éleken való áthaladások össz száma ugyanannyi mint az v-ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.

A lehetséges megoldások: séták élhalmaza, illetve séták élhalmaza felesleges ciklusokkal.

Algebraizálás: képletek

Feltételek:

(F_s)

$$\sum_{e:sBe} x_e - \sum_{e:sKe} x_e = -1,$$

(F_t)

$$\sum_{e:tBe} x_e - \sum_{e:tKe} x_e = 1,$$

(F_v) minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsra

$$\sum_{e:vBe} x_e - \sum_{e:vKe} x_e = 0,$$

$(E + I)$

$$x \succeq 0, \qquad x \in \mathbb{Z}.$$

Algebraizálás: mátrix alak

Definíció

$$I\ell\ell_{\overrightarrow{G}} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & e & \end{array} \\ v & \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \begin{cases} 1 & \text{ha } vBe \\ -1 & \text{ha } vKe \\ 0 & \text{különben} \end{cases} & \cdots \\ & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \in \mathbb{R}^{V\times E},\ b = \begin{array}{c} s \\ t \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e_t -$$

- $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ minden oszlopában egy darab 1-es és egy darab -1-es van.

Algebraizálás: egészértékű LP/IP

Ezek után készen állunk arra, hogy felírjuk a probléma formális alakját:

Minimalizáljuk	$\ell^{\mathsf{T}}x$-t
Feltéve, hogy	$I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}x = b$
	$x \succeq 0$
	$x \in \mathbb{Z}^V$,

ahol $\ell \in \mathbb{R}^V$ az élhosszakat tartalmazó vektor.

• Az utolsó sortól/feltételtől eltekintve egy LP feladatot látunk.

• Az utolsó sor a keresett x vektor koordinátáinak értékeiről követeli meg, hogy egészek legyenek.

• Ha egy lineáris célfüggvényt optimalizálunk, feltétel rendszerünk LP feltételek mellett a megoldás vektor egész koordinátájúsága, akkor a feladatot *egészértékű programozásnak* nevezzük (angolul: integer programming, röviden IP).

IP feladat LP relaxációja

Elnevezés

Ha egy IP feladatban elhagyjuk a változók egész koordinátájúságának feltételét, akkor egy LP feladatot kapunk, amit az eredeti IP feladat *LP relaxációjának* neveünk.

A legrövidebb út probléma LP relaxációja

Minimalizáljuk	$\ell^{\mathsf{T}} x$-t
Feltéve, hogy	$I\ell\ell_{\vec{G}} x = b$
	$x \succeq 0$

A főtétel

Tétel

Legyen R egy tetszőleges négyzetes részmátrixa az $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ mátrixnak. Ekkor $\det R \in \{-1, 0, 1\}$

Definíció

Egy M mátrix totálisan unimoduláris (TU), ha tetszőleges négyzetes részmátrixának determinánsa $\{-1, 0, 1\}$-beli.

Tétel

$I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ TU tulajdonságú.

A főtétel következménye

Következmény

Ha a korábbi

Minimalizáljuk	$\ell^{\mathsf{T}} x$-t
Feltéve, hogy	$I\ell\ell_{\vec{G}} x = b$
	$x \succeq 0$

LP relaxációt szimplex módszerrel megoldjuk, akkor a kapott optimális bázismegoldás automatikusan *egész* lesz.

A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmátrixa r rangú. Tartsunk meg r lineárisan független egyenlőség feltételt. Azaz az elhagyott feltételek a meghagyottak következményei. A teljes sorrangú mátrix legyen A, a megmaradt konstansok vektora legyen b_0.

- A szimplex módszer garantáltan egy optimális bázismegoldással áll le. Legyen B a bázisváltozók halmaza. Vele együtt K a bázison kívüli változók halmaza.

- Legyen A_B, A_N az A mátrix azon résznmátrixa, amelyet indexei által leírt oszlopok alkotnak. Így A_B egy $r \times r$ méretű mátrix. x_B, illetve x_N a bázisváltozók, illetve bázison kívüli változók vektora.

- Az utolsó szótárat felírhatjuk. Az $Ax = b_0$ feltételt balról A_B^{-1}-gyel szrozhatjuk:

$$x_B + A_B^{-1}A_K x_K = A_B^{-1}A_B x_B + A_B^{-1}A_K x_K = A_B^{-1} \cdot Ax = A_B^{-1} \cdot b_0.$$

Bizonyítás (folytatás)

- Tehát az utolsó szótár

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0 - A_B^{-1} A_K x_K.$$

- Az optimális bázismegoldás

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0, \qquad x_K = 0.$$

- A_B az $I\ell\ell_{\vec{G}}$ TU tulajdonságú mátrix egy nem elfajuló négyzetes részmátrixa.
- Az főtétel alapján $\det A_B \in \{-1, 1\}$.
- A Cramer-szabály alapján A_B^{-1} egy egész számokból álló mátrix.
- Készen vagyunk. A

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0, \qquad x_K = 0.$$

képlet egy egész vektort ír le.

$Ill_{\overrightarrow{G}}$ sor-független részmátrixa

Észrevétel

$I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ sorainak összege $0 \in \mathbb{R}^V$. Azaz sorai nem függetlenek.

Az észrevétel alapján a szimplex módszer feltételei nem teljesülnek.

Lemma

$I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ rangja $|V| - 1$.

Mivel a sorok közt felismert lineáris összefüggésben mindegyik sor nemnulla együtthatóval szerepel, ezért $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ bármelyik sorát elhagyva teljes sorrangú mátrixot kapunk.

Jelölés

$I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}^{-s}$ az $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ mátrixból az s csúcs elhagyásával kapott mátrixot jelöli. $b^{-s} = e_t$ azt a vektort jelöli, amelyet b-ből kapunk az s-nek megfelelő komponens elhagyásával.

Lemma bizonyítása

- Feltettük, hogy $\overrightarrow{G}$-ben minden csúcs elérhető irányított úttal s-ből kiindulva.
- Így az s-ből indított szélességi keresés az összes csúcsot eléri. A szélességi kereső fa minden csúcsot tartalmaz. A szélességi kereső fának $|V|-1$ éle van.
- Tegyük fel, hogy a szélességi kereső fába az s-től különböző csúcsok és élek v_1, e_1, v_2, e_2, $\ldots$, $v_{|V|-1}$, $e_{|V|-1}$ sorrendben kerülnek be.

Bizonyítás (folytatás)

- Ekkor $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$-nek

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \dots & e_{|V|-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{|V|-1} \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & ? & \dots & ? \\ 0 & 1 & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \end{array} \in \mathbb{R}^{(V-\{s\})\times(V-\{s\})}.$$

részmátrixa.

- Az algoritmus alapján ez egy felső trianguláris mátrix 1-esekkel a főátlón.

- Tehát $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ rangja legalább $|V|-1$. Tudjuk, hogy $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}}$ rangja kisebb mint $|V|$. A Lemma állítása adódott.

A főtétel bizonyítása

- Legyen R egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen R egy $k \times k$ méretű mátrix
- k-ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$ esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$ eset:
  1. *eset: R egyik oszlopában nincs nemnulla elem.*
     Lineáris algebra alapján $\det R = 0$.
  2. *eset: R egyik oszlopában egyetlen nemnulla elem van.*
     Eszerint az oszlop szerint kifejtve $\det R$-et és alkalmazva az indukciós feltevést adódik az állítás.
  3. *eset: R mindegyik oszlopában két nemnulla elem van.*
     Az R-beli sorok összege 0, lineáris algebra alapján $\det R = 0$.

Az LP algoritmus

LP algoritmus a legrövidebb út problémára

(1) Írjuk fel a legrövidebb út IP formalizálásának LP relaxációját.

(2) Hagyjuk el az s csúcsra vonatkozó egyenletet, hogy az LP probléma mátrixa teljes sorrangú legyen.

(3) Futassuk a szimplex módszert. Szükségszerű a szimplex módszer sikeresen álljon le. Az optimális bázismegoldás garantáltan egész koordinátájú lesz (főtétel következménye). Az optimális st-séta egy út, így a bázismegoldás szükségszerűen 0-1 koordinátájú. Azaz szimplex módszer outputja egy élhalmaz karakterisztikus vektora.

(4) A szimplex módszer outputja által leírt élhalmazból „kiolvassuk" az optimális st utat.

Szünet

Az alapötlet

- Egy általánosabb problémát vizsgálunk.
- Legyen $s \in S \subset V(\overrightarrow{G})$ egy csúcshalmaz. Erre az S csúcshalmazra a következő problémát tűzzük ki
  (i) Ha $v \in S$, akkor határozzuk meg a legrövidebb $\overrightarrow{sv}$ utat S-en belül.
  (ii) Ha $v \notin S$, akkor határozzuk meg a legrövidebb $\overrightarrow{sv}$ utat, amely S-en belül halad, kivéve az utolsó lépését (ami persze v-be, S-en kívülre lép).
- A megoldást úgy képzelhetjük, hogy minden csúcshoz egy „címkét" gondolunk, ami a kérdezett információt tartalmazza.
- $2^{|V|-1}$ feladatot tűztünk ki, az egyetlen kiinduló kérdés helyett ($S = V(\overrightarrow{G})$).

Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.) Csupán jól kiválasztott $|V|$ darab feladatot oldunk meg.
- A kiinduló feladat $S = \{s\}$ lesz, ami nagyon egyszerű. A megoldásra mint egy „kiinduló címkézés” gondolunk.
- A megoldás lényege, hogyan tűzzük ki az új feladatot és hogyan számoljuk ki megoldását.
- Mindig növelni fogjuk az aktuális S halmazt. Az új feladat megoldására mint „a címkézés update-eléseként” hivatkozunk.
- A növekedés során az S-beli címkék a globális legrövidebb út hosszát adják meg.
- Az $S = V(\overrightarrow{G})$ esetén megoldjuk a legrövidebb út problémáját.

Dijkstra-algoritmus

Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás
Legyen $S = \{s\}$, $c(s) = 0$.
$v \notin S$, $\overrightarrow{sv} \in E$ esetén $c(v) = \ell(\overrightarrow{sv})$.
$v \notin S$, $\overrightarrow{sv} \notin E$ esetén $c(v) = \infty$.

(B) // Bővítés
Legyen $m \notin S$ azon (egyik) csúcs, amely címkéje a legkisebb az S halmazon kívül.
$S \leftarrow S \cup \{m\}$.

(U) // Update
Csak azon $n \notin S$ csúcsok címkéje változhat, amelyekre $\overrightarrow{mn} \in E$:

$$c_{\text{új}}(n) = \min\{c_{\text{régi}}(n), c(m) + \ell(\overrightarrow{mn})\}.$$

Vissza a (B) lépéshez.

Az algoritmus helyessége

Tétel

A Dikstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

(i) S-beli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát (amely optimum S-en belül is megvalósítható)

(ii) S-en kívüli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát azon utak között, amelyek az utolsó csúcs kivételével S-en belül haladnak.

- $|S|$-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $|S| = 1$ eset nyilvánvaló.
- Egy update után csak a következő két állítást kell belátni:

(i) m címkéje korrekt,

(ii) $x \notin S$ címkéje korrekt.

Bizonyítás

Kezdeti észrevétel

Minden s-ből induló $s \in X$-en kívülre vezető utat „szétszedhetünk” három részre az alábbi módon:

X-ben haladó kezdeti rész „$+$” kilépés X-ből „$+$” további rész.

$\star$

m: $m \notin S_{\text{régi}}$. Így tetszőleges $\overrightarrow{sm}$-utat „szétszedhetjük” a fenti módon. $S_{\text{régi}}$-ben haladó rész „$+$” kilépés $S_{\text{régi}}$-ből „$+$” utolsó rész.

1. eset: Amikor az utolsó rész nemüres, akkor a megfelelő út hossza nagyobb mint m címkéje (ℓ pozitív értékű és m-et speciális módon választottuk).

2. eset: Amikor az utolsó rész üres, akkor a megfelelő címke az indukciós feltevés miatt korrekt.

Bizonyítás (folytatás)

$x \notin S$: Tetszőleges $\overrightarrow{sx}$-utat „szétszedhetjük” a fenti módon. Csak azok az utak érdekelnek, amely utolsó része üres. Ismét két esetet vizsgálunk.

1. eset: A kilépés nem m-ből történik. Ekkor $c_{\text{régi}}(x)$ az indukciós lépés alapján becsli a hosszat.

2. eset: A kilépés m-ből történik. Ekkor $c(m) + \ell(\overrightarrow{mx})$ becsli a hosszat.

Az update-elt címke optimális értéket ad.

Az algoritmus elemzése

- Nyilván legfeljebb $|V|-1$-szer végzünk el bővítő lépést.

- Nyilván legfeljebb $|E|$-szer végzünk számításokat, amik címke átíráshoz vezethetnek.

- Az algoritmus lépésigénye

$$\mathcal{O}(|V|\cdot|E|).$$

- Van „okosabb” algoritmus is.

Végső megjegyzések

- Minden véges címke mögött lehet egy él, amely azt jelenti, hogy „hogyan jutottunk ide”.

- Ha egy update megváltoztatja a címke értékét, akkor a jelző élt is megváltoztatjuk az algoritmus logikája szerint.

- Az algoritmus végén a szélességi kereső fa egy súlyozott változatát is megkapjuk.

Szünet

Az LP elmélet alkalmazása

Dualizáljuk a legrövidebb út problémáját leíró LP relaxációt (P)/(D):

Minimalizáljuk $\ell^{\mathsf{T}} x$-t
Feltéve, hogy $I\ell\ell_{\vec{G}} x = e_t - e_s$
$x \succeq 0$

Maximalizáljuk$\mu_t - \mu_s$-t
Feltéve, hogy $\mu_v - \mu_u \leq \ell_{\overrightarrow{uv}}$

• Mind a primál, mind a duál feladatnak könnyen található lehetséges megoldása (a duál esetben $\mu = 0 \in \mathbb{R}^V$ egy lehetséges megoldás). Az optimális megoldások is megtalálhatók szimplex módszerrel.

• Mi más utat választunk. Az LP/szimplex algoritmus tanulmányozása során tanult tudásunkat alkalmazzuk.

• Ha a kezünkben levő duális megoldás mellé lenne egy primál lehetséges megoldás, amely teljesítené a komplementáris lazasági tulajdonságot, akkor meg lenne az optimumunk.

Az LP elmélet alkalmazása II

- Egy $\mu_0 = (\mu_u)_{u \in V} \in \mathbb{R}^V$ duális lehetséges megoldáshoz komplementáris lazasági tulajdonsággal bíró primál lehetséges megoldás keresése vezet el a következő jelöléshez.

Jelölés: Laza és éles élek (μ duális megoldásra)

$L_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u < \ell_e\}$, $S_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u = \ell_e\}$.

- Ha $e \in L$, akkor $x_e = 0$-t szeretnénk, ha $e \in S$, akkor $x_e > 0$-t megengedjük. Persze ilyen primális megoldás keresése nem szükségszerűen sikeres.
- Amit tehetünk felírjuk a primál feladat egy megfelelő változtatását, és persze dualizálunk $(\widetilde{P}_{\mu_0})/(\widetilde{D}_{\mu_0})$:

Minimalizáljuk $\sum_{e \in L} x_e$-t Feltéve, hogy $I\ell\ell_{\overrightarrow{G}} x = e_t - e_s$ $x \succeq 0$	Maximalizáljuk $\mu_t - \mu_s$-t Feltéve, hogy $\mu_v - \mu_u \leq 1$ $\quad \overrightarrow{vu} \in L$ $\mu_v - \mu_u \leq 0$ $\quad \overrightarrow{vu} \in S$

Az LP elmélet alkalmazása III

• Vegyük észre, hogy a módosított primál és a duális már csak rejtve (az L és S élhalmazokon keresztül) tartalmazza a súlyozást. Alapból egy súlyozatlan feladattal állunk szemben.

• Az új dualizált feladatnak ismét könnyen kereshetünk egy lehetséges megoldását.
A lehetséges megoldás megadása egy eset szétválasztáson alapul.
Az eset szétválasztás a szélességi keresésen alapulhat:

(i) Találunk éles élekből álló $\overrightarrow{st}$ utat.

(ii) Találunk egy $\mathcal{S} = \{x \in V : \text{létezik } \overrightarrow{sx} \text{ éles élekből álló út}\} \ni s$, $\mathcal{T} = V(G) - \mathcal{S} \ni t$ vágást, amely összes $\overrightarrow{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ éle laza.

Az (i) eset

- A megtalált út legyen P.

- Az út éles élei mentén összeadva a $\mu_{v_{i+1}} - \mu_{v_i} \leq 0$ egyenlőtlenségeket (az út élei élesek), kapjuk $\mu_t - \mu_s \leq 0$.

- Mivel a 0-vektor esetén a célfüggvény 0, ezért ez egy optimális duális megoldás $(\widetilde{D}_\mu)$-re: $d^* = 0$.

- A dualitás tétel alapján $(\widetilde{P}_\mu)$-re is $p^* = 0$.

- Azaz a komplementáris lazaság tulajdonság teljesül egy optimális $(\widetilde{P}_\mu)$ primál megoldás, ami egy lehetséges (P) megoldás és a kiinduló duál (D) μ megoldására.

- Megvan a primál optimum.

Az (ii) eset

- A megtalált $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ vágást a duális megoldás javítására használjuk.
- $(\widetilde{D}_\mu)$ egy lehetséges megoldása: $\mathcal{S}$ csúcsain legyen 0 a súly, $\mathcal{T}$ csúcsain pedig legyen 1 a súly. Ezt jelöljük $\mu_{\text{módosít}}$-tal

Észrevétel

Kis pozitív δ esetén $\mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$ is megoldása marad (D)-nek.

- (D) minden feltétel egy felső becslés egy él végpontján lévő komponens és kezdőpontján lévő komponens különbségére.

Ez a különbség egyetlen esetben nő (amikor is aggódnunk kell a felső becslés teljesülésén): $\mathcal{S}$-ből $\mathcal{T}$-be menő élek esetén.

Ezek az élek nem élesek. Alkalmasan kicsi δ esetén a duális megoldás lehetséges marad.

Mi is történt?

Észrevétel

A $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$ módosítás után

(i) $\mu_t - \mu_s$ nő,

(ii) Legalább egy $\overrightarrow{\mathcal{S}\mathcal{T}}$ él élessé válik, az $\mathcal{S}$ halmaz nőni fog.

- Éppen a Dijkstra algoritmust írtuk le.
- A két tárgyalás S, illetve $\mathcal{S}$ halmaza ugyanaz.
- A módosított (kombinatorikus) feladatok duálisainak megoldása mindig 0/1 megoldás lesz. Sőt $\mu_s = 0$.
- Az eredeti (D) duális megoldása S-en a Dijkstra-címkézést adja.

Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható. Tegyük fel, hogy

(o) egy súlyozott kombinatrikus problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat: (P).

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

(i) Dualizálunk($\rightarrow (D)$).

(ii) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ($\rightarrow \mu$).

(iii) A primál oldalon „elfelejtjük" az eredeti súlyozott optimalizálási feladatot. A primál feltételek mellé felvesszük a (μ-re alapozva) lazán teljesülő duál feltételek változóink 0 mivoltát.

(iii)" Ezzel egy kielégíthetőségi problémához jutunk. Ezt megfogalmazzuk mint egy LP feladat($\rightarrow (\widetilde{P}_\mu)$).

(iv) Ez dualizáljuk($\rightarrow (\widetilde{D}_\mu)$).

folytatás

(v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást($\rightarrow \mu_{\text{módosít}}$). Ez sokszor egy súlyozatlan kombinatorikus feladat.

(vi$_1$) A duális megoldás esetleg azt adja, hogy a mögöttes primál/duál pár teljesíti a komplementáris lazasági tualjdonságot. STOP.

(vi$_2$) A duális megoldás esetleg lehetőséget ad arra, hogy a mögöttes duális μ-t módosítjuk $\mu_{\text{módosít}}$ segítségével, hogy egy „jobb” μ-t kapjunk. VISSZA (iii)-hez.

Primál-duál megoldási séma

A fenti séma alapján kidolgozott algoritmusokat *primál-duál algoritmusoknak* nevezzük.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!