Alapok

Hajnal Péter

2021. tavasz

A kurzus témája

Az operációkutatás tárgya optimalizálási/szélsőérték problémák vizsgálata.

Az operáció szót mint katonai hadműveletet használják. Ennek kutatása azt jelenti, hogy szeretnénk úgy végrehajtani, hogy az hatékony legyen.

A kurzus egy alternatív elnevezése „Bevezetés az optimalizálásba" lehetne.

A kurzus egy jelentős része egy rendkívül fontos optinalizálási kérdéssel foglalkozik: lineáris függvényt minimalizálunk lineáris feltételek mellett. Később minden pontosan le lesz írva. Ezen probléma neve: Lineáris programozás. A programozás ismét egy katonai szakkifejezés: programozni= menedzselni.

A kurzus teljesítéséhez nem kell programozói tudás. De a kurzsus nagy részében központi szerepet kapnak az algoritmusok.

A kurzus menete

A kurzus három fő részből áll.

(1) Lineáris egyenlőtlenségrendszerek vizsgálata. A lineáris egyenletrendszerek vizsgálata a lineáris algebra kurzusok része. Ezt általánosítjuk. Egy klasszikus matematikai része a kurzusnak.

(2) Lineáris programozás. A viszgálat célja a szimplex algoritmus kidolgozása és tárgyalása. A kurzus ezen részében a matematika és algoritmuselmélet keveredik.

(3) Konkrét optimalizálási eljárások. A kurzus algoritmuselméleti része. Ez is tiszta matematika, de nem annyira klasszikus témakör.

A főszereplő: lineáris függvény

Definíció

Egy n-változós f függvény

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

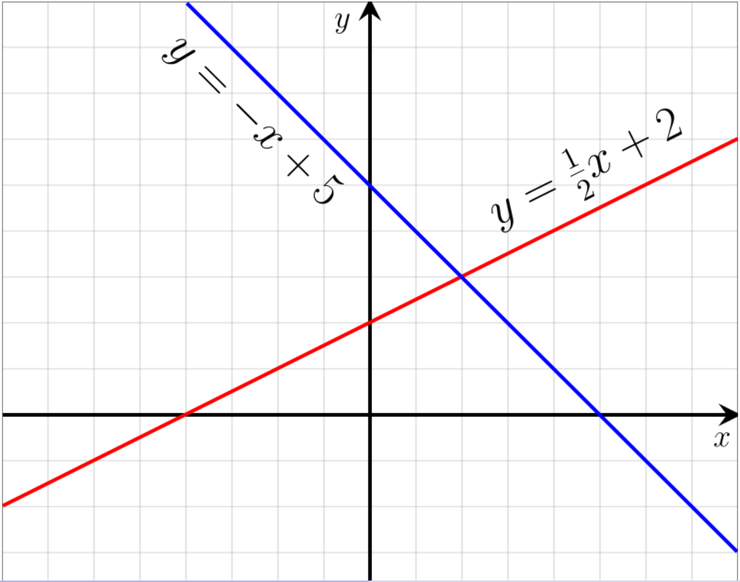
lineáris, ha alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta.$$

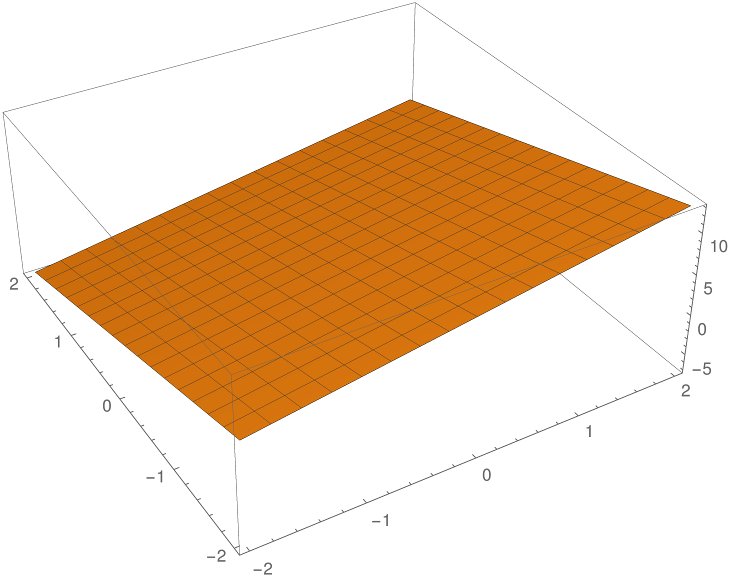
Lineáris függvények

$a(x) = 2x - 3,$
$b(x, y) = 2x - 3y + 4,$
$c(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 2x_1 - 3x_2 - 4x_5 + 4x_7 - 101,$
$\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - x_1 + x_2 - x_3 + \ldots + (-1)^n x_n,$
$\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i.$

Lineáris függvények: példa



Matematica példa Plot3D[2 x - 3 y + 3, x, -2, 2, y, -2, 2]



Lineáris függvények mint polinomok

Polinom nyelvezet

ℓ lineáris függvény egy legfeljebb első fokú, több-határozatlanú polinom: $\ell \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

α_i számok: együtthatók; β szám: konstans tag.

Ha $\beta = 0$, akkor a polinom/lineáris függvény homogén.

Vektorterek, lineáris leképezések

Vektorterek nyelvezete

Legyen U és V két $\mathbb{F}$ feletti vektortér.

- $\varphi : U \to V$ leképezés lineáris tulajdonságú, ha minden $u, v \in U$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ esetén $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$.
- $\varphi : U \to V$ leképezés affin tulajdonságú, ha minden $u, v \in U$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{F} : \lambda + \mu = 1$ esetén $\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$.

Párhuzamos nyelvezetek

A lineáris jelző kétféle értelemben használt:

	0 képe 0	0 képe tetszőleges
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$	homogén lineáris függvény	lineáris függvény
$\varphi : U \to V$	lineáris leképezés	affin leképezés

A kurzus az első sor terminológiáját használja.

Szünet

Jelölések

Jelölések

$\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_+$ a nemnegatív valós számok halmaza.

$\mathbb{R}_{++}$ a pozitív valós számok halmaza.

$\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza.

$\mathbb{Z}_+$ a nemnegatív egész számok halmaza, a természetes számok halmaza $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

$\mathbb{Z}_{++}$ a pozitív egész számok halmaza, $\mathbb{N}_+$.

Vektorok

• $\mathbb{R}^n$ a valós szám n-esek/VEKTOROK halmaza. $v \in \mathbb{R}^n$ esetén az i-edik szám az i-edik koordináta/komponens. Jelölése v_i ($v_i \in \mathbb{R}$).

• $v \in \mathbb{R}^n$ leírása esetén a koordinátákat felsoroljuk és a kapott számokat zárójelbe rakjuk.

• A koordináták egymásutáni leírása történhet egymás mellé, vagy egymás alá. Az első esetben **sorvektorról**, a második esetben **oszlopvektorról** beszélünk.

Példa

$$(1,0,2,4,-2),\ \begin{pmatrix}3\\2\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\ (11,0,3,-2),\ \begin{pmatrix}2\\2\\0\\11\end{pmatrix},\ (0,2,3,2),\ \begin{pmatrix}53\\22\\-2\\10\\32\end{pmatrix}.$$

Vektorok (folytatás)

- $v \in \mathbb{R}^d$ esetén azt mondjuk, hogy v egy d-dimenziós vektor.
- $0 \in \mathbb{R}^n$ az n dimenziós nullvektor, azaz az a vektor, amelynek mind az n koordinátája 0.
- Ebben a kurzusban — ha másképp nem hangsúlyozzuk — minden vetor OSZLOPVEKTOR lesz.

Példa

$0 \in \mathbb{R}^5$ esetén a vektor, amiről beszélünk $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mátrixok

- $\mathbb{R}^{n\times m}$ a valós, $n \times m$ méretű számtáblázatok/MÁTRIXOK halmaza. Az $n \times m$ méretű táblázat n sorból, m oszlopból áll.
- Egy $v \in \mathbb{R}^n$ vektor felfogható egy $1 \times n$-es mátrixnak, sorvektornak, illetve egy $n \times 1$-es mátrixnak, oszlopvektornak.

Terminológia

- Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ felfogható m oszlopvektor összességének:

$$M = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \dots & o_m \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

ahol $o_i \in \mathbb{R}^n$.

- Egy $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ felfogható n sorvektor összességének:

$$M = \begin{pmatrix} — & s_1^T & — \\ — & s_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & s_n^T & — \end{pmatrix}$$

ahol $s_i \in \mathbb{R}^m$.

Mátrixok szorzása

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ két mátrix

(o) Ez a két mátrix akkor és csak akkor szorozható össze, ha $k = \ell$.

(i) Ekkor a szorzat mátrix $n \times m$ méretű lesz, azaz $AB \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

(ii) Továbbá az i-edik sor j-edik eleme

$$(AB)_{i,j} = \sum_{s=1}^{\ell} A_{i,s} B_{s,j}.$$

Mátrixok szorzása: I. alternatív szemlélet

- Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ két métrix, amelyek összeszorozhatók. Az első tényezőt bontsuk sorokra: $s_i \in \mathbb{R}^{\ell}$, a második tényezőt bontsuk oszkopokra: $o_i \in \mathbb{R}^{\ell}$.

$$A = \begin{pmatrix} — & s_1^T & — \\ — & s_2^T & — \\ & \vdots & \\ — & s_n^T & — \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \dots & o_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

- Ekkor $(AB)_{i,j} = s_i^T o_j$, azaz a szorzatmátrixban az i-edik sor j-edik elemét úgy kapjuk meg, ha az A mátrix i-edik sorát skalárisan szorozzuk a B mátrix j-edik oszlopával.
- A szorzatmátrix egy szorzótábla a két tényezőből nyert vektorrendszerekre a skalárszorzatra nézve.

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet

- Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindktettőt sorvektorokra. A esetében ezek legyenek $\alpha^T, \beta^T, \ldots$, míg B esetén legyenek $s_i \in \mathbb{R}^m$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_\ell \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\ell \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_\ell \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \text{---} & s_1^T & \text{---} \\ \text{---} & s_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & s_\ell^T & \text{---} \end{pmatrix}$$

- Kezdjük el a definíció szerinti mátrixszorzást:

$$(AB)_{1,1} = \alpha_1(s_1^T)_1 + \alpha_2(s_2^T)_1 + \ldots + \alpha_k(s_k^T)_1$$
$$(AB)_{1,2} = \alpha_1(s_1^T)_2 + \alpha_2(s_2^T)_2 + \ldots + \alpha_k(s_k^T)_2$$
$$\vdots$$
$$(AB)_{1,\ell} = \alpha_1(s_1^T)_\ell + \alpha_2(s_2^T)_\ell + \ldots + \alpha_k(s_k^T)_\ell$$

Mátrixok szorzása: II. alternatív szemlélet (folytatás)

- Azaz a szorzatmátrix első sora

$$\alpha_1 s_1^T + \ldots + \alpha_k s_k^T.$$

- Összegezve

$$AB = \begin{pmatrix} — & \alpha_1 s_1^T + \ldots + \alpha_k s_k^T & — \\ — & \beta_1 s_1^T + \ldots + \beta_k s_k^T & — \\ & \vdots & \\ — & \omega_1 s_1^T + \ldots + \omega_k s_k^T & — \end{pmatrix}$$

- Speciálisan a szorzat mátrix mindegyik sora az $s_1^T, \ldots, s_k^T$ vektorok (a második tényezőmátrix sorainak) egy-egy lineáris kombinációja.

Mátrixok szorzása: III. alternatív szemlélet

• Vegyük $A \in \mathbb{R}^{n\times\ell}$ és $B \in \mathbb{R}^{\ell\times m}$ mátrixokat és bontsuk szét mindkettőt oszlopvektorokra. A esetében ezek legyenek $o_i \in \mathbb{R}^n$, míg B esetén legyenek $\alpha^T, \beta^T, \ldots$:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ o_1 & o_2 & \ldots & o_k \\ | & | & & | \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots & \omega_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_k & \beta_k & \ldots & \omega_k \end{pmatrix}$$

Mátrixok szorzása: III. alternatív szemlélet (folytatás)

Az előzőekhez hasonlóan a szorzat mátrix

$$AB = \begin{pmatrix} \Big| & \Big| & & \Big| \\ \alpha_1 o_1 + \alpha_2 o_2 + \ldots + \alpha_k o_k & \beta_1 o_1 + \beta_2 o_2 + \ldots + \beta_k o_k & \ldots & \omega_1 o_1 + \omega_2 o_2 + \ldots + \omega_k o_k \\ \Big| & \Big| & & \Big| \end{pmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek mátrixa

- Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.
- Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & = b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

- Az egyenletrendszer A mátrixa: Az A mátrix/számtáblázat i-edik sorának és j-edik oszlopának találkozásában álló elem az i-edik egyenletben a j-edik változó együtthatója. Azaz $A_{i,j} = a_{i,j}$.
- Megjegyezzük, hogy a mátrix írásmódhoz szükséges az egyenletek/feltételek, illetve változók rendezése/sorbaállítása.

Lineáris egyenletrendszerek mátrix alakja

- Vektor/mátrix írásmódban egyenletünk: Legyen adott $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ $k \times n$ méretű valós mátrix és $b \in \mathbb{R}^k$

$$Ax = b, \text{ ahol } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Az egyenletek/változók sorrendjéről

- Egy alkalmazásban ez a sorrend gyakran erőltetett.

- Egy alternatív lehetőség a következő: Legyen $\mathcal{E}$ az egyenletek halmaza, $\mathcal{X}$ a változók halmaza. Az A mátrix egy $\mathcal{E} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ függvény.

- $e \in \mathcal{E}$ és $x \in \mathcal{X}$ ($|E| = k$, $|X| = n$) esetén $A(e, x)$ az x változó együtthatója az e egyenletben.

- Az $E \times X \to \mathbb{R}$ függvények halmazára egy szokásos jelölés $\mathbb{R}^{E \times X}$. Ezzel a terminológiával az egyenletrendszer mátrixa $A \in \mathbb{R}^{E \times X}$.

- k darab lineáris egyenlet/feltétel és n változó esetén

$$\mathbb{R}^{\mathcal{E} \times \mathcal{X}} \simeq \mathbb{R}^{k \times n}.$$

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrixa

• Legyenek $a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}$, $a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}$, $\ldots$, $a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}$ és $b_1, b_2, \ldots, b_k$ adott valós számok.

• Vizsgáljuk az

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n & \leq b_2 \\ \vdots & \\ a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + a_{k,3}x_3 + \ldots + a_{k,n}x_n & \leq b_k \end{cases}$$

egyenletrendszert.

• A bal oldalon szerepelnek a változók együtthatókkal súlyozva. Ahogy egyenletrendszereknél, ezek az együtthatók egy $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ mátrixba foglalhatók össze.

• A jobb oldalon szerepelnek a változók együtthatókkal súlyozva. Ahogy egyenletrendszereknél, ezek a konstansok egy $b \in \mathbb{R}^k$ oszlopvektorba foglalhatók össze.

Vektorok, részbenrendezések

- Rendezett halmazok esetén nem definiáltuk a direkt szorzatot. Miért?
- Részbenrendezett halmazok esetén definiáltuk a direkt szorzatot. Hogyan?

Definíció

$(\mathbb{R}^d, \preceq)$ egy részbenrendezés $\mathbb{R}^d$-n, a következő módon:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1 \leq y_1$ és $x_1 \leq y_1$ és $\ldots$ és $x_d \leq y_d$.

Lineáris egyenlőtlenségrendszerek mátrix alakja

• Vektor/mátrix írásmódban egyenlőtlenségrendszerünk: Legyen adott $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ $k \times n$ méretű valós mátrix és $b \in \mathbb{R}^k$

$$Ax \preceq b, \text{ ahol } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Szünet

Formális következtetések/levezetések

• Adott egyenletek, egyenlőtlenségek esetén megtanultuk, hogyan lehet következtetni, levezetni új összefüggéseket.

• Először összefoglalunk néhány dolgot, amik tárgyalása már általános iskolában elkezdődtek, de számunkra alapvetőek lesznek a későbbiekben.

Mérlegelv

Mérlegelv

Egyenlet vagy egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt adva az egyenlet vagy egyenlőtlenség igaz marad.

- Sőt, ha a hozzáadás után ugyanazt levonjuk (hozzáadjuk az eredeti -1-szeresét), akkor visszajutunk a kiinduló összefüggéshez.
- Azaz az egyenlet mindkét oldalához hozzáadhatunk egy tetszőleges s számot vagy kifejezést. Így egy az eredetivel ekvivalens összefüggést kapunk:

$$a^T x = \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad a^T x + \mathbf{s} = \alpha + \mathbf{s}$$

- Azaz az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadunk egy tetszőleges s számot vagy kifejezést. Így egy az eredetivel ekvivalens összefüggést kapunk:

$$a^T x \leq \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad a^T x + \mathbf{s} \leq \alpha + \mathbf{s}$$

Összegzési elv

Összegzési elv

Adott két egyenlet. Az egyenletek bal oldalán álló kifejezéseket összegezve a jobb oldalon álló kifejezések összegét kapjuk.

Hasonlóan járhatunk el két egyenlőtlenségnél, amennyiben a relációk azonos irányban állnak

Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x = \alpha + \beta.$$

Egyenlőtlenségek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$\begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ b^T x \leq \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x \leq \alpha + \beta.$$

Összegzési elv: más formalizmus

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \quad \text{más írásmódban} \begin{pmatrix} \text{---} & a^T & \text{---} \\ \text{---} & b^T & \text{---} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \text{ azaz}$$

$$Ax = b, \text{ ahol } A \in \mathbb{R}^{2\times n}, \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ b \in \mathbb{R}^2,$$

- Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban, ahol $A \in \mathbb{R}^{2\times n}$, $b \in \mathbb{R}^2$:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} b.$$

- Egyenlőtlenségek kezelése formálisan, mátrix írásmódban, ahol $A \in \mathbb{R}^{2\times n}$, $b \in \mathbb{R}^2$:

$$Ax \preceq b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} Ax \preceq \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} b.$$

Összegzési elv: Finomságok

- Természetesen két egyenlet összegzése után látott egyenletben nem látjuk az összadandókat. A korábbi következtetések nem fordíthatók meg.

- Egyenlőségek esetén ügyesen dolgozva állíthatunk ekvivalenciát is:

$$\begin{cases} a^T x = \alpha \\ b^T x = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^T x = \alpha \\ (a+b)^T x = \alpha + \beta \end{cases}.$$

Miért?

- Egyenlőtlenségek esetén most nem mondunk semmit. Miért?

Szorzási elv

Szorzási elv

Adott egy egyenlet. Az egyenletet tetszőleges számmal megszorozhatjuk.

Adott egy egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenséget tetszőleges NEM-NEGATÍV számmal megszorozhatjuk.

Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$a^T x = \alpha \Rightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

Egyenlőtlenségek kezelése formálisan, mátrix írásmódban:

$$a^T x \leq \alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

Szorzási elv: Ekvivalencia

- Mindkét esetben megengedtük a $\lambda = 0$ esetet. Persze a következtetett $0 = 0$, illetve $0 \leq 0$ összefüggések logikailag helyesek. A kiinduló információ elveszett.
- Egyenlőségeknél, ha $\lambda \neq 0$, illetve egyenlőtlenségeknél, ha $\lambda > 0$, akkor az $\frac{1}{\lambda}$-gyel való szorzás „visszafelé fordítja" a következtetést.
- Egyenletek kezelése formálisan, mátrix írásmódban HA $\lambda \neq 0$:

$$a^T x = \alpha \Leftrightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

- Egyenlőtlenségek kezelése formálisan, mátrix írásmódban HA $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$:

$$a^T x \leq \alpha \Leftrightarrow (\lambda a)^T x = \lambda \alpha$$

A következtetési szabályok teljes kihasználása

- Eddig egy vagy kettő egyenletből/egyenlőtlenségből vontunk le egy következtetést. Természetesen ennyivel nem érjük be: Egy egyenletrendszerből/egyenlőtlenségrendszerből indulunk ki és a logikai következtetéseinket a levezetett összefüggésekre iterálva alkalmazzuk.

- Ha egy $Ax = b$ egyenlőtlenségrendszerből levezethető a $c^T x = d$ egyenlőtlenség, akkor azt írjuk hogy

$$Ax = b \qquad \vdash \qquad c^T x = d.$$

- Ha egy $Ax \preceq b$ egyenlőtlenségrendszerből levezethető a $c^T x \leq d$ egyenlőtlenség, akkor azt írjuk hogy

$$Ax \preceq b \qquad \vdash \qquad c^T x \leq d.$$

Egy fontos jelölés

A formális definíciót csak egyenlőtlenségek esetére mondjuk ki.

Definíció: Levezetés

$Ax \preceq b \vdash c^T x \leq d$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $\{c_i^T x \leq d_i\}_{i=1}^{\ell}$ egyenlőtlenségsorozat

$$c_1^T x \leq d_1, c_2^T x \leq d_2, c_3^T x \leq d_3, \dots, c_\ell^T x \leq d_\ell,$$

amelyben minden elem

- vagy a kiinduló egyenlőtlenségrendszer egy eleme,
- vagy korábbi kettő összege,
- vagy egy korábbi nem-negatív számszorosa,

továbbá az utolsó egyenlőtlenség a levezetendő.

Példa

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} \text{---} & a_1^T & \text{---} \\ \text{---} & a_2^T & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & a_k^T & \text{---} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times n}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$$

A kiinduló egyenlőtlenségrendszer mátrix jelöléssel az alábbi: $Ax \preceq b$.
Klasszikusan, vagy vektor jelöléssel:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_n \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1^T x \le b_1 \\ a_2^T x \le b_2 \\ \vdots \\ a_k^T x \le b_k \end{cases}.$$

Példa (folytatás)

Az i-edik egyenlőtlenséget szorozzuk egy-egy $p_i \geq 0$ számmal:

$$
\begin{array}{rl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 & \quad / \cdot p_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 & \quad / \cdot p_2 \\
\vdots & \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k & \quad / \cdot p_k
\end{array}
$$

Majd az így kapott egyenlőtlenségeket adjuk össze

$$
\begin{array}{l}
\quad (p_1 a_{11} + \cdots + p_k a_{k1})x_1 \\
+(p_1 a_{12} + \cdots + p_k a_{k2})x_2 \\
\qquad \vdots \\
+(p_1 a_{1n} + \cdots + p_k a_{kn})x_n \leq p_1 b_1 + \cdots + p_k b_k
\end{array}
$$

Példa (folytatás)

Azaz $Ax \preceq b$-nek következménye

$$p^T Ax = (p^T A)x \leq p^T b,$$

ahol

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \quad \text{és} \quad p \succeq 0 \in \mathbb{R}^k.$$

Észrevétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}, b \in \mathbb{R}^k, 0 \preceq p \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad p^T Ax \preceq p^T b.$$

Észrevétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}, b \in \mathbb{R}^k, p \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$Ax = b \quad \vdash \quad p^T Ax = p^T b.$$

A fenti példák univerzálisak

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d.$$

Ekkor alkalmas $0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k$-ra

$$c^T = \lambda^T A, \quad d = \lambda^T b.$$

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$.

Tegyük fel, hogy

$$Ax = b \quad \vdash \quad c^T x = d.$$

Ekkor alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}^k$-ra

$$c^T = \lambda^T A, \quad d = \lambda^T b.$$

Univerzalitás: Bizonyítás

- Csak az egyenlőtlenség esetét igazoljuk.
- Az

$$Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d$$

feltétel „mögött" egy

$$c_1^T x \leq d_1, \quad c_2^T x \leq d_2, \quad c_3^T x \leq d_3, \quad \dots, \quad c_\ell^T x \leq d_\ell$$

egyenlőtlenségsorozat áll.

- Belátjuk, hogy minden $i \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ esetén alkalmas $\lambda_i \in \mathbb{R}_+^k$-ra

$$c_i^T = \lambda_i^T A, \quad d = \lambda_i^T b.$$

- Teljes indukcióval bizonyítunk.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája

- Eddigi tárgyalásunkat nem szigorú egyenlőtlenségekre szorítkozott. Természetesen könnyen kiterjeszthető szigorú egyenlőtlenségek kezelésére is. Az alábbiakban vázoljuk a „vegyes” rendszerek alapjait.

- A szigorú egyenlőtlenségek standard formája (mérleg-elv) a következő:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n < \beta, \qquad \alpha^T x < \beta.$$

Fontos különbség

Szigorú egyenlőtlenségek esetén szorzási-elv CSAK pozitív számra engedett! Amikor is az átalakítás ekvivalencia. Azaz a fordított irányú következtetés is korrekt.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Összeadási elv

$$\begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ b^T x \leq \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x \leq \alpha + \beta.$$

$$\begin{cases} a^T x < \alpha \\ b^T x < \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x < \alpha + \beta.$$

$$\begin{cases} a^T x \leq \alpha \\ b^T x < \beta \end{cases} \Rightarrow (a+b)^T x < \alpha + \beta.$$

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Levezetés

Definíció: Levezetés

$$\begin{cases} Ax & \leq b \\ A'x & < b' \end{cases} \quad \vdash_{+} \quad c^T x \leq d \quad / \quad c^T x < d$$

akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan egyenlőtlenségsorozat

$$c_1^T x \rho_1 d_1, \quad c_2^T x \rho_2 d_2, \quad c_3^T x \rho_3 d_3, \quad \ldots, \quad c_\ell^T x \rho_\ell d_\ell,$$

ahol $\rho_i \in \{\leq, <\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ és amely sorozatban minden elem

- vagy a kiinduló egyenlőtlenségrendszer egy eleme,
- vagy korábbi kettő összege,
- vagy egy korábbiból kapott a szorzási-elv alkalmazásával,
- vagy $0^T x = 0 < 1$ axióma,

továbbá az utolsó egyenlőtlenség a levezetendő.

Szigorú egyenlőtlenségek logikája: Univerzalitás

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $A' \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$, $b' \in \mathbb{R}^\ell$.

(1)

$$\begin{cases} Ax & \preceq b \\ A'x & \prec b' \end{cases} \quad \models_{+} \quad c^T x \leq d$$

pontosan akkor teljesül, ha $Ax \preceq b \quad \vdash \quad c^T x \leq d$, azaz alkalmas $0 \preceq \lambda \in \mathbb{R}^k$-ra

$$c^T = \lambda^T A, \quad d = \lambda^T b.$$

(2)

$$\begin{cases} Ax & \preceq b \\ A'x & \prec b' \end{cases} \quad \models_{+} \quad c^T x < d$$

pontosan akkor teljesül, ha alkalmas $\lambda \in \mathbb{R}^k_+$ és $\mu \in \mathbb{R}^\ell_+ - \{0\}$ vektorokra

$$c^T = \lambda^T A + \mu^T A', \quad d = \lambda^T b + \mu^T b'.$$

Megoldáshalmazok: A geometriai szemlélet

Amit eddig csináltunk az formális okoskodás, következtetés. Az egyenlőtlenségek/egyenlőségek csak számokból és betűkből összeállított sorozatok voltak és formálisan újabbakat írtunk fel mint kikövetkeztetettek. Most szemléletet váltunk.

Definíció

Legyen $\mathcal{E} : Ax \preceq b$ egy egyenlőtlenségrendszer, ahol $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$. Ekkor

$$M(\mathcal{E}) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \preceq b\},$$

az egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza.

A következmény fogalma

Definíció

Legyen $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ két egyenlőtlenségrendszer. Ha

$$M(\mathcal{E}) \subset M(\mathcal{E}'),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye.

Jelölés

Ha $\mathcal{E}'$ az $\mathcal{E}$ logikai következménye, akkor azt írjuk, hogy

$$\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$$

„Nyilvánvaló” tény

Ha $\mathcal{E} \vdash \mathcal{E}'$, akkor $\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$, sőt ha $\mathcal{E} \vdash_{+} \mathcal{E}'$, akkor $\mathcal{E} \models \mathcal{E}'$.

Példa

Példa

Legyen

$$\mathcal{E} : \begin{cases} -x + y \leq 1 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases} , \quad \mathcal{E}' : 2x + 4y < 8$$

Példa: Algebrai szemlélet

Súlyozzuk az egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned} -x + y &\leq 1 & / \cdot 2 \\ 2x + y &\leq 2 & / \cdot 2 \\ 0 &< 1 & / \cdot 2 \end{aligned}$$

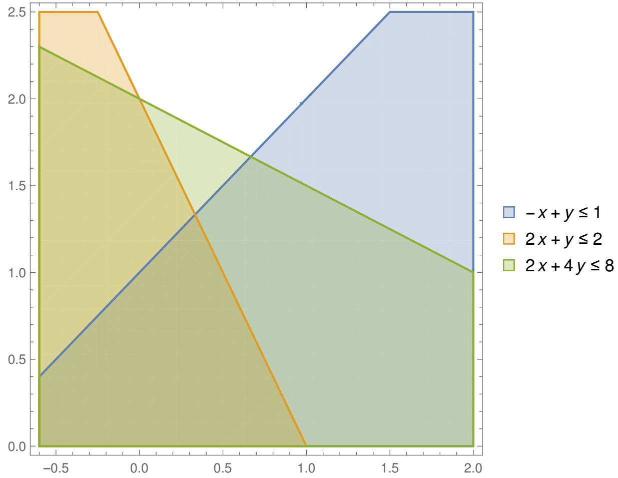
Összegezzük:

$$2x + 4y < 8$$

Tehát

$$\mathcal{E} \vdash \mathcal{E}'.$$

Példa: Geometriai szemlélet



A kép alapján

$$\mathcal{E} \models \mathcal{E}'.$$

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!