

# Legrövidebb út problémája

Hajnal Péter

2021. tavasz

# A kérdés alapváltozata

# A kérdés alapváltozata

Adott

# A kérdés alapváltozata

Adott

(i)  $G$  gráf,

# A kérdés alapváltozata

Adott

- (i)  $G$  gráf,
- (ii)  $\ell : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  hosszfüggvény az éleken,

# A kérdés alapváltozata

Adott

- (i)  $G$  gráf,
- (ii)  $\ell : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  hosszfüggvény az éleken,
- (iii)  $s, t$  két kitüntetett csúcs.

# A kérdés alapváltozata

Adott

- (i)  $G$  gráf,
- (ii)  $\ell : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  hosszfüggvény az éleken,
- (iii)  $s, t$  két kitüntetett csúcs.

## A kérdés

Határozzuk meg  $s$  és  $t$  távolságát.

# Emlékeztető



# Emlékeztető

- $G$  gráf:

# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,

# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,  $E = E(G)$  véges élhalmaz,

# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,  $E = E(G)$  véges élhalmaz, illeszkedési reláció, amely minden élhez két végpontot rendel.

# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,  $E = E(G)$  véges élhalmaz, illeszkedési reláció, amely minden élhez két végpontot rendel.
- $uv$ -séta  $G$ -ben:

$$\mathcal{S} : u = w_0, e_1, w_1, e_2, \dots, w_{L-1}, e_L, w_L = v,$$

# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,  $E = E(G)$  véges élhalmaz, illeszkedési reláció, amely minden élhez két végpontot rendel.
- $uv$ -séta  $G$ -ben:

$$\mathcal{S} : u = w_0, e_1, w_1, e_2, \dots, w_{L-1}, e_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),

# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,  $E = E(G)$  véges élhalmaz, illeszkedési reláció, amely minden élhez két végpontot rendel.
- $uv$ -séta  $G$ -ben:

$$S : u = w_0, e_1, w_1, e_2, \dots, w_{L-1}, e_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),  $e_i \in E$  ( $i = 1, \dots, L$ ),

# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,  $E = E(G)$  véges élhalmaz, illeszkedési reláció, amely minden élhez két végpontot rendel.
- $uv$ -séta  $G$ -ben:

$$S : u = w_0, e_1, w_1, e_2, \dots, w_{L-1}, e_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),  $e_i \in E$  ( $i = 1, \dots, L$ ),  $e_i$  két végpontja  $w_{i-1}$  és  $w_i$  ( $i = 1, \dots, L$ ).



# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,  $E = E(G)$  véges élhalmaz, illeszkedési reláció, amely minden élhez két végpontot rendel.
- $uv$ -séta  $G$ -ben:

$$S : u = w_0, e_1, w_1, e_2, \dots, w_{L-1}, e_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),  $e_i \in E$  ( $i = 1, \dots, L$ ),  $e_i$  két végpontja  $w_{i-1}$  és  $w_i$  ( $i = 1, \dots, L$ ).

- Az  $S$   $uv$ -séta gráfelméleti hossza  $L$ .

# Emlékeztető

- $G$  gráf:  $V = V(G)$  véges csúcshalmaz,  $E = E(G)$  véges élhalmaz, illeszkedési reláció, amely minden élhez két végpontot rendel.
- $uv$ -séta  $G$ -ben:

$$S : u = w_0, e_1, w_1, e_2, \dots, w_{L-1}, e_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),  $e_i \in E$  ( $i = 1, \dots, L$ ),  $e_i$  két végpontja  $w_{i-1}$  és  $w_i$  ( $i = 1, \dots, L$ ).

- Az  $S$   $uv$ -séta gráfelméleti hossza  $L$ .
- Az  $S$   $uv$ -séta súlyozott hossza

$$\sum_{i=1}^L \ell(e_i).$$

# Emlékeztető (folytatás)

# Emlékeztető (folytatás)

- $u$  és  $v$  távolsága

# Emlékeztető (folytatás)

- $u$  és  $v$  távolsága

(i)

$$\min\{\ell(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \text{ egy } uv\text{-séta}\}.$$

# Emlékeztető (folytatás)

- $u$  és  $v$  távolsága

(i)

$$\min\{\ell(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \text{ egy } uv\text{-séta}\}.$$

(ii)

Minimalizáljuk	$\ell(\mathcal{S})$ -t
Feltéve, hogy	$\mathcal{S}$ egy $uv$ séta

optimalizálási feladat  $p^*$  optimális értéke.

# Kezdeti megjegyzések

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő



# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta).

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor  $p^* \in \mathbb{R}_{++}$

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor  $p^* \in \mathbb{R}_{++}$
- Egy gráfban lehetnek hurokélek, párhuzamos élpárok.

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor  $p^* \in \mathbb{R}_{++}$
- Egy gráfban lehetnek hurokélek, párhuzamos élpárok. Feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor  $p^* \in \mathbb{R}_{++}$
- Egy gráfban lehetnek hurokélek, párhuzamos élpárok. Feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.
- Egy  $\mathcal{S}$  séta **út**, ha csúcspontjai különbözőek.

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor  $p^* \in \mathbb{R}_{++}$
- Egy gráfban lehetnek hurokélek, párhuzamos élpárok. Feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.
- Egy  $\mathcal{S}$  séta **út**, ha csúcsai különbözőek.
- Ha gráfunkban van  $\mathcal{S}$   $uv$ -séta, akkor van  $\mathcal{S}_0$   $uv$ -út is

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor  $p^* \in \mathbb{R}_{++}$
- Egy gráfban lehetnek hurokélek, párhuzamos élpárok. Feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.
- Egy  $\mathcal{S}$  séta **út**, ha csúcspontjai különbözőek.
- Ha gráfunkban van  $\mathcal{S}$   $uv$ -séta, akkor van  $\mathcal{S}_0$   $uv$ -út is. Sőt, egy ilyen út megkapható  $\mathcal{S}$  „kiritkítésével”.

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor  $p^* \in \mathbb{R}_{++}$
- Egy gráfban lehetnek hurokélek, párhuzamos élpárok. Feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.
- Egy  $\mathcal{S}$  séta **út**, ha csúcspontjai különbözőek.
- Ha gráfunkban van  $\mathcal{S}$   $uv$ -séta, akkor van  $\mathcal{S}_0$   $uv$ -út is. Sőt, egy ilyen út megkapható  $\mathcal{S}$  „kiritkítésével”. Így  $\ell(\mathcal{S}_0) \leq \ell(\mathcal{S})$ .



# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy  $G$  összefüggő (bármely két csúcs között van séta). Ekkor  $p^* \in \mathbb{R}_{++}$
- Egy gráfban lehetnek hurokélek, párhuzamos élpárok. Feltesszük, hogy gráfunk egyszerű.
- Egy  $\mathcal{S}$  séta **út**, ha csúcspontjai különbözőek.
- Ha gráfunkban van  $\mathcal{S}$   $uv$ -séta, akkor van  $\mathcal{S}_0$   $uv$ -út is. Sőt, egy ilyen út megkapható  $\mathcal{S}$  „kiritkítésével”. Így  $\ell(\mathcal{S}_0) \leq \ell(\mathcal{S})$ .
- Elég az  $st$ -utak között keresni az optimálisat.

# A kérdés irányított változata

# A kérdés irányított változata

Adott

# A kérdés irányított változata

Adott

(i)  $\vec{G}$  irányított gráf,

# A kérdés irányított változata

Adott

- (i)  $\vec{G}$  irányított gráf,
- (ii)  $l : E(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  hosszfüggvény az éleken,

# A kérdés irányított változata

Adott

- (i)  $\vec{G}$  irányított gráf,
- (ii)  $l : E(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  hosszfüggvény az éleken,
- (iii)  $s, t$  két kitüntetett csúcs.

# A kérdés irányított változata

Adott

- (i)  $\vec{G}$  irányított gráf,
- (ii)  $l : E(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}_{++}$  hosszfüggvény az éleken,
- (iii)  $s, t$  két kitüntetett csúcs.

## A kérdés

Határozzuk meg  $s$  és  $t$  távolságát.

# Emlékeztető



# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz,

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel.

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel.  $vK\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsból kifut az  $\vec{e}$  él.  $vB\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsba befut az  $\vec{e}$  él.

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel.  $vK\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsból kifut az  $\vec{e}$  él.  $vB\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsba befut az  $\vec{e}$  él.
- $\vec{u}\vec{v}$ -séta  $\vec{G}$ -ben:

$$\vec{S} : u = w_0, \vec{e}_1, w_1, \vec{e}_2, \dots, w_{L-1}, \vec{e}_L, w_L = v,$$

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel.  $vK\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsból kifut az  $\vec{e}$  él.  $vB\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsba befut az  $\vec{e}$  él.
- $\vec{u}\vec{v}$ -séta  $\vec{G}$ -ben:

$$\vec{S} : u = w_0, \vec{e}_1, w_1, \vec{e}_2, \dots, w_{L-1}, \vec{e}_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel.  $vK\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsból kifut az  $\vec{e}$  él.  $vB\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsba befut az  $\vec{e}$  él.
- $\vec{u}\vec{v}$ -séta  $\vec{G}$ -ben:

$$\vec{S} : u = w_0, \vec{e}_1, w_1, \vec{e}_2, \dots, w_{L-1}, \vec{e}_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),  $\vec{e}_i \in E$  ( $i = 1, \dots, L$ ),



# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel.  $vK\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsból kifut az  $\vec{e}$  él.  $vB\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsba befut az  $\vec{e}$  él.
- $\vec{u}\vec{v}$ -séta  $\vec{G}$ -ben:

$$\vec{S} : u = w_0, \vec{e}_1, w_1, \vec{e}_2, \dots, w_{L-1}, \vec{e}_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),  $\vec{e}_i \in E$  ( $i = 1, \dots, L$ ),  $e_i$  kifut  $w_{i-1}$ -ből és befut  $w_i$ -be ( $i = 1, \dots, L$ ).

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel.  $vK\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsból kifut az  $\vec{e}$  él.  $vB\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsba befut az  $\vec{e}$  él.
- $\vec{u}\vec{v}$ -séta  $\vec{G}$ -ben:

$$\vec{S} : u = w_0, \vec{e}_1, w_1, \vec{e}_2, \dots, w_{L-1}, \vec{e}_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),  $\vec{e}_i \in E$  ( $i = 1, \dots, L$ ),  $e_i$  kifut  $w_{i-1}$ -ből és befut  $w_i$ -be ( $i = 1, \dots, L$ ).

- Az  $\vec{S}$   $\vec{u}\vec{v}$ -séta gráfelméleti hossza  $L$ .

# Emlékeztető

- $G$  irányított gráf:  $V = V(\vec{G})$  véges csúcshalmaz,  $E = E(\vec{G})$  véges élhalmaz, két illeszkedési reláció: kifut, befut, amely minden élhez egy végpontot rendel.  $vK\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsból kifut az  $\vec{e}$  él.  $vB\vec{e}$  jelentése: a  $v$  csúcsba befut az  $\vec{e}$  él.
- $\vec{u}\vec{v}$ -séta  $\vec{G}$ -ben:

$$\vec{S} : u = w_0, \vec{e}_1, w_1, \vec{e}_2, \dots, w_{L-1}, \vec{e}_L, w_L = v,$$

ahol  $w_i \in V$  ( $i = 0, 1, \dots, L$ ),  $\vec{e}_i \in E$  ( $i = 1, \dots, L$ ),  $e_i$  kifut  $w_{i-1}$ -ből és befut  $w_i$ -be ( $i = 1, \dots, L$ ).

- Az  $\vec{S}$   $\vec{u}\vec{v}$ -séta gráfelméleti hossza  $L$ .
- Az  $\vec{S}$   $\vec{u}\vec{v}$ -séta súlyozott hossza

$$\sum_{i=1}^L \ell(\vec{e}_i).$$

# Kezdeti megjegyzések

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy nincs hurokél.

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy nincs hurokél. Feltesszük, hogy  $u$ -ból  $v$ -be legfeljebb egy él vezet.

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy nincs hurokél. Feltesszük, hogy  $u$ -ból  $v$ -be legfeljebb egy él vezet. Azaz feltesszük, hogy  $\vec{G}$  egyszerű.

# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy nincs hurokél. Feltesszük, hogy  $u$ -ból  $v$ -be legfeljebb egy él vezet. Azaz feltesszük, hogy  $\vec{G}$  egyszerű.
- Feltesszük, hogy minden csúcs elérhető  $s$ -ből irányított sétával/úttal.



# Kezdeti megjegyzések

- Feltesszük, hogy nincs hurokél. Feltesszük, hogy  $u$ -ból  $v$ -be legfeljebb egy él vezet. Azaz feltesszük, hogy  $\vec{G}$  egyszerű.
- Feltesszük, hogy minden csúcs elérhető  $s$ -ből irányított sétával/úttal.  $p^* \in \mathbb{R}_+$

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:  
(a) csúcsai  $G$  csúcsai,

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overleftarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ ,

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overleftarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{e}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\overrightarrow{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .
- $\overleftarrow{G}$  gráf  $\overrightarrow{st}$ -útjai párbaállíthatók az eredeti  $G$  gráf  $st$  útjaival.



# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\vec{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf  $\overrightarrow{st}$ -útjai párbaállíthatók az eredeti  $G$  gráf  $st$  útjaival.
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf egy  $\overrightarrow{st}$ -útjának hossza megegyezik  $G$  gráfbeli párjának (egy  $st$ -út) hosszával.

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\vec{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf  $\overrightarrow{st}$ -útjai párbaállíthatók az eredeti  $G$  gráf  $st$  útjaival.
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf egy  $\overrightarrow{st}$ -útjának hossza megegyezik  $G$  gráfbeli párjának (egy  $st$ -út) hosszával.
- $(G, \ell, s, t)$  megoldása:

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\vec{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf  $\overrightarrow{st}$ -útjai párbaállíthatók az eredeti  $G$  gráf  $st$  útjaival.
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf egy  $\overrightarrow{st}$ -útjának hossza megegyezik  $G$  gráfbeli párjának (egy  $st$ -út) hosszával.
- $(G, \ell, s, t)$  megoldása:  $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  „felépítése”

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\vec{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf  $\overrightarrow{st}$ -útjai párbaállíthatók az eredeti  $G$  gráf  $st$  útjaival.
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf egy  $\overrightarrow{st}$ -útjának hossza megegyezik  $G$  gráfbeli párjának (egy  $st$ -út) hosszával.
- $(G, \ell, s, t)$  megoldása:  $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  „felépítése”  $\rightarrow$   $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  megoldása,

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\vec{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf  $\overrightarrow{st}$ -útjai párbaállíthatók az eredeti  $G$  gráf  $st$  útjaival.
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf egy  $\overrightarrow{st}$ -útjának hossza megegyezik  $G$  gráfbeli párjának (egy  $st$ -út) hosszával.
- $(G, \ell, s, t)$  megoldása:  $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  „felépítése”  $\rightarrow$   $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  megoldása, azaz  $\vec{P}_{\text{opt}}$  kiszámítása

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\vec{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf  $\overrightarrow{st}$ -útjai párbaállíthatók az eredeti  $G$  gráf  $st$  útjaival.
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf egy  $\overrightarrow{st}$ -útjának hossza megegyezik  $G$  gráfbeli párjának (egy  $st$ -út) hosszával.
- $(G, \ell, s, t)$  megoldása:  $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  „felépítése”  $\rightarrow (\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  megoldása, azaz  $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\text{opt}}$  kiszámítása  $\rightarrow \mathcal{P}_{\text{opt}}$  párjának meghatározása  $G$ -ben:  $\mathcal{P}_{\text{opt}}$ ,

# Redukció

## Észrevétel

„Elég” az irányított problémát vizsgálni/megoldani.

- $G$  esetén legyen  $\overleftrightarrow{G}$  a következő irányított gráf:
  - (a) csúcsai  $G$  csúcsai,
  - (b)  $G$  minden  $e = uv$  élére bevezetünk egy  $\vec{e} = \overrightarrow{uv}$  és  $\overleftarrow{e} = \overrightarrow{vu}$  élt.
  - (c) Az  $e$ -hez bevezetett mindkét él hossza  $\ell(e)$ , azaz  $\ell(\overrightarrow{vu}) = \ell(\overleftarrow{e}) = \ell(e)$ .
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf  $\overrightarrow{st}$ -útjai párbaállíthatók az eredeti  $G$  gráf  $st$  útjaival.
- $\overleftrightarrow{G}$  gráf egy  $\overrightarrow{st}$ -útjának hossza megegyezik  $G$  gráfbeli párjának (egy  $st$ -út) hosszával.
- $(G, \ell, s, t)$  megoldása:  $(\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  „felépítése”  $\rightarrow (\overleftrightarrow{G}, \ell, s, t)$  megoldása, azaz  $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\text{opt}}$  kiszámítása  $\rightarrow \mathcal{P}_{\text{opt}}$  párjának meghatározása  $G$ -ben:  $\mathcal{P}_{\text{opt}}$ , optimális megoldása a  $(G, \ell, s, t)$  feladatnak.

# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát.



# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg.

# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg.  $(\vec{G}, s)$  lesz az input.

# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg.  $(\vec{G}, s)$  lesz az input. Meghatározzuk azon pontok  $S$  halmazát, amelyekbe vezet  $s$ -ből induló irányított út.

# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg.  $(\vec{G}, s)$  lesz az input. Meghatározzuk azon pontok  $S$  halmazát, amelyekbe vezet  $s$ -ből induló irányított út.
- Ezek halmaza  $S = S_0 \dot{\cup} S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_L$  lesz,

# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg.  $(\vec{G}, s)$  lesz az input. Meghatározzuk azon pontok  $S$  halmazát, amelyekbe vezet  $s$ -ből induló irányított út.
- Ezek halmaza  $S = S_0 \dot{\cup} S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_L$  lesz, ahol  $S_i$  pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyek gráfelméleti távolsága  $s$ -től  $i$ .

# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg.  $(\vec{G}, s)$  lesz az input. Meghatározzuk azon pontok  $S$  halmazát, amelyekbe vezet  $s$ -ből induló irányított út.
- Ezek halmaza  $S = S_0 \dot{\cup} S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_L$  lesz, ahol  $S_i$  pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyek gráfelméleti távolsága  $s$ -től  $i$ .
- $L$  jelöli az  $s$ -ből induló leghosszabb út hosszát.

# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg.  $(\vec{G}, s)$  lesz az input. Meghatározzuk azon pontok  $S$  halmazát, amelyekbe vezet  $s$ -ből induló irányított út.
- Ezek halmaza  $S = S_0 \dot{\cup} S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_L$  lesz, ahol  $S_i$  pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyek gráfelméleti távolsága  $s$ -től  $i$ .
- $L$  jelöli az  $s$ -ből induló leghosszabb út hosszát.
- $S$  és  $\bar{S} = V(G) - S$  között az összes él  $\bar{S}$ -ből indul és  $S$ -be vezet.



# Gráfelméleti távolság esete

Mielőtt a legrövidebb út problémáját tárgyaljuk, megnézzük a gráfelméleti távolságra vonatkozó problémát. Azaz mi történik, ha egy séta/út hossza az élek/lépések megszámlálásából adódik.

- Egy erősebb feladatot oldunk meg.  $(\vec{G}, s)$  lesz az input. Meghatározzuk azon pontok  $S$  halmazát, amelyekbe vezet  $s$ -ből induló irányított út.
- Ezek halmaza  $S = S_0 \dot{\cup} S_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} S_L$  lesz, ahol  $S_i$  pontosan azokat a pontokat tartalmazza, amelyek gráfelméleti távolsága  $s$ -től  $i$ .
- $L$  jelöli az  $s$ -ből induló leghosszabb út hosszát.
- $S$  és  $\bar{S} = V(G) - S$  között az összes él  $\bar{S}$ -ből indul és  $S$ -be vezet. Ez bizonyítja, hogy  $s$ -ből irányított út nem léphet ki  $S$ -ből.

# Szélességi keresés

## Szélességi keresés

# Szélességi keresés

## Szélességi keresés

(I) // Inicializálás // Legyen  $S_0 = \{s\}$ .

# Szélességi keresés

## Szélességi keresés

(I) // Inicializálás // Legyen  $S_0 = \{s\}$ .

# Szélességi keresés

## Szélességi keresés

(I) // Inicializálás // Legyen  $S_0 = \{s\}$ .

(C) // Ciklus // Amíg  $S_i \neq \emptyset$

$$S_{i+1} = \{x \in V(G) - (S_0 \cup \dots \cup S_i) : \text{van olyan } \sigma \in S_i, \\ \text{hogy } \overrightarrow{\sigma x} \in E(G)\}$$

és  $i \leftarrow i + 1$ .

# Szélességi keresés

## Szélességi keresés

(I) // Inicializálás // Legyen  $S_0 = \{s\}$ .

(C) // Ciklus // Amíg  $S_i \neq \emptyset$

$$S_{i+1} = \{x \in V(G) - (S_0 \cup \dots \cup S_i) : \text{van olyan } \sigma \in S_i, \\ \text{hogy } \vec{\sigma x} \in E(G)\}$$

és  $i \leftarrow i + 1$ .

## Tétel

A fenti algoritmus outputja korrekt.

# Szélességi keresés

## Szélességi keresés

(I) // Inicializálás // Legyen  $S_0 = \{s\}$ .

(C) // Ciklus // Amíg  $S_i \neq \emptyset$

$$S_{i+1} = \{x \in V(G) - (S_0 \cup \dots \cup S_i) : \text{van olyan } \sigma \in S_i, \\ \text{hogy } \vec{\sigma x} \in E(G)\}$$

és  $i \leftarrow i + 1$ .

## Tétel

A fenti algoritmus outputja korrekt.

# Szélességi keresés

## Szélességi keresés

(I) // Inicializálás // Legyen  $S_0 = \{s\}$ .

(C) // Ciklus // Amíg  $S_i \neq \emptyset$

$$S_{i+1} = \{x \in V(G) - (S_0 \cup \dots \cup S_i) : \text{van olyan } \sigma \in S_i, \\ \text{hogy } \vec{\sigma x} \in E(G)\}$$

és  $i \leftarrow i + 1$ .

## Tétel

A fenti algoritmus outputja korrekt.

(i) Ha  $x \in S_i$ , akkor  $s$  és  $x$  gráfelméleti távolsága  $i$ .



# Szélességi keresés

## Szélességi keresés

(I) // Inicializálás // Legyen  $S_0 = \{s\}$ .

(C) // Ciklus // Amíg  $S_i \neq \emptyset$

$$S_{i+1} = \{x \in V(G) - (S_0 \cup \dots \cup S_i) : \text{van olyan } \sigma \in S_i, \\ \text{hogy } \vec{\sigma x} \in E(G)\}$$

és  $i \leftarrow i + 1$ .

## Tétel

A fenti algoritmus outputja korrekt.

(i) Ha  $x \in S_i$ , akkor  $s$  és  $x$  gráfelméleti távolsága  $i$ .

(ii) Ha  $x \notin S$ , akkor nem létezik irányított út  $s$ -ből  $x$ -be.

# Szélességi kereső fa

# Szélességi kereső fa

A fenti algoritmusnak vegyük a következő változatát:

# Szélességi kereső fa

A fenti algoritmusnak vegyük a következő változatát:

- Ha a (C) ciklusban egy  $x$  csúcs a  $S_{i+1}$  halmazba sorolódik, akkor az algoritmusnak találnia kell egy  $\sigma \in S_i$  csúcsot és egy  $\overrightarrow{\sigma x}$  élt. A „bizonyító” élt egy  $F$  élhalmazba gyűjtsük össze.

# Szélességi kereső fa

A fenti algoritmusnak vegyük a következő változatát:

- Ha a  $(C)$  ciklusban egy  $x$  csúcs a  $S_{i+1}$  halmazba sorolódik, akkor az algoritmusnak találnia kell egy  $\sigma \in S_i$  csúcsot és egy  $\overrightarrow{\sigma x}$  élt. A „bizonyító” élt egy  $F$  élhalmazba gyűjtsük össze.

## Tétel

A  $G|_S$  gráfban  $F$  egy  $\mathcal{F}$  feszítőfa élhalmaza.  $\mathcal{F}$  az  $s$  csúccsal egy gyökeres fa, amelyben minden él  $s$ -től „elfele” vezet.

# Szélességi kereső fa

A fenti algoritmusnak vegyük a következő változatát:

- Ha a  $(C)$  ciklusban egy  $x$  csúcs a  $S_{i+1}$  halmazba sorolódik, akkor az algoritmusnak találnia kell egy  $\sigma \in S_i$  csúcstól és egy  $\vec{\sigma x}$  élt. A „bizonyító” élt egy  $F$  élhalmazba gyűjtsük össze.

## Tétel

A  $G|_S$  gráfban  $F$  egy  $\mathcal{F}$  feszítőfa élhalmaza.  $\mathcal{F}$  az  $s$  csúccsal egy gyökeres fa, amelyben minden él  $s$ -től „elfele” vezet.

Minden  $x \in S$  csúcsra pontosan egy  $\mathcal{F}$ -beli  $\vec{s x}$ -út van. Ez az út egy legrövidebb (gráfelméleti értelemben) út, amely  $s$ -ből  $x$ -be vezet.

# Szünet



# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ .



# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát.

# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

## Jelölés

$x_e =$  hányszor haladunk át az  $e$  élen

# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

## Jelölés

$x_e =$  hányszor haladunk át az  $e$  élen

Feltételek:

# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

## Jelölés

$x_e =$  hányszor haladunk át az  $e$  élen

Feltételek:

# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

## Jelölés

$x_e =$  hányszor haladunk át az  $e$  élen

Feltételek:

- Az  $s$ -be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel kevesebb mint  $s$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.

# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

## Jelölés

$x_e =$  hányszor haladunk át az  $e$  élen

Feltételek:

- Az  $s$ -be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel kevesebb mint  $s$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.
- A  $t$ -be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel több mint  $t$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.

# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

## Jelölés

$x_e =$  hányszor haladunk át az  $e$  élen

Feltételek:

- Az  $s$ -be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel kevesebb mint  $s$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.
- A  $t$ -be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel több mint  $t$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.
- A  $v$ -be ( $v \in V - \{s, t\}$ ) befutó éleken való áthaladások össz száma ugyanannyi mint az  $v$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.



# Algebraizálás: az ötlet

Adott  $(\vec{G}, \ell, s, t)$ . Keresünk egy legrövidebb  $st$ -sétát. Arról szeretnénk dönteni, melyik élen hányszor haladunk át.

## Jelölés

$x_e =$  hányszor haladunk át az  $e$  élen

Feltételek:

- Az  $s$ -be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel kevesebb mint  $s$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.
- A  $t$ -be befutó éleken való áthaladások össz száma 1-gyel több mint  $t$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.
- A  $v$ -be ( $v \in V - \{s, t\}$ ) befutó éleken való áthaladások össz száma ugyanannyi mint az  $v$ -ből kifutó éleken az össz áthaladások száma.

A lehetséges megoldások: séták élhalmaza, illetve séták élhalmaza felesleges ciklusokkal.

# Algebraizálás: képletek

# Algebraizálás: képletek

Feltételek:

# Algebraizálás: képletek

Feltételek:

$(F_s)$

$$\sum_{e:sBe} x_e - \sum_{e:sKe} x_e = -1,$$

# Algebraizálás: képletek

Feltételek:

$(F_s)$

$$\sum_{e:sBe} x_e - \sum_{e:sKe} x_e = -1,$$

$(F_t)$

$$\sum_{e:tBe} x_e - \sum_{e:tKe} x_e = 1,$$

# Algebraizálás: képletek

Feltételek:

$(F_s)$

$$\sum_{e:sBe} x_e - \sum_{e:sKe} x_e = -1,$$

$(F_t)$

$$\sum_{e:tBe} x_e - \sum_{e:tKe} x_e = 1,$$

$(F_v)$  minden  $v \in V - \{s, t\}$  csúcsra

$$\sum_{e:vBe} x_e - \sum_{e:vKe} x_e = 0,$$

# Algebraizálás: képletek

Feltételek:

$(F_s)$

$$\sum_{e:sBe} x_e - \sum_{e:sKe} x_e = -1,$$

$(F_t)$

$$\sum_{e:tBe} x_e - \sum_{e:tKe} x_e = 1,$$

$(F_v)$  minden  $v \in V - \{s, t\}$  csúcsra

$$\sum_{e:vBe} x_e - \sum_{e:vKe} x_e = 0,$$

$(E + I)$

$$x \succeq 0, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

# Algebraizálás: mátrix alak

## Definíció

$$\text{In}_G = \begin{matrix} v \\ \vdots \\ \dots \end{matrix} \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \begin{cases} 1 & \text{ha } v \in E \\ -1 & \text{ha } v \in K \\ 0 & \text{különben} \end{cases} & & \dots & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{V \times E}, \quad b = \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e_t$$



# Algebraizálás: mátrix alak

## Definíció

$$\text{Ill}_{\vec{G}} = \begin{matrix} & & & e \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \\ & & & \text{ha } vBe \\ & & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right. & \text{ha } vKe \\ & & & \text{különben} \\ & & & \vdots \\ & & & \ddots \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \dots \\ \\ \dots \\ \\ \ddots \end{matrix} \in \mathbb{R}^{V \times E}, b = \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = e_t$$

- $\text{Ill}_{\vec{G}}$  minden oszlopában egy darab 1-es és egy darab  $-1$ -es van.

# Algebraizálás: egészértékű LP/IP

Ezek után készen állunk arra, hogy felírjuk a probléma formális alakját:

# Algebraizálás: egészértékű LP/IP

Ezek után készen állunk arra, hogy felírjuk a probléma formális alakját:

Minimalizáljuk	$\ell^T x - t$
Feltéve, hogy	$l \ell \vec{G} x = b$
	$x \succeq 0$
	$x \in \mathbb{Z}^V,$

# Algebraizálás: egészértékű LP/IP

Ezek után készen állunk arra, hogy felírjuk a probléma formális alakját:

Minimalizáljuk	$\ell^T x - t$
Feltéve, hogy	$l \ell \vec{G} x = b$
	$x \succeq 0$
	$x \in \mathbb{Z}^V,$

ahol  $\ell \in \mathbb{R}^V$  az élhosszakat tartalmazó vektor.

# Algebraizálás: egészértékű LP/IP

Ezek után készen állunk arra, hogy felírjuk a probléma formális alakját:

Minimalizáljuk	$\ell^T x - t$
Feltéve, hogy	$l \ell \xrightarrow{G} x = b$
	$x \succeq 0$
	$x \in \mathbb{Z}^V,$

ahol  $\ell \in \mathbb{R}^V$  az élhosszakat tartalmazó vektor.

- Az utolsó sortól/feltételtől eltekintve egy LP feladatot látunk.

# Algebraizálás: egészértékű LP/IP

Ezek után készen állunk arra, hogy felírjuk a probléma formális alakját:

Minimalizáljuk	$\ell^T x - t$
Feltéve, hogy	$l \ell \xrightarrow{G} x = b$
	$x \succeq 0$
	$x \in \mathbb{Z}^V,$

ahol  $\ell \in \mathbb{R}^V$  az élhosszakat tartalmazó vektor.

- Az utolsó sortól/feltételtől eltekintve egy LP feladatot látunk.
- Az utolsó sor a keresett  $x$  vektor koordinátáinak értékeiről követeli meg, hogy egészek legyenek.

# Algebraizálás: egészértékű LP/IP

Ezek után készen állunk arra, hogy felírjuk a probléma formális alakját:

Minimalizáljuk	$\ell^T x - t$
Feltéve, hogy	$l \ell \xrightarrow{G} x = b$
	$x \succeq 0$
	$x \in \mathbb{Z}^V,$

ahol  $\ell \in \mathbb{R}^V$  az élhosszakot tartalmazó vektor.

- Az utolsó sortól/feltételtől eltekintve egy LP feladatot látunk.
- Az utolsó sor a keresett  $x$  vektor koordinátáinak értékeiről követeli meg, hogy egészek legyenek.
- Ha egy lineáris célfüggvényt optimalizálunk, feltétel rendszerünk LP feltételek mellett a megoldás vektor egész koordinátájúsága, akkor a feladatot *egészértékű programozásnak* nevezzük (angolul: integer programming, röviden IP).

# IP feladat LP relaxációja

## Elnevezés

Ha egy IP feladatban elhagyjuk a változók egész koordinátájúságának feltételét, akkor egy LP feladatot kapunk, amit az eredeti IP feladat *LP relaxációjának* neveünk.



# IP feladat LP relaxációja

## Elnevezés

Ha egy IP feladatban elhagyjuk a változók egész koordinátájúságának feltételét, akkor egy LP feladatot kapunk, amit az eredeti IP feladat *LP relaxációjának* neveünk.

A legrövidebb út probléma LP relaxációja

Minimalizáljuk	$\ell^T x - t$
Feltéve, hogy	$l \ell \xrightarrow{G} x = b$
	$x \succeq 0$

# A főtételek

## Tétel

Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrixa az  $ll_{\vec{G}}$  mátrixnak. Ekkor  $\det R \in \{-1, 0, 1\}$

# A főtételek

## Tétel

Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrixa az  $ll_{\vec{c}}$  mátrixnak. Ekkor  $\det R \in \{-1, 0, 1\}$

## Definíció

Egy  $M$  mátrix totálisan unimoduláris (TU), ha tetszőleges négyzetes részmátrixának determinánsa  $\{-1, 0, 1\}$ -beli.

# A főtételek

## Tétel

Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrixa az  $Ill_{\mathcal{G}}$  mátrixnak. Ekkor  $\det R \in \{-1, 0, 1\}$

## Definíció

Egy  $M$  mátrix totálisan unimoduláris (TU), ha tetszőleges négyzetes részmátrixának determinánsa  $\{-1, 0, 1\}$ -beli.

## Tétel

$Ill_{\mathcal{G}}$  TU tulajdonságú.

# A főtétel következménye

## Következmény

Ha a korábbi

Minimalizáljuk

$$l^T x - t$$

Feltéve, hogy

$$I \ell \xrightarrow{G} x = b$$

$$x \succeq 0$$

LP relaxációt szimplex módszerrel megoldjuk, akkor a kapott optimális bázismegoldás automatikusan egész lesz.

# A következmény bizonyítása

# A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmátrixa  $r$  rangú. Tartsunk meg  $r$  lineárisan független egyenlőség feltételt.

# A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmátrixa  $r$  rangú. Tartsunk meg  $r$  lineárisan független egyenlőség feltételt. Azaz az elhagyott feltételek a meghagyottak következményei.



# A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmátrixa  $r$  rangú. Tartsunk meg  $r$  lineárisan független egyenlőség feltételt. Azaz az elhagyott feltételek a meghagyottak következményei. A teljes sorrangú mátrix legyen  $A$ , a megmaradt konstansok vektora legyen  $b_0$ .

# A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmátrixa  $r$  rangú. Tartsunk meg  $r$  lineárisan független egyenlőség feltételt. Azaz az elhagyott feltételek a meghagyottak következményei. A teljes sorrangú mátrix legyen  $A$ , a megmaradt konstansok vektora legyen  $b_0$ .
- A szimplex módszer garantáltan egy optimális bázismegoldással áll le. Legyen  $B$  a bázisváltozók halmaza. Vele együtt  $K$  a bázison kívüli változók halmaza.

# A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmátrixa  $r$  rangú. Tartsunk meg  $r$  lineárisan független egyenlőség feltételt. Azaz az elhagyott feltételek a meghagyottak következményei. A teljes sorrangú mátrix legyen  $A$ , a megmaradt konstansok vektora legyen  $b_0$ .
- A szimplex módszer garantáltan egy optimális bázismegoldással áll le. Legyen  $B$  a bázisváltozók halmaza. Vele együtt  $K$  a bázison kívüli változók halmaza.
- Legyen  $A_B$ ,  $A_N$  az  $A$  mátrix azon résznmátrixa, amelyet indexei által leírt oszlopok alkotnak.

# A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmátrixa  $r$  rangú. Tartsunk meg  $r$  lineárisan független egyenlőség feltételt. Azaz az elhagyott feltételek a meghagyottak következményei. A teljes sorrangú mátrix legyen  $A$ , a megmaradt konstansok vektora legyen  $b_0$ .
- A szimplex módszer garantáltan egy optimális bázismegoldással áll le. Legyen  $B$  a bázisváltozók halmaza. Vele együtt  $K$  a bázison kívüli változók halmaza.
- Legyen  $A_B$ ,  $A_N$  az  $A$  mátrix azon részmátrixa, amelyet indexei által leírt oszlopok alkotnak. Így  $A_B$  egy  $r \times r$  méretű mátrix.  $x_B$ , illetve  $x_N$  a bázisváltozók, illetve bázison kívüli változók vektora.

# A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmatrixa  $r$  rangú. Tartsunk meg  $r$  lineárisan független egyenlőség feltételt. Azaz az elhagyott feltételek a meghagyottak következményei. A teljes sorrangú mátrix legyen  $A$ , a megmaradt konstansok vektora legyen  $b_0$ .
- A szimplex módszer garantáltan egy optimális bázismegoldással áll le. Legyen  $B$  a bázisváltozók halmaza. Vele együtt  $K$  a bázison kívüli változók halmaza.
- Legyen  $A_B$ ,  $A_N$  az  $A$  mátrix azon részmatrixa, amelyet indexei által leírt oszlopok alkotnak. Így  $A_B$  egy  $r \times r$  méretű mátrix.  $x_B$ , illetve  $x_N$  a bázisváltozók, illetve bázison kívüli változók vektora.
- Az utolsó szótárat felírhatjuk.

# A következmény bizonyítása

- Tegyük fel, hogy az egyenletrendszer feltételmátrixa  $r$  rangú. Tartsunk meg  $r$  lineárisan független egyenlőség feltételt. Azaz az elhagyott feltételek a megmaradtak következményei. A teljes sorrangú mátrix legyen  $A$ , a megmaradt konstansok vektora legyen  $b_0$ .
- A szimplex módszer garantáltan egy optimális bázismegoldással áll le. Legyen  $B$  a bázisváltozók halmaza. Vele együtt  $K$  a bázison kívüli változók halmaza.
- Legyen  $A_B, A_N$  az  $A$  mátrix azon résznmátrixa, amelyet indexei által leírt oszlopok alkotnak. Így  $A_B$  egy  $r \times r$  méretű mátrix.  $x_B$ , illetve  $x_N$  a bázisváltozók, illetve bázison kívüli változók vektora.
- Az utolsó szótárat felírhatjuk. Az  $Ax = b_0$  feltételt balról  $A_B^{-1}$ -gyel szorozhatjuk:

$$x_B + A_B^{-1}A_Kx_K = A_B^{-1}A_Bx_B + A_B^{-1}A_Kx_K = A_B^{-1} \cdot Ax = A_B^{-1} \cdot b_0.$$

# Bizonyítás (folytatás)

# Bizonyítás (folytatás)

- Tehát az utolsó szótár

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0 - A_B^{-1} A_K x_K.$$



# Bizonyítás (folytatás)

- Tehát az utolsó szótár

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0 - A_B^{-1} A_K x_K.$$

- Az optimális bázismegoldás

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0, \quad x_K = 0.$$

# Bizonyítás (folytatás)

- Tehát az utolsó szótár

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0 - A_B^{-1} A_K x_K.$$

- Az optimális bázismegoldás

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0, \quad x_K = 0.$$

- $A_B$  az  $Ill_{\mathbb{C}} \rightarrow$  TU tulajdonságú mátrix egy nem elfajuló négyzetes részmátrixa.

# Bizonyítás (folytatás)

- Tehát az utolsó szótár

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0 - A_B^{-1} A_K x_K.$$

- Az optimális bázismegoldás

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0, \quad x_K = 0.$$

- $A_B$  az  $Ill_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$  TU tulajdonságú mátrix egy nem elfajuló négyzetes részmátrixa.
- Az főtétel alapján  $\det A_B \in \{-1, 1\}$ .

# Bizonyítás (folytatás)

- Tehát az utolsó szótár

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0 - A_B^{-1} A_K x_K.$$

- Az optimális bázismegoldás

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0, \quad x_K = 0.$$

- $A_B$  az  $l \times l \xrightarrow{G}$  TU tulajdonságú mátrix egy nem elfajuló négyzetes részmátrixa.
- Az főtétel alapján  $\det A_B \in \{-1, 1\}$ .
- A Cramer-szabály alapján  $A_B^{-1}$  egy egész számokból álló mátrix.

# Bizonyítás (folytatás)

- Tehát az utolsó szótár

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0 - A_B^{-1} A_K x_K.$$

- Az optimális bázismegoldás

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0, \quad x_K = 0.$$

- $A_B$  az  $Ill_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$  TU tulajdonságú mátrix egy nem elfajuló négyzetes részmátrixa.
- Az főtétel alapján  $\det A_B \in \{-1, 1\}$ .
- A Cramer-szabály alapján  $A_B^{-1}$  egy egész számokból álló mátrix.
- Készen vagyunk. A

$$x_B = A_B^{-1} \cdot b_0, \quad x_K = 0.$$

képlet egy egész vektort ír le.

# $III \xrightarrow{G}$ sor-független részmatrixa

# $ll_{\vec{G}}$ sor-független részmatrixa

## Észrevétel

$ll_{\vec{G}}$  sorainak összege  $0 \in \mathbb{R}^V$ . Azaz sorai nem függetlenek.

# $III_{\vec{G}}$ sor-független részmatrixa

## Észrevétel

$III_{\vec{G}}$  sorainak összege  $0 \in \mathbb{R}^V$ . Azaz sorai nem függetlenek.

Az észrevétel alapján a szimplex módszer feltételei nem teljesülnek.



# $ll_{\vec{G}}$ sor-független részmatrixa

## Észrevétel

$ll_{\vec{G}}$  sorainak összege  $0 \in \mathbb{R}^V$ . Azaz sorai nem függetlenek.

Az észrevétel alapján a szimplex módszer feltételei nem teljesülnek.

## Lemma

$ll_{\vec{G}}$  rangja  $|V| - 1$ .

# $III_{\vec{G}}$ sor-független részmatrixa

## Észrevétel

$III_{\vec{G}}$  sorainak összege  $0 \in \mathbb{R}^V$ . Azaz sorai nem függetlenek.

Az észrevétel alapján a szimplex módszer feltételei nem teljesülnek.

## Lemma

$III_{\vec{G}}$  rangja  $|V| - 1$ .

Mivel a sorok közt felismert lineáris összefüggésben mindegyik sor nemnulla együtthatóval szerepel, ezért  $III_{\vec{G}}$  bármelyik sorát elhagyva teljes sorrangú mátrixot kapunk.

# $ll_{\vec{G}}$ sor-független részmatrixa

## Észrevétel

$ll_{\vec{G}}$  sorainak összege  $0 \in \mathbb{R}^V$ . Azaz sorai nem függetlenek.

Az észrevétel alapján a szimplex módszer feltételei nem teljesülnek.

## Lemma

$ll_{\vec{G}}$  rangja  $|V| - 1$ .

Mivel a sorok közt felismert lineáris összefüggésben mindegyik sor nemnulla együtthatóval szerepel, ezért  $ll_{\vec{G}}$  bármelyik sorát elhagyva teljes sorrangú mátrixot kapunk.

## Jelölés

$ll_{\vec{G}}^{-s}$  az  $ll_{\vec{G}}$  mátrixból az  $s$  csúcs elhagyásával kapott mátrixot jelöli.

# $III_{\vec{G}}$ sor-független részmatrixa

## Észrevétel

$III_{\vec{G}}$  sorainak összege  $0 \in \mathbb{R}^V$ . Azaz sorai nem függetlenek.

Az észrevétel alapján a szimplex módszer feltételei nem teljesülnek.

## Lemma

$III_{\vec{G}}$  rangja  $|V| - 1$ .

Mivel a sorok közt felismert lineáris összefüggésben mindegyik sor nemnulla együtthatóval szerepel, ezért  $III_{\vec{G}}$  bármelyik sorát elhagyva teljes sorrangú mátrixot kapunk.

## Jelölés

$III_{\vec{G}}^{-s}$  az  $III_{\vec{G}}$  mátrixból az  $s$  csúcs elhagyásával kapott mátrixot jelöli.  $b^{-s} = e_t$  azt a vektort jelöli, amelyet  $b$ -ből kapunk az  $s$ -nek megfelelő komponens elhagyásával.

# Lemma bizonyítása

# Lemma bizonyítása

- Feltettük, hogy  $\vec{G}$ -ben minden csúcs elérhető irányított úttal  $s$ -ből kiindulva.

# Lemma bizonyítása

- Feltettük, hogy  $\vec{G}$ -ben minden csúcs elérhető irányított úttal  $s$ -ből kiindulva.
- Így az  $s$ -ből indított szélességi keresés az összes csúcst eléri.

# Lemma bizonyítása

- Feltettük, hogy  $\vec{G}$ -ben minden csúcs elérhető irányított úttal  $s$ -ből kiindulva.
- Így az  $s$ -ből indított szélességi keresés az összes csúcsot eléri. A szélességi kereső fa minden csúcsot tartalmaz.



# Lemma bizonyítása

- Feltettük, hogy  $\vec{G}$ -ben minden csúcs elérhető irányított úttal  $s$ -ből kiindulva.
- Így az  $s$ -ből indított szélességi keresés az összes csúcsot eléri. A szélességi kereső fa minden csúcsot tartalmaz. A szélességi kereső fának  $|V| - 1$  éle van.

# Lemma bizonyítása

- Feltettük, hogy  $\vec{G}$ -ben minden csúcs elérhető irányított úttal  $s$ -ből kiindulva.
- Így az  $s$ -ből indított szélességi keresés az összes csúcsot eléri. A szélességi kereső fa minden csúcsot tartalmaz. A szélességi kereső fának  $|V| - 1$  éle van.
- Tegyük fel, hogy a szélességi kereső fába az  $s$ -től különböző csúcsok és élek  $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{|V|-1}, e_{|V|-1}$  sorrendben kerülnek be.

# Bizonyítás (folytatás)

# Bizonyítás (folytatás)

- Ekkor  $ll_{\vec{G}}$ -nek

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 \vdots \\
 v_{|V|-1}
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 e_1 & e_2 & \dots & e_{|V|-1} \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 1 & ? & \dots & ? \\
 0 & 1 & \dots & ? \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \in \mathbb{R}^{(V-\{s\}) \times (V-\{s\})}.$$

részmátrixa.

# Bizonyítás (folytatás)

- Ekkor  $ll_{\vec{G}}$ -nek

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 \vdots \\
 v_{|V|-1}
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 e_1 & e_2 & \dots & e_{|V|-1} \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 1 & ? & \dots & ? \\
 0 & 1 & \dots & ? \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \in \mathbb{R}^{(V-\{s\}) \times (V-\{s\})}.$$

részmátrixa.

- Az algoritmus alapján ez egy felső trianguláris mátrix 1-esekkel a főátlón.

# Bizonyítás (folytatás)

- Ekkor  $ll_{\vec{G}}$ -nek

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 \vdots \\
 v_{|V|-1}
 \end{array}
 \begin{array}{cccc}
 e_1 & e_2 & \dots & e_{|V|-1} \\
 \left( \begin{array}{cccc}
 1 & ? & \dots & ? \\
 0 & 1 & \dots & ? \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \in \mathbb{R}^{(V-\{s\}) \times (V-\{s\})}.$$

részmátrixa.

- Az algoritmus alapján ez egy felső trianguláris mátrix 1-esekkel a főátlón.
- Tehát  $ll_{\vec{G}}$  rangja legalább  $|V| - 1$ .

# Bizonyítás (folytatás)

- Ekkor  $ll_{\vec{G}}$ -nek

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 \vdots \\
 v_{|V|-1}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 e_1 & e_2 & \dots & e_{|V|-1} \\
 1 & ? & \dots & ? \\
 0 & 1 & \dots & ? \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1
 \end{pmatrix}
 \in \mathbb{R}^{(V-\{s\}) \times (V-\{s\})}.$$

részmátrixa.

- Az algoritmus alapján ez egy felső trianguláris mátrix 1-esekkel a főátlón.
- Tehát  $ll_{\vec{G}}$  rangja legalább  $|V| - 1$ . Tudjuk, hogy  $ll_{\vec{G}}$  rangja kisebb mint  $|V|$ .

# Bizonyítás (folytatás)

- Ekkor  $ll_{\vec{G}}$ -nek

$$\begin{array}{c}
 v_1 \\
 v_2 \\
 \vdots \\
 v_{|V|-1}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & e_1 & e_2 & \dots & e_{|V|-1} \\
 1 & ? & \dots & ? \\
 0 & 1 & \dots & ? \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 1
 \end{pmatrix}
 \in \mathbb{R}^{(V-\{s\}) \times (V-\{s\})}.$$

részmátrixa.

- Az algoritmus alapján ez egy felső trianguláris mátrix 1-esekkel a főátlón.
- Tehát  $ll_{\vec{G}}$  rangja legalább  $|V| - 1$ . Tudjuk, hogy  $ll_{\vec{G}}$  rangja kisebb mint  $|V|$ . A Lemma állítása adódott.



# A főtételek bizonyítása

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló.

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$  eset:

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$  eset:
  1. eset:  $R$  egyik oszlopában nincs nemnulla elem.

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$  eset:
  1. eset:  $R$  egyik oszlopában nincs nemnulla elem.  
Lineáris algebra alapján  $\det R = 0$ .

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$  eset:
  1. eset:  $R$  egyik oszlopában nincs nemnulla elem.  
Lineáris algebra alapján  $\det R = 0$ .
  2. eset:  $R$  egyik oszlopában egyetlen nemnulla elem van.



# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$  eset:
  1. eset:  $R$  egyik oszlopában nincs nemnulla elem.  
Lineáris algebra alapján  $\det R = 0$ .
  2. eset:  $R$  egyik oszlopában egyetlen nemnulla elem van.  
Eszert az oszlop szerint kifejtve  $\det R$ -et és alkalmazva az indukciós feltevést adódik az állítás.

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$  eset:
  1. eset:  $R$  egyik oszlopában nincs nemnulla elem.  
Lineáris algebra alapján  $\det R = 0$ .
  2. eset:  $R$  egyik oszlopában egyetlen nemnulla elem van.  
Eszert az oszlop szerint kifejtve  $\det R$ -et és alkalmazva az indukciós feltevést adódik az állítás.
  3. eset:  $R$  mindegyik oszlopában két nemnulla elem van.

# A főtételek bizonyítása

- Legyen  $R$  egy tetszőleges négyzetes részmátrix. Legyen  $R$  egy  $k \times k$  méretű mátrix
- $k$ -ra vonatkozó teljes indukciót végzünk.
- $k = 1$  esetben az állítás nyilvánvaló.
- $k > 1$  eset:
  1. eset:  $R$  egyik oszlopában nincs nemnulla elem.  
Lineáris algebra alapján  $\det R = 0$ .
  2. eset:  $R$  egyik oszlopában egyetlen nemnulla elem van.  
Eszerint az oszlop szerint kifejtve  $\det R$ -et és alkalmazva az indukciós feltevést adódik az állítás.
  3. eset:  $R$  mindegyik oszlopában két nemnulla elem van.  
Az  $R$ -beli sorok összege 0, lineáris algebra alapján  $\det R = 0$ .

# Az LP algoritmus

LP algoritmus a legrövidebb út problémára

# Az LP algoritmus

## LP algoritmus a legrövidebb út problémára

(1) Írjuk fel a legrövidebb út IP formalizálásának LP relaxációját.

# Az LP algoritmus

## LP algoritmus a legrövidebb út problémára

- (1) Írjuk fel a legrövidebb út IP formalizálásának LP relaxációját.
- (2) Hagyjuk el az  $s$  csúcsra vonatkozó egyenletet, hogy az LP probléma mátrixa teljes sorrangú legyen.

# Az LP algoritmus

## LP algoritmus a legrövidebb út problémára

- (1) Írjuk fel a legrövidebb út IP formalizálásának LP relaxációját.
- (2) Hagyjuk el az  $s$  csúcsra vonatkozó egyenletet, hogy az LP probléma mátrixa teljes sorrangú legyen.
- (3) Futassuk a szimplex módszert.

# Az LP algoritmus

## LP algoritmus a legrövidebb út problémára

- (1) Írjuk fel a legrövidebb út IP formalizálásának LP relaxációját.
- (2) Hagyjuk el az  $s$  csúcsra vonatkozó egyenletet, hogy az LP probléma mátrixa teljes sorrangú legyen.
- (3) Futassuk a szimplex módszert. Szükségszerű a szimplex módszer sikeresen álljon le.



# Az LP algoritmus

## LP algoritmus a legrövidebb út problémára

- (1) Írjuk fel a legrövidebb út IP formalizálásának LP relaxációját.
- (2) Hagyjuk el az  $s$  csúcsra vonatkozó egyenletet, hogy az LP probléma mátrixa teljes sorrangú legyen.
- (3) Futassuk a szimplex módszert. Szükségszerű a szimplex módszer sikeresen álljon le. Az optimális bázismegoldás garantáltan egész koordinátájú lesz (főtétele következménye).

# Az LP algoritmus

## LP algoritmus a legrövidebb út problémára

- (1) Írjuk fel a legrövidebb út IP formalizálásának LP relaxációját.
- (2) Hagyjuk el az  $s$  csúcsra vonatkozó egyenletet, hogy az LP probléma mátrixa teljes sorrangú legyen.
- (3) Futassuk a szimplex módszert. Szükségszerű a szimplex módszer sikeresen álljon le. Az optimális bázismegoldás garantáltan egész koordinátájú lesz (főtétele következménye). Az optimális  $st$ -séta egy út, így a bázismegoldás szükségszerűen 0-1 koordinátájú. Azaz szimplex módszer outputja egy élhalmaz karakterisztikus vektora.

# Az LP algoritmus

## LP algoritmus a legrövidebb út problémára

- (1) Írjuk fel a legrövidebb út IP formalizálásának LP relaxációját.
- (2) Hagyjuk el az  $s$  csúcsra vonatkozó egyenletet, hogy az LP probléma mátrixa teljes sorrangú legyen.
- (3) Futassuk a szimplex módszert. Szükségszerű a szimplex módszer sikeresen álljon le. Az optimális bázismegoldás garantáltan egész koordinátájú lesz (főtétele következménye). Az optimális  $st$ -séta egy út, így a bázismegoldás szükségszerűen 0-1 koordinátájú. Azaz szimplex módszer outputja egy élhalmaz karakterisztikus vektora.
- (4) A szimplex módszer outputja által leírt élhalmazból „kiolvassuk” az optimális  $st$  utat.

# Szünet



# Az alapötlet

# Az alapötlet

- Egy általánosabb problémát vizsgálunk.

# Az alapötlet

- Egy általánosabb problémát vizsgálunk.
- Legyen  $s \in S \subset V(\vec{G})$  egy csúcshalmaz. Erre az  $S$  csúcshalmazra a következő problémát tűzzük ki

# Az alapötlet

- Egy általánosabb problémát vizsgálunk.
- Legyen  $s \in S \subset V(\vec{G})$  egy csúcshalmaz. Erre az  $S$  csúcshalmazra a következő problémát tűzzük ki
  - (i) Ha  $v \in S$ , akkor határozzuk meg a legrövidebb  $\vec{sv}$  utat  $S$ -en belül.



# Az alapötlet

- Egy általánosabb problémát vizsgálunk.
- Legyen  $s \in S \subset V(\vec{G})$  egy csúcshalmaz. Erre az  $S$  csúcshalmazra a következő problémát tűzzük ki
  - (i) Ha  $v \in S$ , akkor határozzuk meg a legrövidebb  $\vec{s}v$  utat  $S$ -en belül.
  - (ii) Ha  $v \notin S$ , akkor határozzuk meg a legrövidebb  $\vec{s}v$  utat, amely  $S$ -en belül halad, kivéve az utolsó lépését (ami persze  $v$ -be,  $S$ -en kívülre lép).

# Az alapötlet

- Egy általánosabb problémát vizsgálunk.
- Legyen  $s \in S \subset V(\vec{G})$  egy csúcshalmaz. Erre az  $S$  csúcshalmazra a következő problémát tűzzük ki
  - (i) Ha  $v \in S$ , akkor határozzuk meg a legrövidebb  $\vec{sv}$  utat  $S$ -en belül.
  - (ii) Ha  $v \notin S$ , akkor határozzuk meg a legrövidebb  $\vec{sv}$  utat, amely  $S$ -en belül halad, kivéve az utolsó lépését (ami persze  $v$ -be,  $S$ -en kívülre lép).
- A megoldást úgy képzelhetjük, hogy minden csúcshoz egy „címkét” gondolunk, ami a kért információkat tartalmazza.

# Az alapötlet

- Egy általánosabb problémát vizsgálunk.
- Legyen  $s \in S \subset V(\vec{G})$  egy csúcshalmaz. Erre az  $S$  csúcshalmazra a következő problémát tűzzük ki
  - (i) Ha  $v \in S$ , akkor határozzuk meg a legrövidebb  $\vec{s}v$  utat  $S$ -en belül.
  - (ii) Ha  $v \notin S$ , akkor határozzuk meg a legrövidebb  $\vec{s}v$  utat, amely  $S$ -en belül halad, kivéve az utolsó lépését (ami persze  $v$ -be,  $S$ -en kívülre lép).
- A megoldást úgy képzelhetjük, hogy minden csúcshoz egy „címkét” gondolunk, ami a kért információkat tartalmazza.
- $2^{|V|-1}$  feladatot tűztünk ki, az egyetlen kiinduló kérdés helyett ( $S = V(\vec{G})$ ).

# Az alapötlet (folytatás)

# Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.)

# Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.)  
Csupán jól kiválasztott  $|V|$  darab feladatot oldunk meg.

# Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.) Csupán jól kiválasztott  $|V|$  darab feladatot oldunk meg.
- A kiinduló feladat  $S = \{s\}$  lesz, ami nagyon egyszerű. A megoldásra mint egy „kiinduló címkézés” gondolunk.

# Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.) Csupán jól kiválasztott  $|V|$  darab feladatot oldunk meg.
- A kiinduló feladat  $S = \{s\}$  lesz, ami nagyon egyszerű. A megoldásra mint egy „kiinduló címkézés” gondolunk.
- A megoldás lényege, hogyan tűzzük ki az új feladatot és hogyan számoljuk ki megoldását.



# Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.) Csupán jól kiválasztott  $|V|$  darab feladatot oldunk meg.
- A kiinduló feladat  $S = \{s\}$  lesz, ami nagyon egyszerű. A megoldásra mint egy „kiinduló címkézés” gondolunk.
- A megoldás lényege, hogyan tűzzük ki az új feladatot és hogyan számoljuk ki megoldását.
- Mindig növelni fogjuk az aktuális  $S$  halmazt.

# Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.) Csupán jól kiválasztott  $|V|$  darab feladatot oldunk meg.
- A kiinduló feladat  $S = \{s\}$  lesz, ami nagyon egyszerű. A megoldásra mint egy „kiinduló címkézés” gondolunk.
- A megoldás lényege, hogyan tűzzük ki az új feladatot és hogyan számoljuk ki megoldását.
- Mindig növelni fogjuk az aktuális  $S$  halmazzt. Az új feladat megoldására mint „a címkézés update-eléseként” hivatkozunk.

# Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.) Csupán jól kiválasztott  $|V|$  darab feladatot oldunk meg.
- A kiinduló feladat  $S = \{s\}$  lesz, ami nagyon egyszerű. A megoldásra mint egy „kiinduló címkézés” gondolunk.
- A megoldás lényege, hogyan tűzzük ki az új feladatot és hogyan számoljuk ki megoldását.
- Mindig növelni fogjuk az aktuális  $S$  halmazzt. Az új feladat megoldására mint „a címkézés update-eléseként” hivatkozunk.
- A növekedés során az  $S$ -beli címkék a globális legrövidebb út hosszát adják meg.

# Az alapötlet (folytatás)

- Nem oldjuk meg az összes feladatot. (Az nem is lenne hatékony.) Csupán jól kiválasztott  $|V|$  darab feladatot oldunk meg.
- A kiinduló feladat  $S = \{s\}$  lesz, ami nagyon egyszerű. A megoldásra mint egy „kiinduló címkézés” gondolunk.
- A megoldás lényege, hogyan tűzzük ki az új feladatot és hogyan számoljuk ki megoldását.
- Mindig növelni fogjuk az aktuális  $S$  halmazzt. Az új feladat megoldására mint „a címkézés update-eléseként” hivatkozunk.
- A növekedés során az  $S$ -beli címkék a globális legrövidebb út hosszát adják meg.
- Az  $S = V(\vec{G})$  esetén megoldjuk a legrövidebb út problémáját.

# Dijkstra-algoritmus

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .



# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \in E$  esetén  $c(v) = \ell(\vec{sv})$ .

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \in E$  esetén  $c(v) = \ell(\vec{sv})$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \notin E$  esetén  $c(v) = \infty$ .

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \in E$  esetén  $c(v) = \ell(\vec{sv})$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \notin E$  esetén  $c(v) = \infty$ .

(B) // Bővítés

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

### (I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \in E$  esetén  $c(v) = \ell(\vec{sv})$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \notin E$  esetén  $c(v) = \infty$ .

### (B) // Bővítés

Legyen  $m \notin S$  azon (egyik) csúcs, amely címkéje a legkisebb az  $S$  halmazon kívül.

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

### (I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \in E$  esetén  $c(v) = \ell(\vec{sv})$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \notin E$  esetén  $c(v) = \infty$ .

### (B) // Bővítés

Legyen  $m \notin S$  azon (egyik) csúcs, amely címkéje a legkisebb az  $S$  halmazon kívül.

$S \leftarrow S \cup \{m\}$ .

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \in E$  esetén  $c(v) = \ell(\vec{sv})$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \notin E$  esetén  $c(v) = \infty$ .

(B) // Bővítés

Legyen  $m \notin S$  azon (egyik) csúcs, amely címkéje a legkisebb az  $S$  halmazon kívül.

$S \leftarrow S \cup \{m\}$ .

(U) // Update

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \in E$  esetén  $c(v) = \ell(\vec{sv})$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \notin E$  esetén  $c(v) = \infty$ .

(B) // Bővítés

Legyen  $m \notin S$  azon (egyik) csúcs, amely címkéje a legkisebb az  $S$  halmazon kívül.

$S \leftarrow S \cup \{m\}$ .

(U) // Update

Csak azon  $n \notin S$  csúcsok címkéje változhat, amelyekre  $\vec{mh} \in E$ :

$$c_{\text{új}}(n) = \min\{c_{\text{régi}}(n), c(m) + \ell(\vec{mh})\}.$$

# Dijkstra-algoritmus

## Dijkstra-algoritmus

(I) // Inicializálás

Legyen  $S = \{s\}$ ,  $c(s) = 0$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \in E$  esetén  $c(v) = \ell(\vec{sv})$ .

$v \notin S$ ,  $\vec{sv} \notin E$  esetén  $c(v) = \infty$ .

(B) // Bővítés

Legyen  $m \notin S$  azon (egyik) csúcs, amely címkéje a legkisebb az  $S$  halmazon kívül.

$S \leftarrow S \cup \{m\}$ .

(U) // Update

Csak azon  $n \notin S$  csúcsok címkéje változhat, amelyekre  $\vec{mh} \in E$ :

$$c_{\text{új}}(n) = \min\{c_{\text{régi}}(n), c(m) + \ell(\vec{mh})\}.$$

Vissza a (B) lépéshez.



# Az algoritmus helyessége

# Az algoritmus helyessége

## Tétel

A Dijkstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

# Az algoritmus helyessége

## Tétel

A Dijkstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

- (i)  $S$ -beli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát (amely optimum  $S$ -en belül is megvalósítható)

# Az algoritmus helyessége

## Tétel

A Dijkstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

- (i)  $S$ -beli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát (amely optimum  $S$ -en belül is megvalósítható)
- (ii)  $S$ -en kívüli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát azon utak között, amelyek az utolsó csúcs kivételével  $S$ -en belül haladnak.

# Az algoritmus helyessége

## Tétel

A Dijkstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

- (i)  $S$ -beli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát (amely optimum  $S$ -en belül is megvalósítható)
- (ii)  $S$ -en kívüli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát azon utak között, amelyek az utolsó csúcs kivételével  $S$ -en belül haladnak.

- $|S|$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

# Az algoritmus helyessége

## Tétel

A Dijkstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

- (i)  $S$ -beli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát (amely optimum  $S$ -en belül is megvalósítható)
- (ii)  $S$ -en kívüli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát azon utak között, amelyek az utolsó csúcs kivételével  $S$ -en belül haladnak.

- $|S|$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.  $|S| = 1$  eset nyilvánvaló.

# Az algoritmus helyessége

## Tétel

A Dijkstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

- (i)  $S$ -beli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát (amely optimum  $S$ -en belül is megvalósítható)
- (ii)  $S$ -en kívüli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát azon utak között, amelyek az utolsó csúcs kivételével  $S$ -en belül haladnak.

- $|S|$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.  $|S| = 1$  eset nyilvánvaló.
- Egy update után csak a következő két állítást kell belátni:

# Az algoritmus helyessége

## Tétel

A Dijkstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

- (i)  $S$ -beli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát (amely optimum  $S$ -en belül is megvalósítható)
- (ii)  $S$ -en kívüli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát azon utak között, amelyek az utolsó csúcs kivételével  $S$ -en belül haladnak.

- $|S|$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.  $|S| = 1$  eset nyilvánvaló.
- Egy update után csak a következő két állítást kell belátni:
  - (i)  $m$  címkéje korrekt,



# Az algoritmus helyessége

## Tétel

A Dijkstra-algoritmusában az eredeti és minden update-elt címkézés

- (i)  $S$ -beli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát (amely optimum  $S$ -en belül is megvalósítható)
- (ii)  $S$ -en kívüli értékei megadják az odavezető legrövidebb út hosszát azon utak között, amelyek az utolsó csúcs kivételével  $S$ -en belül haladnak.

- $|S|$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.  $|S| = 1$  eset nyilvánvaló.
- Egy update után csak a következő két állítást kell belátni:
  - (i)  $m$  címkéje korrekt,
  - (ii)  $x \notin S$  címkéje korrekt.

# Bizonyítás

# Bizonyítás

## Kezdeti észrevétel

Minden  $s$ -ből induló  $s \in X$ -en kívülre vezető utat „szétszedhetünk” három részre az alábbi módon:

# Bizonyítás

## Kezdeti észrevétel

Minden  $s$ -ből induló  $s \in X$ -en kívülre vezető utat „szétszedhetünk” három részre az alábbi módon:

$X$ -ben haladó kezdeti rész „+” kilépés  $X$ -ből „+” további rész.

# Bizonyítás

## Kezdeti észrevétel

Minden  $s$ -ből induló  $s \in X$ -en kívülre vezető utat „szétszedhetünk” három részre az alábbi módon:

$X$ -ben haladó kezdeti rész „+” kilépés  $X$ -ből „+” további rész.

★

# Bizonyítás

## Kezdeti észrevétel

Minden  $s$ -ből induló  $s \in X$ -en kívülre vezető utat „szétszedhetünk” három részre az alábbi módon:

$X$ -ben haladó kezdeti rész „+” kilépés  $X$ -ből „+” további rész.

★

$m$ :  $m \notin S_{\text{rég}}$ . Így tetszőleges  $\overrightarrow{sm}$ -utat „szétszedhetjük” a fenti módon.  $S_{\text{rég}}$ -ben haladó rész „+” kilépés  $S_{\text{rég}}$ -ből „+” utolsó rész.

# Bizonyítás

## Kezdeti észrevétel

Minden  $s$ -ből induló  $s \in X$ -en kívülre vezető utat „szétszedhetünk” három részre az alábbi módon:

$X$ -ben haladó kezdeti rész „+” kilépés  $X$ -ből „+” további rész.

★

$m$ :  $m \notin S_{\text{rég}}i$ . Így tetszőleges  $\overrightarrow{sm}$ -utat „szétszedhetjük” a fenti módon.  $S_{\text{rég}}i$ -ben haladó rész „+” kilépés  $S_{\text{rég}}i$ -ből „+” utolsó rész.

**1. eset:** Amikor az utolsó rész nemüres, akkor a megfelelő út hossza nagyobb mint  $m$  címkéje ( $\ell$  pozitív értékű és  $m$ -et speciális módon választottuk).

# Bizonyítás

## Kezdeti észrevétel

Minden  $s$ -ből induló  $s \in X$ -en kívülre vezető utat „szétszedhetünk” három részre az alábbi módon:

$X$ -ben haladó kezdeti rész „+” kilépés  $X$ -ből „+” további rész.

★

$m$ :  $m \notin S_{\text{rég}}i$ . Így tetszőleges  $\overrightarrow{sm}$ -utat „szétszedhetjük” a fenti módon.  $S_{\text{rég}}i$ -ben haladó rész „+” kilépés  $S_{\text{rég}}i$ -ből „+” utolsó rész.

**1. eset:** Amikor az utolsó rész nemüres, akkor a megfelelő út hossza nagyobb mint  $m$  címkéje ( $\ell$  pozitív értékű és  $m$ -et speciális módon választottuk).

**2. eset:** Amikor az utolsó rész üres, akkor a megfelelő címke az indukciós feltevés miatt korrekt.



# Bizonyítás (folytatás)

# Bizonyítás (folytatás)

$x \notin S$ : Tetszőleges  $\vec{s\bar{x}}$ -utat „szétszedhetjük” a fenti módon.

# Bizonyítás (folytatás)

$x \notin S$ : Tetszőleges  $\vec{s\bar{x}}$ -utat „szétszedhetjük” a fenti módon. Csak azok az utak érdekelnek, amely utolsó része üres. Ismét két esetet vizsgálunk.

# Bizonyítás (folytatás)

$x \notin S$ : Tetszőleges  $\vec{s\bar{x}}$ -utat „szétszedhetjük” a fenti módon. Csak azok az utak érdekelnek, amely utolsó része üres. Ismét két esetet vizsgálunk.

**1. eset:** A kilépés nem  $m$ -ből történik. Ekkor  $c_{\text{régi}}(x)$  az indukciós lépés alapján becsli a hosszat.

# Bizonyítás (folytatás)

$x \notin S$ : Tetszőleges  $\overrightarrow{sx}$ -utat „szétszedhetjük” a fenti módon. Csak azok az utak érdekelnek, amely utolsó része üres. Ismét két esetet vizsgálunk.

- 1. eset:** A kilépés nem  $m$ -ből történik. Ekkor  $c_{\text{régi}}(x)$  az indukciós lépés alapján becsli a hosszat.
- 2. eset:** A kilépés  $m$ -ből történik. Ekkor  $c(m) + \ell(\overrightarrow{mx})$  becsli a hosszat.

# Bizonyítás (folytatás)

$x \notin S$ : Tetszőleges  $\overrightarrow{sx}$ -utat „szétszedhetjük” a fenti módon. Csak azok az utak érdekelnek, amely utolsó része üres. Ismét két esetet vizsgálunk.

**1. eset:** A kilépés nem  $m$ -ből történik. Ekkor  $c_{\text{régi}}(x)$  az indukciós lépés alapján becsli a hosszat.

**2. eset:** A kilépés  $m$ -ből történik. Ekkor  $c(m) + \ell(\overrightarrow{mx})$  becsli a hosszat.

Az update-elt címke optimális értéket ad.

# Az algoritmus elemzése

# Az algoritmus elemzése

- Nyilván legfeljebb  $|V| - 1$ -szer végzünk el bővítő lépést.



# Az algoritmus elemzése

- Nyilván legfeljebb  $|V| - 1$ -szer végzünk el bővítő lépést.
- Nyilván legfeljebb  $|E|$ -szer végzünk számításokat, amik címke átíráshoz vezethetnek.

# Az algoritmus elemzése

- Nyilván legfeljebb  $|V| - 1$ -szer végzünk el bővítő lépést.
- Nyilván legfeljebb  $|E|$ -szer végzünk számításokat, amik címke átíráshoz vezethetnek.
- Az algoritmus lépésigénye

$$\mathcal{O}(|V| \cdot |E|).$$

# Az algoritmus elemzése

- Nyilván legfeljebb  $|V| - 1$ -szer végzünk el bővítő lépést.
- Nyilván legfeljebb  $|E|$ -szer végzünk számításokat, amik címke átíráshoz vezethetnek.
- Az algoritmus lépésigénye

$$\mathcal{O}(|V| \cdot |E|).$$

- Van „okosabb” algoritmus is.

# Végső megjegyzések

# Végső megjegyzések

- Minden véges címke mögött lehet egy él, amely azt jelenti, hogy „hogyan jutottunk ide”.

# Végső megjegyzések

- Minden véges címke mögött lehet egy él, amely azt jelenti, hogy „hogyan jutottunk ide”.
- Ha egy update megváltoztatja a címke értékét, akkor a jelző élt is megváltoztatjuk az algoritmus logikája szerint.

# Végső megjegyzések

- Minden véges címke mögött lehet egy él, amely azt jelenti, hogy „hogyan jutottunk ide”.
- Ha egy update megváltoztatja a címke értékét, akkor a jelző élt is megváltoztatjuk az algoritmus logikája szerint.
- Az algoritmus végén a szélességi kereső fa egy súlyozott változatát is megkapjuk.

# Szünet





# Az LP elmélet alkalmazása

# Az LP elmélet alkalmazása

Dualizáljuk a legrövidebb út problémáját leíró LP relaxációt (P)/(D):

Minimalizáljuk  $\ell^T x$ -t

Feltéve, hogy  $\ell \ell_{\vec{G}} x = e_t - e_s$

$x \succeq 0$

Maximalizáljuk  $\mu_t - \mu_s$ -t

Feltéve, hogy  $\mu_v - \mu_u \leq \ell_{\vec{uv}}$

# Az LP elmélet alkalmazása

Dualizáljuk a legrövidebb út problémáját leíró LP relaxációt (P)/(D):

Minimalizáljuk  $\ell^T x$ -t

Feltéve, hogy  $\ell \vec{G} x = e_t - e_s$

$x \succeq 0$

Maximalizáljuk  $\mu_t - \mu_s$ -t

Feltéve, hogy  $\mu_v - \mu_u \leq \ell_{uv}$

- Mind a primál, mind a duál feladatnak könnyen található lehetséges megoldása (a duál esetben  $\mu = 0 \in \mathbb{R}^V$  egy lehetséges megoldás). Az optimális megoldások is megtalálhatók szimplex módszerrel.

# Az LP elmélet alkalmazása

Dualizáljuk a legrövidebb út problémáját leíró LP relaxációt (P)/(D):

Minimalizáljuk  $\ell^T x$ -t

Feltéve, hogy  $\ell \vec{G} x = e_t - e_s$   
 $x \succeq 0$

Maximalizáljuk  $\mu_t - \mu_s$ -t

Feltéve, hogy  $\mu_v - \mu_u \leq \ell_{uv}$

- Mind a primál, mind a duál feladatnak könnyen található lehetséges megoldása (a duál esetben  $\mu = 0 \in \mathbb{R}^V$  egy lehetséges megoldás). Az optimális megoldások is megtalálhatók szimplex módszerrel.
- Mi más utat választunk. Az LP/simplex algoritmus tanulmányozása során tanult tudásunkat alkalmazzuk.

# Az LP elmélet alkalmazása

Dualizáljuk a legrövidebb út problémáját leíró LP relaxációt (P)/(D):

Minimalizáljuk  $\ell^T x$ -t

Feltéve, hogy  $\ell \ell_{\vec{G}} x = e_t - e_s$   
 $x \succeq 0$

Maximalizáljuk  $\mu_t - \mu_s$ -t

Feltéve, hogy  $\mu_v - \mu_u \leq \ell_{\vec{uv}}$

- Mind a primál, mind a duál feladatnak könnyen található lehetséges megoldása (a duál esetben  $\mu = 0 \in \mathbb{R}^V$  egy lehetséges megoldás). Az optimális megoldások is megtalálhatók szimplex módszerrel.
- Mi más utat választunk. Az LP/simplex algoritmus tanulmányozása során tanult tudásunkat alkalmazzuk.
- Ha a kezünkben levő duális megoldás mellé lenne egy primál lehetséges megoldás, amely teljesítené a komplementáris lazasági tulajdonságot, akkor meg lenne az optimumunk.

# Az LP elmélet alkalmazása II

# Az LP elmélet alkalmazása II

- Egy  $\mu_0 = (\mu_u)_{u \in V} \in \mathbb{R}^V$  duális lehetséges megoldáshoz komplementáris lazasági tulajdonsággal bíró primál lehetséges megoldás keresése vezet el a következő jelöléshez.

# Az LP elmélet alkalmazása II

- Egy  $\mu_0 = (\mu_u)_{u \in V} \in \mathbb{R}^V$  duális lehetséges megoldáshoz komplementáris lazasági tulajdonsággal bíró primál lehetséges megoldás keresése vezet el a következő jelöléshez.

Jelölés: Laza és éles élek ( $\mu$  duális megoldásra)

$$L_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u < \ell_e\}, S_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u = \ell_e\}.$$



# Az LP elmélet alkalmazása II

- Egy  $\mu_0 = (\mu_u)_{u \in V} \in \mathbb{R}^V$  duális lehetséges megoldáshoz komplementáris lazasági tulajdonsággal bíró primál lehetséges megoldás keresése vezet el a következő jelöléshez.

Jelölés: Laza és éles élek ( $\mu$  duális megoldásra)

$$L_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u < \ell_e\}, S_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u = \ell_e\}.$$

- Ha  $e \in L$ , akkor  $x_e = 0$ -t szeretnénk, ha  $e \in S$ , akkor  $x_e > 0$ -t megengedjük.

# Az LP elmélet alkalmazása II

- Egy  $\mu_0 = (\mu_u)_{u \in V} \in \mathbb{R}^V$  duális lehetséges megoldáshoz komplementáris lazasági tulajdonsággal bíró primál lehetséges megoldás keresése vezet el a következő jelöléshez.

Jelölés: Laza és éles élek ( $\mu$  duális megoldásra)

$$L_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u < \ell_e\}, S_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u = \ell_e\}.$$

- Ha  $e \in L$ , akkor  $x_e = 0$ -t szeretnénk, ha  $e \in S$ , akkor  $x_e > 0$ -t megengedjük. Persze ilyen primális megoldás keresése nem szükségszerűen sikeres.

# Az LP elmélet alkalmazása II

- Egy  $\mu_0 = (\mu_u)_{u \in V} \in \mathbb{R}^V$  duális lehetséges megoldáshoz komplementáris lazasági tulajdonsággal bíró primál lehetséges megoldás keresése vezet el a következő jelöléshez.

Jelölés: Laza és éles élek ( $\mu$  duális megoldásra)

$$L_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u < \ell_e\}, S_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u = \ell_e\}.$$

- Ha  $e \in L$ , akkor  $x_e = 0$ -t szeretnénk, ha  $e \in S$ , akkor  $x_e > 0$ -t megengedjük. Persze ilyen primális megoldás keresése nem szükségszerűen sikeres.
- Amit tehetünk felírjuk a primál feladat egy megfelelő változtatását,

# Az LP elmélet alkalmazása II

- Egy  $\mu_0 = (\mu_u)_{u \in V} \in \mathbb{R}^V$  duális lehetséges megoldáshoz komplementáris lazasági tulajdonsággal bíró primál lehetséges megoldás keresése vezet el a következő jelöléshez.

Jelölés: Laza és éles élek ( $\mu$  duális megoldásra)

$$L_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u < \ell_e\}, S_{\mu_0} = \{e = \overrightarrow{uv} : \mu_v - \mu_u = \ell_e\}.$$

- Ha  $e \in L$ , akkor  $x_e = 0$ -t szeretnénk, ha  $e \in S$ , akkor  $x_e > 0$ -t megengedjük. Persze ilyen primális megoldás keresése nem szükségszerűen sikeres.
- Amit tehetünk felírjuk a primál feladat egy megfelelő változtatását, és persze dualizálunk ( $\tilde{P}_{\mu_0}$ )/( $\tilde{D}_{\mu_0}$ ):

Minimalizáljuk  $\sum_{e \in L} x_e$ -t

Feltéve, hogy  $\text{Ill}_{\vec{G}} x = e_t - e_s$

$$x \succeq 0$$

Maximalizáljuk  $\mu_t - \mu_s$ -t

Feltéve, hogy  $\mu_v - \mu_u \leq 1 \quad \overrightarrow{vu} \in L$

$$\mu_v - \mu_u \leq 0 \quad \overrightarrow{vu} \in S$$

# Az LP elmélet alkalmazása III

# Az LP elmélet alkalmazása III

- Vegyük észre, hogy a módosított primál és a duális már csak rejtve (az  $L$  és  $S$  élhalmazokon keresztül) tartalmazza a súlyozást. Alapból egy súlyozatlan feladattal állunk szemben.

# Az LP elmélet alkalmazása III

- Vegyük észre, hogy a módosított primál és a duális már csak rejtve (az  $L$  és  $S$  élhalmazokon keresztül) tartalmazza a súlyozást. Alapból egy súlyozatlan feladattal állunk szemben.
- Az új dualizált feladatnak ismét könnyen kereshetünk egy lehetséges megoldását.

# Az LP elmélet alkalmazása III

- Vegyük észre, hogy a módosított primál és a duális már csak rejtve (az  $L$  és  $S$  élhalmazokon keresztül) tartalmazza a súlyozást. Alapból egy súlyozatlan feladattal állunk szemben.
- Az új dualizált feladatnak ismét könnyen kereshetünk egy lehetséges megoldását.  
A lehetséges megoldás megadása egy eset szétválasztáson alapul.  
Az eset szétválasztás a szélességi keresésen alapulhat:



# Az LP elmélet alkalmazása III

- Vegyük észre, hogy a módosított primál és a duális már csak rejtve (az  $L$  és  $S$  élhalmazokon keresztül) tartalmazza a súlyozást. Alapból egy súlyozatlan feladattal állunk szemben.
- Az új dualizált feladatnak ismét könnyen kereshetünk egy lehetséges megoldását.  
A lehetséges megoldás megadása egy eset szétválasztáson alapul. Az eset szétválasztás a szélességi keresésen alapulhat:

(i) Találunk éles élekből álló  $\vec{st}$  utat.

# Az LP elmélet alkalmazása III

- Vegyük észre, hogy a módosított primál és a duális már csak rejtve (az  $L$  és  $S$  élhalmazokon keresztül) tartalmazza a súlyozást. Alapból egy súlyozatlan feladattal állunk szemben.

- Az új dualizált feladatnak ismét könnyen kereshetünk egy lehetséges megoldását.

A lehetséges megoldás megadása egy eset szétválasztáson alapul. Az eset szétválasztás a szélességi keresésen alapulhat:

- (i) Találunk éles élekből álló  $\vec{st}$  utat.
- (ii) Találunk egy  $\mathcal{S} = \{x \in V : \text{létezik } \vec{sx} \text{ éles élekből álló út}\} \ni s$ ,  
 $\mathcal{T} = V(G) - \mathcal{S} \ni t$  vágást, amely összes  $\vec{\mathcal{S}\mathcal{T}}$  éle laza.

# Az (i) eset

# Az (i) eset

- A megtalált út legyen  $P$ .

# Az (i) eset

- A megtalált út legyen  $P$ .
- Az út éles élei mentén összeadva a  $\mu_{v_{i+1}} - \mu_{v_i} \leq 0$  egyenlőtlenségeket (az út élei élesek), kapjuk  $\mu_t - \mu_s \leq 0$ .

# Az (i) eset

- A megtalált út legyen  $P$ .
- Az út éles élei mentén összeadva a  $\mu_{v_{i+1}} - \mu_{v_i} \leq 0$  egyenlőtlenségeket (az út élei élesek), kapjuk  $\mu_t - \mu_s \leq 0$ .
- Mivel a 0-vektor esetén a célfüggvény 0, ezért ez egy optimális duális megoldás ( $\tilde{D}_\mu$ )-re:  $d^* = 0$ .

# Az (i) eset

- A megtalált út legyen  $P$ .
- Az út éles élei mentén összeadva a  $\mu_{v_{i+1}} - \mu_{v_i} \leq 0$  egyenlőtlenségeket (az út élei élesek), kapjuk  $\mu_t - \mu_s \leq 0$ .
- Mivel a 0-vektor esetén a célfüggvény 0, ezért ez egy optimális duális megoldás ( $\tilde{D}_\mu$ )-re:  $d^* = 0$ .
- A dualitás tétel alapján ( $\tilde{P}_\mu$ )-re is  $p^* = 0$ .

# Az (i) eset

- A megtalált út legyen  $P$ .
- Az út éles élei mentén összeadva a  $\mu_{v_{i+1}} - \mu_{v_i} \leq 0$  egyenlőtlenségeket (az út élei élesek), kapjuk  $\mu_t - \mu_s \leq 0$ .
- Mivel a 0-vektor esetén a célfüggvény 0, ezért ez egy optimális duális megoldás ( $\tilde{D}_\mu$ )-re:  $d^* = 0$ .
- A dualitás tétel alapján ( $\tilde{P}_\mu$ )-re is  $p^* = 0$ .
- Azaz a komplementáris lazasság tulajdonság teljesül egy optimális ( $\tilde{P}_\mu$ ) primál megoldás, ami egy lehetséges (P) megoldás és a kiinduló duál (D)  $\mu$  megoldására.



# Az (i) eset

- A megtalált út legyen  $P$ .
- Az út éles élei mentén összeadva a  $\mu_{v_{i+1}} - \mu_{v_i} \leq 0$  egyenlőtlenségeket (az út élei élesek), kapjuk  $\mu_t - \mu_s \leq 0$ .
- Mivel a 0-vektor esetén a célfüggvény 0, ezért ez egy optimális duális megoldás ( $\tilde{D}_\mu$ )-re:  $d^* = 0$ .
- A dualitás tétel alapján ( $\tilde{P}_\mu$ )-re is  $p^* = 0$ .
- Azaz a komplementáris lazasság tulajdonság teljesül egy optimális ( $\tilde{P}_\mu$ ) primál megoldás, ami egy lehetséges (P) megoldás és a kiinduló duál (D)  $\mu$  megoldására.
- Megvan a primál optimum.

# Az (ii) eset

# Az (ii) eset

- A megtalált  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  vágást a duális megoldás javítására használjuk.

# Az (ii) eset

- A megtalált  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  vágást a duális megoldás javítására használjuk.
- $(\tilde{D}_\mu)$  egy lehetséges megoldása:  $\mathcal{S}$  csúcsain legyen 0 a súly,  $\mathcal{T}$  csúcsain pedig legyen 1 a súly. Ezt jelöljük  $\mu_{\text{módosít}}$ -tal

## Az (ii) eset

- A megtalált  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  vágást a duális megoldás javítására használjuk.
- $(\tilde{D}_\mu)$  egy lehetséges megoldása:  $\mathcal{S}$  csúcsain legyen 0 a súly,  $\mathcal{T}$  csúcsain pedig legyen 1 a súly. Ezt jelöljük  $\mu_{\text{módosít}}$ -tal

### Észrevétel

Kis pozitív  $\delta$  esetén  $\mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  is megoldása marad (D)-nek.

# Az (ii) eset

- A megtalált  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  vágást a duális megoldás javítására használjuk.
- $(\tilde{D}_\mu)$  egy lehetséges megoldása:  $\mathcal{S}$  csúcsain legyen 0 a súly,  $\mathcal{T}$  csúcsain pedig legyen 1 a súly. Ezt jelöljük  $\mu_{\text{módosít}}$ -tal

## Észrevétel

Kis pozitív  $\delta$  esetén  $\mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  is megoldása marad (D)-nek.

- (D) minden feltétel egy felső becslés egy él végpontján lévő komponens és kezdőpontján lévő komponens különbségére.

# Az (ii) eset

- A megtalált  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  vágást a duális megoldás javítására használjuk.
- $(\tilde{D}_\mu)$  egy lehetséges megoldása:  $\mathcal{S}$  csúcsain legyen 0 a súly,  $\mathcal{T}$  csúcsain pedig legyen 1 a súly. Ezt jelöljük  $\mu_{\text{módosít}}$ -tal

## Észrevétel

Kis pozitív  $\delta$  esetén  $\mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  is megoldása marad (D)-nek.

- (D) minden feltétel egy felső becslés egy él végpontján lévő komponens és kezdőpontján lévő komponens különbségére.

Ez a különbség egyetlen esetben nő (amikor is aggódnunk kell a felső becslés teljesülésén):  $\mathcal{S}$ -ből  $\mathcal{T}$ -be menő élek esetén.

## Az (ii) eset

- A megtalált  $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$  vágást a duális megoldás javítására használjuk.
- $(\tilde{D}_\mu)$  egy lehetséges megoldása:  $\mathcal{S}$  csúcsain legyen 0 a súly,  $\mathcal{T}$  csúcsain pedig legyen 1 a súly. Ezt jelöljük  $\mu_{\text{módosít}}$ -tal

### Észrevétel

Kis pozitív  $\delta$  esetén  $\mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  is megoldása marad (D)-nek.

- (D) minden feltétel egy felső becslés egy él végpontján lévő komponens és kezdőpontján lévő komponens különbségére.

Ez a különbség egyetlen esetben nő (amikor is aggódnunk kell a felső becslés teljesülésén):  $\mathcal{S}$ -ből  $\mathcal{T}$ -be menő élek esetén.

Ezek az élek nem élesek. Alkalmasan kicsi  $\delta$  esetén a duális megoldás lehetséges marad.



# Mi is történt?

# Mi is történt?

## Észrevétel

A  $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  módosítás után

# Mi is történt?

## Észrevétel

A  $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  módosítás után

(i)  $\mu_t - \mu_s$  nő,

# Mi is történt?

## Észrevétel

A  $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  módosítás után

(i)  $\mu_t - \mu_s$  nő,

(ii) Legalább egy  $\vec{ST}$  él élessé válik, az  $\mathcal{S}$  halmaz nőni fog.

# Mi is történt?

## Észrevétel

A  $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  módosítás után

(i)  $\mu_t - \mu_s$  nő,

(ii) Legalább egy  $\overrightarrow{ST}$  él élessé válik, az  $\mathcal{S}$  halmaz nőni fog.

- Éppen a Dijkstra algoritmust írtuk le.

# Mi is történt?

## Észrevétel

A  $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  módosítás után

(i)  $\mu_t - \mu_s$  nő,

(ii) Legalább egy  $\overrightarrow{ST}$  él élessé válik, az  $S$  halmaz nőni fog.

- Éppen a Dijkstra algoritmust írtuk le.
- A két tárgyalás  $S$ , illetve  $\mathcal{S}$  halmaza ugyanaz.

# Mi is történt?

## Észrevétel

A  $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  módosítás után

(i)  $\mu_t - \mu_s$  nő,

(ii) Legalább egy  $\overrightarrow{ST}$  él élessé válik, az  $S$  halmaz nőni fog.

- Éppen a Dijkstra algoritmust írtuk le.
- A két tárgyalás  $S$ , illetve  $\mathcal{S}$  halmaza ugyanaz.
- A módosított (kombinatorikus) feladatok duálisainak megoldása mindig 0/1 megoldás lesz.

# Mi is történt?

## Észrevétel

A  $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  módosítás után

(i)  $\mu_t - \mu_s$  nő,

(ii) Legalább egy  $\overrightarrow{ST}$  él élessé válik, az  $S$  halmaz nőni fog.

- Éppen a Dijkstra algoritmust írtuk le.
- A két tárgyalás  $S$ , illetve  $\mathcal{S}$  halmaza ugyanaz.
- A módosított (kombinatorikus) feladatok duálisainak megoldása mindig 0/1 megoldás lesz. Sőt  $\mu_s = 0$ .



# Mi is történt?

## Észrevétel

A  $\mu \leftarrow \mu + \delta\mu_{\text{módosít}}$  módosítás után

- (i)  $\mu_t - \mu_s$  nő,
- (ii) Legalább egy  $\overrightarrow{ST}$  él élessé válik, az  $S$  halmaz nőni fog.

- Éppen a Dijkstra algoritmust írtuk le.
- A két tárgyalás  $S$ , illetve  $\mathcal{S}$  halmaza ugyanaz.
- A módosított (kombinatorikus) feladatok duálisainak megoldása mindig 0/1 megoldás lesz. Sőt  $\mu_s = 0$ .
- Az eredeti (D) duális megoldása  $S$ -en a Dijkstra-címkezt adja.

# Általános séma

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.  
Tegyük fel, hogy

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.  
Tegyük fel, hogy

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.

Tegyük fel, hogy

- (o) egy súlyozott kombinatorikus problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat: (P).

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.

Tegyük fel, hogy

- (o) egy súlyozott kombinatorikus problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat:  $(P)$ .

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

- (i) Dualizálunk( $\rightarrow (D)$ ).

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.  
Tegyük fel, hogy

(o) egy súlyozott kombinatorikus problémát megfogalmaztunk,  
mint egy LP feladat: (P).

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

(i) Dualizálunk( $\rightarrow (D)$ ).

(ii) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu$ ).

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.  
Tegyük fel, hogy

- (o) egy súlyozott kombinatorikus problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat: (P).

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

- (i) Dualizálunk( $\rightarrow (D)$ ).
- (ii) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu$ ).
- (iii) A primál oldalon „elfelejtjük” az eredeti súlyozott optimalizálási feladatot.



# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.  
Tegyük fel, hogy

- (o) egy súlyozott kombinatrikus problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat: (P).

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

- (i) Dualizálunk( $\rightarrow (D)$ ).
- (ii) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu$ ).
- (iii) A primál oldalon „elfelejtjük” az eredeti súlyozott optimalizálási feladatot. A primál feltételek mellé felvesszük a ( $\mu$ -re alapozva) lazán teljesülő duál feltételek változóink 0 mivoltát.

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.  
Tegyük fel, hogy

- (o) egy súlyozott kombinatrikus problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat: (P).

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

- (i) Dualizálunk( $\rightarrow (D)$ ).
- (ii) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu$ ).
- (iii) A primál oldalon „elfelejtjük” az eredeti súlyozott optimalizálási feladatot. A primál feltételek mellé felvesszük a ( $\mu$ -re alapozva) lazán teljesülő duál feltételek változóink 0 mivoltát.
- (iii) Ezzel egy kielégíthetőségi problémához jutunk.

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.  
Tegyük fel, hogy

- (o) egy súlyozott kombinatorikus problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat:  $(P)$ .

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

- (i) Dualizálunk( $\rightarrow (D)$ ).
- (ii) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu$ ).
- (iii) A primál oldalon „elfelejtjük” az eredeti súlyozott optimalizálási feladatot. A primál feltételek mellé felvesszük a ( $\mu$ -re alapozva) lazán teljesülő duál feltételek változóink 0 mivoltát.
- (iii) Ezzel egy kielégíthetőségi problémához jutunk. Ezt megfogalmazzuk mint egy LP feladat( $\rightarrow (\tilde{P}_\mu)$ ).

# Általános séma

A fenti ötlet nemcsak a legrövidebb út problémára alkalmazható.  
Tegyük fel, hogy

(o) egy súlyozott kombinatorikus problémát megfogalmaztunk, mint egy LP feladat: (P).

Megpróbálhatjuk a következő terv/séma szerint dolgozni.

- (i) Dualizálunk( $\rightarrow (D)$ ).
- (ii) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu$ ).
- (iii) A primál oldalon „elfelejtjük” az eredeti súlyozott optimalizálási feladatot. A primál feltételek mellé felvesszük a ( $\mu$ -re alapozva) lazán teljesülő duál feltételek változóink 0 mivoltát.
- (iii)'' Ezzel egy kielégíthetőségi problémához jutunk. Ezt megfogalmazzuk mint egy LP feladat( $\rightarrow (\tilde{P}_\mu)$ ).
- (iv) Ez dualizáljuk( $\rightarrow (\tilde{D}_\mu)$ ).

# folytatás

# folytatás

(v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást( $\rightarrow \mu$  módosít).

# folytatás

(v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu$  módosít). Ez sokszor egy súlyozatlan kombinatorikus feladat.

# folytatás

- (v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu_{\text{módosít}}$ ). Ez sokszor egy súlyozatlan kombinatorikus feladat.
- (vi<sub>1</sub>) A duális megoldás esetleg azt adja, hogy a mögöttes primál/duál pár teljesíti a komplementáris lazasági tulajdonságot.



# folytatás

- (v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu_{\text{módosít}}$ ). Ez sokszor egy súlyozatlan kombinatorikus feladat.
- (vi<sub>1</sub>) A duális megoldás esetleg azt adja, hogy a mögöttes primál/duál pár teljesíti a komplementáris lazasági tulajdonságot. STOP.

# folytatás

- (v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu_{\text{módosít}}$ ). Ez sokszor egy súlyozatlan kombinatorikus feladat.
- (vi<sub>1</sub>) A duális megoldás esetleg azt adja, hogy a mögöttes primál/duál pár teljesíti a komplementáris lazassági tulajdonságot. STOP.
- (vi<sub>2</sub>) A duális megoldás esetleg lehetőséget ad arra, hogy a mögöttes duális  $\mu$ -t módosítsuk  $\mu_{\text{módosít}}$  segítségével, hogy egy „jobb”  $\mu$ -t kapjunk.

# folytatás

- (v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu_{\text{módosít}}$ ). Ez sokszor egy súlyozatlan kombinatorikus feladat.
- (vi<sub>1</sub>) A duális megoldás esetleg azt adja, hogy a mögöttes primál/duál pár teljesíti a komplementáris lazasági tulajdonságot. STOP.
- (vi<sub>2</sub>) A duális megoldás esetleg lehetőséget ad arra, hogy a mögöttes duális  $\mu$ -t módosítsuk  $\mu_{\text{módosít}}$  segítségével, hogy egy „jobb”  $\mu$ -t kapjunk. VISSZA (iii)-hez.

# folytatás

- (v) Keresünk egy duális lehetséges megoldást ( $\rightarrow \mu_{\text{módosít}}$ ). Ez sokszor egy súlyozatlan kombinatorikus feladat.
- (vi<sub>1</sub>) A duális megoldás esetleg azt adja, hogy a mögöttes primál/duál pár teljesíti a komplementáris lazasági tulajdonságot. STOP.
- (vi<sub>2</sub>) A duális megoldás esetleg lehetőséget ad arra, hogy a mögöttes duális  $\mu$ -t módosítsuk  $\mu_{\text{módosít}}$  segítségével, hogy egy „jobb”  $\mu$ -t kapjunk. VISSZA (iii)-hez.

## Primál-duál megoldási séma

A fenti séma alapján kidolgozott algoritmusokat *primál-duál algoritmusoknak* nevezzük.

# Vége van!

Köszönöm a figyelmet!