Az optimalizálás alapfogalmai

Hajnal Péter

2021. tavasz

Az eredet

Az eredet

- Az optimalizálás a matematika, fizika, gazdaság (és sok más emberi cselekvés) természetes alapproblémája.

Az eredet

- Az optimalizálás a matematika, fizika, gazdaság (és sok más emberi cselekvés) természetes alapproblémája.
- A klasszikus Fermat-elv azt mondja, hogy a „fény mozgása során optimalizál/minimális idejű utat választva mozog".

Az eredet

- Az optimalizálás a matematika, fizika, gazdaság (és sok más emberi cselekvés) természetes alapproblémája.

- A klasszikus Fermat-elv azt mondja, hogy a „fény mozgása során optimalizál/minimális idejű utat választva mozog”.

- A modern logisztikai, pénzügyi problémák során optimalizálással óriási összegek takaríthatók meg.

Az eredet

- Az optimalizálás a matematika, fizika, gazdaság (és sok más emberi cselekvés) természetes alapproblémája.

- A klasszikus Fermat-elv azt mondja, hogy a „fény mozgása során optimalizál/minimális idejű utat választva mozog”.

- A modern logisztikai, pénzügyi problémák során optimalizálással óriási összegek takaríthatók meg.

- Az optimalizálás a középiskolai szélsőérték feladatok jobban hangzó neve.

Az eredet

- Az optimalizálás a matematika, fizika, gazdaság (és sok más emberi cselekvés) természetes alapproblémája.
- A klasszikus Fermat-elv azt mondja, hogy a „fény mozgása során optimalizál/minimális idejű utat választva mozog”.
- A modern logisztikai, pénzügyi problémák során optimalizálással óriási összegek takaríthatók meg.
- Az optimalizálás a középiskolai szélsőérték feladatok jobban hangzó neve. Kétféle szélsőérték létezik: minimum, illetve maximum.

Az eredet

- Az optimalizálás a matematika, fizika, gazdaság (és sok más emberi cselekvés) természetes alapproblémája.

- A klasszikus Fermat-elv azt mondja, hogy a „fény mozgása során optimalizál/minimális idejű utat választva mozog”.

- A modern logisztikai, pénzügyi problémák során optimalizálással óriási összegek takaríthatók meg.

- Az optimalizálás a középiskolai szélsőérték feladatok jobban hangzó neve. Kétféle szélsőérték létezik: minimum, illetve maximum.

- Ebben a pontban megfogalmazzuk az optimalizálás alapfeladatát és bevezetjük az alapvető fogalmakat, elnevezéseket.

Az eredet

• Az optimalizálás a matematika, fizika, gazdaság (és sok más emberi cselekvés) természetes alapproblémája.

• A klasszikus Fermat-elv azt mondja, hogy a „fény mozgása során optimalizál/minimális idejű utat választva mozog".

• A modern logisztikai, pénzügyi problémák során optimalizálással óriási összegek takaríthatók meg.

• Az optimalizálás a középiskolai szélsőérték feladatok jobban hangzó neve. Kétféle szélsőérték létezik: minimum, illetve maximum.

• Ebben a pontban megfogalmazzuk az optimalizálás alapfeladatát és bevezetjük az alapvető fogalmakat, elnevezéseket. Most az alapfogalmakat minimalizálási feladatra alapozva mondjuk el. Maximalizálási kérdések teljesen hasonlóan kezelhetők (ha van különbség az természetes, józan ésszel kitalálható).

Alapfogalmak: Az alapfeladat

Alapfogalmak: Az alapfeladat

- Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk.

Alapfogalmak: Az alapfeladat

- Legyen $c\colon \operatorname{dom}(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk. A $\operatorname{dom}(c)$ értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ jelölést használjuk.

Alapfogalmak: Az alapfeladat

• Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk. A dom (c) értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ jelölést használjuk.

• Az optimalizálás alapfeladata a c célfüggvény minimalizálása, előre kiszabott feltételek mellett. Erre a továbbiakban az alábbi rövidített írásmódot használjuk:

Minimalizáljuk	$c(x)$-et-t
Feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F} \cap \mathrm{dom}\,(c)$,

ahol $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ a feltételek által meghatározott tartomány.

Alapfogalmak: Az alapfeladat

- Legyen $c\colon \mathrm{dom}\,(c) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy adott n-változós valós függvény ($n \in \mathbb{N}$), melyet **célfüggvénynek** nevezünk. A $\mathrm{dom}\,(c)$ értelmezési tartomány egy általános elemére az $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ jelölést használjuk.

- Az optimalizálás alapfeladata a c célfüggvény minimalizálása, előre kiszabott feltételek mellett. Erre a továbbiakban az alábbi rövidített írásmódot használjuk:

Minimalizáljuk	$c(x)$-et-t
Feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F} \cap \mathrm{dom}\,(c)$,

ahol $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ a feltételek által meghatározott tartomány.

- **Megjegyzés:** A feltételek eltérő eredetűek lehetnek. Formalizálhatnak matematikai feltételeket vagy származhatnak fizikai, gazdasági kényszerekből.

Alapfogalmak: A feltételek

Alapfogalmak: A feltételek

- A feltételek előírására is többféle lehetőség létezik.

Alapfogalmak: A feltételek

- A feltételek előírására is többféle lehetőség létezik.

- Itt mi egy esetet vizsgálunk: Véges sok egyenlet és/vagy egyenlőtlenség írja le a feltételrendszert.

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, & i \in [k] := \{1, 2, \ldots, k\}, \\ g_j(x) = 0, & j \in [\ell], \end{cases} \tag{1}$$

ahol tehát $f_i\,(i \in [k])$ és $g_j\,(j \in [\ell])$ szintén n-változós valós függvények.

Alapfogalmak: A feltételek

- A feltételek előírására is többféle lehetőség létezik.

- Itt mi egy esetet vizsgálunk: Véges sok egyenlet és/vagy egyenlőtlenség írja le a feltételrendszert.

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, & i \in [k] := \{1, 2, \ldots, k\}, \\ g_j(x) = 0, & j \in [\ell], \end{cases} \tag{1}$$

ahol tehát f_i $(i \in [k])$ és g_j $(j \in [\ell])$ szintén n-változós valós függvények. Ekkor $\mathcal{F}$ a fenti rendszer megoldáshalmaza.

Alapfogalmak: A feltételek

- A feltételek előírására is többféle lehetőség létezik.

- Itt mi egy esetet vizsgálunk: Véges sok egyenlet és/vagy egyenlőtlenség írja le a feltételrendszert.

$$\begin{cases} f_i(x) \leq 0, & i \in [k] := \{1, 2, \ldots, k\}, \\ g_j(x) = 0, & j \in [\ell], \end{cases} \tag{1}$$

ahol tehát f_i ($i \in [k]$) és g_j ($j \in [\ell]$) szintén n-változós valós függvények. Ekkor $\mathcal{F}$ a fenti rendszer megoldáshalmaza.

- Az alapfeladat újra leírva a véges sok, explicit formulákkal leírt feltétel esetére:

Minimalizáljuk	$c(x)$-t
Feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0, \quad i \in [k] := \{1, 2, \ldots, k\},$
	$g_j(x) = 0, \quad i \in [\ell] := \{1, 2, \ldots, \ell\}.$

Alapfogalmak: Az értelmezési tartomány, lehetséges megoldásaok halmaza

• Az **optimalizálási feladat értelmezési tartománya** a célfüggvény és a feltételek értelmezési tartományának metszete:

$$\mathcal{D} := \mathrm{dom}\ (c) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{dom}\ (f_i) \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{\ell} \mathrm{dom}\ (g_j) \right)$$

halmaz, amely tehát azon x-eket tartalmazza, amelyekre mind a célfüggvény, mind pedig a feltételek értelmezettek.

• **Lehetséges/megengedett megoldásoknak** azon $x \in \mathcal{D}$ vektorokat nevezzük, amelyek eleget tesznek a kritériumoknak is, azaz $x \in \mathcal{F}$. Ezen x-ek halmazát $\mathcal{L}$ jelöli. Tehát

$$\mathcal{L} := \mathcal{D} \cap \mathcal{F},$$

azaz

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{D} : f_i(x) \leq 0,\ g_j(x) = 0,\ i \in [k], j \in [\ell]\}.$$

Alapfogalmak: Optimális érték, optimális hely

Alapfogalmak: Optimális érték, optimális hely

- A feladathoz tartozó **optimális érték**

$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{L}} c(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

ahol az infimum ∞, ha a lehetséges megoldások halmaza üres és $-\infty$, ha a c célfüggvény a lehetséges megoldásokon tetszőlegesen kicsi értéket is felvesz.

Alapfogalmak: Optimális érték, optimális hely

- A feladathoz tartozó **optimális érték**

$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{L}} c(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

ahol az infimum ∞, ha a lehetséges megoldások halmaza üres és $-\infty$, ha a c célfüggvény a lehetséges megoldásokon tetszőlegesen kicsi értéket is felvesz.

- Egy $x^* \in \mathcal{L}$ vektor **optimális hely**, ha ott a célfüggvény felveszi az optimális értéket

$$c(x^*) = p^*.$$

Alapfogalmak: Optimális érték, optimális hely

- A feladathoz tartozó **optimális érték**

$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{L}} c(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

ahol az infimum ∞, ha a lehetséges megoldások halmaza üres és $-\infty$, ha a c célfüggvény a lehetséges megoldásokon tetszőlegesen kicsi értéket is felvesz.

- Egy $x^* \in \mathcal{L}$ vektor **optimális hely**, ha ott a célfüggvény felveszi az optimális értéket

$$c(x^*) = p^*.$$

- Megjegyezzük, hogy a fenti formalizmus alapján p^* mindig definiált. x^* nem mindig definiált és amikor x^* létezik akkor sem biztos, hogy egyértelmű.

Alapfogalmak: Relaxált optimumok

Alapfogalmak: Relaxált optimumok

• Az x_ℓ vektor **lokális optimum/minimum**, ha annak egy környezetének minden pontjában c legalább akkora, mint az x_ℓ helyen:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x : \|x - x_\ell\|_2 < \varepsilon \quad \text{esetén} \quad c(x_\ell) \leq c(x),$$

ahol $\|\ \|_2$ az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett euklidészi norma,

$$\|\ \|_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty), \quad y \mapsto \|y\|_2 := \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Alapfogalmak: Relaxált optimumok

- Az x_ℓ vektor **lokális optimum/minimum**, ha annak egy környezetének minden pontjában c legalább akkora, mint az x_ℓ helyen:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x : \|x - x_\ell\|_2 < \varepsilon \quad \text{esetén} \quad c(x_\ell) \leq c(x),$$

ahol $\|\ \|_2$ az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett euklidészi norma,

$$\|\ \|_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty), \quad y \mapsto \|y\|_2 := \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

- Azt mondjuk, hogy $x_0 \in \mathcal{L}$ egy **ε-közelítő megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$(p^* \leq)\ c(x_0) \leq p^* + \varepsilon.$$

Alapfogalmak: Relaxált optimumok

- Az x_ℓ vektor **lokális optimum/minimum**, ha annak egy környezetének minden pontjában c legalább akkora, mint az x_ℓ helyen:

$$\exists\,\varepsilon > 0,\ \forall\, x : \|x - x_\ell\|_2 < \varepsilon \quad \text{esetén} \quad c(x_\ell) \le c(x),$$

ahol $\|\ \|_2$ az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett euklidészi norma,

$$\|\ \|_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty), \quad y \mapsto \|y\|_2 := \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

- Azt mondjuk, hogy $x_0 \in \mathcal{L}$ egy **ε-közelítő megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$(p^* \le)\ c(x_0) \le p^* + \varepsilon.$$

- Egy $x_0 \in \mathcal{L}$ vektor **ε-approximációs megoldás** ($\varepsilon > 0$), ha

$$(p^* \le)\ c(x_0) \le (1+\varepsilon)p^*.$$

Alapfogalmak: Relaxált optimumok (folytatás)

Alapfogalmak: Relaxált optimumok (folytatás)

- Az ε-approximációs megoldás fenti definíciójába beleértjük, hogy az optimális érték pozitív, $p^* > 0$.

Alapfogalmak: Relaxált optimumok (folytatás)

- Az ε-approximációs megoldás fenti definíciójába beleértjük, hogy az optimális érték pozitív, $p^* > 0$.
- A negatív optimális értékű feladatokban az $c(x_0) \leq (1-\varepsilon)p^*$ feltételt kell tennünk.

Alapfogalmak: Relaxált optimumok (folytatás)

- Az ε-approximációs megoldás fenti definíciójába beleértjük, hogy az optimális érték pozitív, $p^* > 0$.
- A negatív optimális értékű feladatokban az $c(x_0) \leq (1-\varepsilon)p^*$ feltételt kell tennünk.
- Azt is megjegyezzük, hogy a fenti fogalmak bevezetését egy minimalizálási feladatra alapoztuk.

Alapfogalmak: Relaxált optimumok (folytatás)

- Az ε-approximációs megoldás fenti definíciójába beleértjük, hogy az optimális érték pozitív, $p^* > 0$.

- A negatív optimális értékű feladatokban az $c(x_0) \leq (1-\varepsilon)p^*$ feltételt kell tennünk.

- Azt is megjegyezzük, hogy a fenti fogalmak bevezetését egy minimalizálási feladatra alapoztuk. Minden definíciónk (természetes módon megváltoztatva) elmondható maximalizálási feladatra is.

Példa optimalizálási feladatra: A lineáris programozás

Példa optimalizálási feladatra: A lineáris programozás

- A lineáris programozás az optimalizálási feladatok egyik (talán a) legfontosabb osztálya.

Példa optimalizálási feladatra: A lineáris programozás

- A lineáris programozás az optimalizálási feladatok egyik (talán a) legfontosabb osztálya. Természetesen itt is két lehetőségünk van: minimalizálhatunk/maximalizálhatunk.

Példa optimalizálási feladatra: A lineáris programozás

• A lineáris programozás az optimalizálási feladatok egyik (talán a) legfontosabb osztálya. Természetesen itt is két lehetőségünk van: minimalizálhatunk/maximalizálhatunk. Mi most a maximalizálást vesszük alapértelmezett célként.

Példa optimalizálási feladatra: A lineáris programozás

• A lineáris programozás az optimalizálási feladatok egyik (talán a) legfontosabb osztálya. Természetesen itt is két lehetőségünk van: minimalizálhatunk/maximalizálhatunk. Mi most a maximalizálást vesszük alapértelmezett célként.

• Ekkor a célfüggvény egy lineáris függvény. A feltételek pedig lineáris egyenletek és egyenlőtlenégek:

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$
	$Dx = e$,

ahol $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $b \in \mathbb{R}^k$, $D \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$, $e \in \mathbb{R}^\ell$.

Lineáris programozás szavakkal

Lineáris programozás szavakkal

- A maximalizálandó célfüggvény egy (homogén) lineáris függvény.

Lineáris programozás szavakkal

- A maximalizálandó célfüggvény egy (homogén) lineáris függvény.
- Két fajta feltételünk van. Számuk $k + \ell$.

Lineáris programozás szavakkal

- A maximalizálandó célfüggvény egy (homogén) lineáris függvény.
- Két fajta feltételünk van. Számuk $k + \ell$.
- Az első k darab feltétel egyenlőtlenség. Mindegyik úgy van rendezve, hogy a konstansok a jobb oldali, nagyobb oldalon legyenek, a homogén lineáris függvények („betűs rész") pedig a bal oldai, kisebb oldalon.

Lineáris programozás szavakkal

- A maximalizálandó célfüggvény egy (homogén) lineáris függvény.
- Két fajta feltételünk van. Számuk $k + \ell$.
- Az első k darab feltétel egyenlőtlenség. Mindegyik úgy van rendezve, hogy a konstansok a jobb oldali, nagyobb oldalon legyenek, a homogén lineáris függvények („betűs rész") pedig a bal oldai, kisebb oldalon.
- A további ℓ darab feltétel egyenlőség. Mindegyik úgy van rendezve, hogy a konstansok a jobb oldalon legyenek, a homogén lineáris függvények („betűs rész") pedig a bal oldalon.

LP: Értelmezési tartomány, lehetséges megoldások

LP: Értelmezési tartomány, lehetséges megoldások

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$.

LP: Értelmezési tartomány, lehetséges megoldások

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}$ egy poliéder és egy affin altér metszete,

LP: Értelmezési tartomány, lehetséges megoldások

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}$ egy poliéder és egy affin altér metszete, ami egy poliéder.

LP: Értelmezési tartomány, lehetséges megoldások

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}$ egy poliéder és egy affin altér metszete, ami egy poliéder.
- Tudjuk, hogy $\mathcal{L}$ $(= \mathcal{F})$ felírható

$$\langle u_1, u_2, \ldots u_K \rangle_{\text{conv}} + \langle v_1, v_2, \ldots v_L \rangle_{\text{kúp}}$$

alakban.

LP: Értelmezési tartomány, lehetséges megoldások

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}$ egy poliéder és egy affin altér metszete, ami egy poliéder.
- Tudjuk, hogy $\mathcal{L}$ $(= \mathcal{F})$ felírható

$$\langle u_1, u_2, \ldots u_K \rangle_{\text{conv}} + \langle v_1, v_2, \ldots v_L \rangle_{\text{kúp}}$$

alakban.

- Ha $x = x' + x''$, akkor $c^T x = c^T x' + c^T x''$.

LP: Értelmezési tartomány, lehetséges megoldások

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$. $\mathcal{F}$ egy poliéder és egy affin altér metszete, ami egy poliéder.
- Tudjuk, hogy $\mathcal{L}$ $(= \mathcal{F})$ felírható

$$\langle u_1, u_2, \ldots u_K \rangle_{\text{conv}} + \langle v_1, v_2, \ldots v_L \rangle_{\text{kúp}}$$

alakban.

- Ha $x = x' + x''$, akkor $c^T x = c^T x' + c^T x''$. Így könnyű látni, hogy a fenti felírás miatt a következő két optimalizálási problémát kell megoldanunk:

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$x \in \langle u_1, u_2, \ldots u_K \rangle_{\text{conv}}$

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$x \in \langle v_1, v_2, \ldots v_L \rangle_{\text{kúp}}$

Megjegyzések

Megjegyzések

- A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik.

Megjegyzések

- A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyik u_i-ben felvevődik az optimum.

Megjegyzések

- A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyik u_i-ben felvevődik az optimum.
- A kép csalóka.

Megjegyzések

- A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyik u_i-ben felvevődik az optimum.

- A kép csalóka. Az hogy „csak véges sok” érték közül kell kiválasztani az optimálisat, az nem jelenti azt hogy egyszerű a feladat.

Megjegyzések

• A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyik u_i-ben felvevődik az optimum.

• A kép csalóka. Az hogy „csak véges sok" érték közül kell kiválasztani az optimálisat, az nem jelenti azt hogy egyszerű a feladat. Nagyon nagy halmaz lehet a generátor elemek halmaza. Végignézni mindet nem egy hatékony eljárás.

Megjegyzések

• A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyik u_i-ben felvevődik az optimum.

• A kép csalóka. Az hogy „csak véges sok” érték közül kell kiválasztani az optimálisat, az nem jelenti azt hogy egyszerű a feladat. Nagyon nagy halmaz lehet a generátor elemek halmaza. Végignézni mindet nem egy hatékony eljárás.

• A kúp feletti optimalizásció is egyszerűnek tűnik.

Megjegyzések

• A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyik u_i-ben felvevődik az optimum.

• A kép csalóka. Az hogy „csak véges sok” érték közül kell kiválasztani az optimálisat, az nem jelenti azt hogy egyszerű a feladat. Nagyon nagy halmaz lehet a generátor elemek halmaza. Végignézni mindet nem egy hatékony eljárás.

• A kúp feletti optimalizásció is egyszerűnek tűnik. Ha $c^T v_i$ pozitív valamely i-re akkor a célfüggvény tetszőleges nagy lehet.

Megjegyzések

- A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyik u_i-ben felvevődik az optimum.

- A kép csalóka. Az hogy „csak véges sok” érték közül kell kiválasztani az optimálisat, az nem jelenti azt hogy egyszerű a feladat. Nagyon nagy halmaz lehet a generátor elemek halmaza. Végignézni mindet nem egy hatékony eljárás.

- A kúp feletti optimalizásció is egyszerűnek tűnik. Ha $c^T v_i$ pozitív valamely i-re akkor a célfüggvény tetszőleges nagy lehet. Ha mindegyik $c^T v_i$ nempozitív, akkor a célfüggvény nem vesz fel pozitív értéket.

Megjegyzések

- A politóp feletti lineáris függvény optimalizálása egyszerűnek tűnik. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyik u_i-ben felvevődik az optimum.
- A kép csalóka. Az hogy „csak véges sok” érték közül kell kiválasztani az optimálisat, az nem jelenti azt hogy egyszerű a feladat. Nagyon nagy halmaz lehet a generátor elemek halmaza. Végignézni mindet nem egy hatékony eljárás.
- A kúp feletti optimalizásció is egyszerűnek tűnik. Ha $c^T v_i$ pozitív valamely i-re akkor a célfüggvény tetszőleges nagy lehet. Ha mindegyik $c^T v_i$ nempozitív, akkor a célfüggvény nem vesz fel pozitív értéket. A maximális érték 0 lesz, ami az origóban felvevődik.

Szünet

Átfogalmazások

Átfogalmazások

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.

Átfogalmazások

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.
- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.

Átfogalmazások

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.

- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.

- Ezek az átírások az eredetivel ekvivalensek. Mégis ugyaznazon probléma kissé eltérő alakjai közt lényeges különbség lehet.

Átfogalmazások

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.

- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.

- Ezek az átírások az eredetivel ekvivalensek. Mégis ugyaznazon probléma kissé eltérő alakjai közt lényeges különbség lehet.

- Ekvivalens átalakítás alatt olyan formális átalakítást értünk, hogy bármelyik feladat optimális értéke/helye a másik feladat optimális értéke/helye alapján könnyen megadható.

Átfogalmazások

- Egy megértett optimalizálási probléma esetén több lehetőség van annak formalizálására.
- Másképpen fogalmazva egy formalizált optimalizálási probléma gyakran átfogalmazható úgy, hogy ugyanazt a problémát írja le.
- Ezek az átírások az eredetivel ekvivalensek. Mégis ugyaznazon probléma kissé eltérő alakjai közt lényeges különbség lehet.
- Ekvivalens átalakítás alatt olyan formális átalakítást értünk, hogy bármelyik feladat optimális értéke/helye a másik feladat optimális értéke/helye alapján könnyen megadható.
- Most (a teljesség igénye nélkül) néhány lehetőségét megemlítünk.

Min/max csere

Min/max csere

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximalizáljuk} & c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & -c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}}$$

Min/max csere

Maximalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

$\equiv$

Minimalizáljuk	$-c(x)$-et
feltéve, hogy	$x \in \mathcal{F}$

A minimalizálási probléma egy optimális pontja egyben a maximalizálási problémának is optimális pontja. Ha a mimimalizálási probléma optimális értékét ismerjük, akkor annak ellentettje lesz a maximalizálási probléma optimális értéke.

A feltételek ekvivalens átírása

A feltételek ekvivalens átírása

A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait. A feltételeinknél ezeket természetesen felhasználhatjuk.

A feltételek ekvivalens átírása

A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait. A feltételeinknél ezeket természetesen felhasználhatjuk.

Példa

$$\frac{x_1}{x_2^2+1} \leq 0 \Longleftrightarrow x_1 \leq 0.$$

A feltételek ekvivalens átírása

A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait. A feltételeinknél ezeket természetesen felhasználhatjuk.

Példa

$$\frac{x_1}{x_2^2+1} \leq 0 \iff x_1 \leq 0.$$

Példa

$$(x_1+x_2)^2 \leq 0 \iff (x_1+x_2)^2 = 0 \iff x_1+x_2 = 0.$$

A feltételek ekvivalens átírása

A középiskolában már láttunk formulák/egyenlőtlenségek/egyenlőségek ekvivalens átalakításait. A feltételeinknél ezeket természetesen felhasználhatjuk.

Példa

$$\frac{x_1}{x_2^2+1} \le 0 \iff x_1 \le 0.$$

Példa

$$(x_1+x_2)^2 \le 0 \iff (x_1+x_2)^2 = 0 \iff x_1+x_2 = 0.$$

Példa

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ - x_2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 = 5 \\ - x_2 = 4 \end{cases}$$

A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

- Az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldása alap algebra tananyag.

A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

- Az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldása alap algebra tananyag. Az általános megoldás $x = x_0 + Fy$ alakban írható, ahol x_0 egy tetszőleges megoldás, míg F oszlopai az $Ax = 0$ egyenletrendszer által leírt altér egy generáló rendszere.

A lineáris egyenlőségek kiküszöbölése

- Az $Ax = b$ lineáris egyenlőségrendszer megoldása alap algebra tananyag. Az általános megoldás $x = x_0 + Fy$ alakban írható, ahol x_0 egy tetszőleges megoldás, míg F oszlopai az $Ax = 0$ egyenletrendszer által leírt altér egy generáló rendszere. Ha F-nek s oszlopa van, akkor $y \in \mathbb{R}^s$. x_0 és F meghatározása hatékonyan megtehető.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & f_i(x) \le 0 \\ & Ax = b \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c(x_0 + Fy)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & f_i(x_0 + Fy) \le 0 \\ & \end{array}}$$

Slack változók, egyenlőtlenségek helyettesítése előjelfeltételekkel

Slack változók, egyenlőtlenségek helyettesítése előjelfeltételekkel

Minimalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$f_i(x) \leq 0$
	$g_i(x) = 0$

$$\equiv$$

Minimalizáljuk	$c(x)$-et
feltéve, hogy	$f_i(x) + s_i = 0$
	$g_i(x) = 0$
	$s_i \geq 0$

A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe

A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe

Legyen $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növő függvény range c-n (a célfüggvény által felvett értékek halmazán). Ekkor

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}} \equiv$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & m(c(x))\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}}$$

A célfüggvény helyettesítése egy monoton függvénybe

Legyen $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növő függvény range c-n (a célfüggvény által felvett értékek halmazán). Ekkor

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & c(x)\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}} \equiv \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & m(c(x))\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}}$$

Példa

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \|x\|_2\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}} \equiv \boxed{\begin{array}{ll} \text{Minimalizáljuk} & \|x\|_2^2\text{-et} \\ \text{feltéve, hogy} & x \in \mathcal{F} \end{array}}$$

LP: Poliedrikus normálforma

LP: Poliedrikus normálforma

- Az első normálformában nem engedünk meg egyenlőségeket:

LP: Poliedrikus normálforma

- Az első normálformában nem engedünk meg egyenlőségeket:

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$

LP: Poliedrikus normálforma

- Az első normálformában nem engedünk meg egyenlőségeket:

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$

- Azaz a lehetséges megoldások halmaza egy poliéder. Ezen halmaz felett maximalizálunk egy lineáris függvényt. Ezt a normálformát **poliedrikus normálformának** nevezem.

LP: Poliedrikus normálforma: Példa

LP: Poliedrikus normálforma: Példa

Példa

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximalizáljuk} & x_1 + x_2 - 7x_3 - x_4 + 2x_5\text{-t} \\
\text{Feltéve, hogy} & \begin{cases} -x_1 + x_2 \phantom{{}- 5x_3} - x_4 + 3x_5 \leq 1 \\ x_1 - 5x_3 + 7x_5 \leq 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 \leq 2 \end{cases}
\end{array}$$

LP: Előjeles poliedrikus normálforma

LP: Előjeles poliedrikus normálforma

- A második normálforma esetén az egyenlőség feltételek mellőzése mellett minden változóról feltesszük, hogy nemnegatív:

LP: Előjeles poliedrikus normálforma

- A második normálforma esetén az egyenlőség feltételek mellőzése mellett minden változóról feltesszük, hogy nemnegatív:

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$
	$x \succeq 0$

LP: Előjeles poliedrikus normálforma

• A második normálforma esetén az egyenlőség feltételek mellőzése mellett minden változóról feltesszük, hogy nemnegatív:

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax \preceq b$
	$x \succeq 0$

• Tehát ez is egy speciális poliedrikus forma, ahol n változó esetén szükségszerűen n előjelfeltétel szerepel. Geometriailag a lehetséges megoldások poliédere a nemnegatív koordinátájú pontok tér 2^n-ed részében van. Ezt a normálformát **előjeles poliedrikus normálformának** nevezem.

LP: Előjeles poliedrikus normálforma: Példa

LP: Előjeles poliedrikus normálforma: Példa

Példa

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
\text{Maximalizáljuk} & x_1 + x_2\text{-t} \\
\text{Feltéve, hogy} & \left\{\begin{array}{rcrl} -x_1 & + & x_2 & \le 1 \\ x_1 & & & \le 3 \\ & & x_2 & \le 2 \end{array}\right. \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
}
$$

Szimplex normálforma

Szimplex normálforma

- A harmadik normálforma a szimplex algoritmushoz legjobban „illő” normálforma. A változókról feltesszük, hogy nemnegatívak, de most lineáris egyenlőségek a további feltételek:

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax = b$
	$x \succeq 0$

Szimplex normálforma

- A harmadik normálforma a szimplex algoritmushoz legjobban „illő" normálforma. A változókról feltesszük, hogy nemnegatívak, de most lineáris egyenlőségek a további feltételek:

Maximalizáljuk	$c^T x$-t
Feltéve, hogy	$Ax = b$
	$x \succeq 0$

Ezt a formát **szimplex normálformának** vagy egyszerűen **szimplexalaknak** nevezem.

LP: Szimplexalak: Példa

LP: Szimplexalak: Példa

Példa

Maximalizáljuk $x_1 + x_2$-t

Feltéve, hogy
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = 1 \\ x_1 + x_4 & = 3 \\ x_2 + x_5 & = 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Megjegyzések a szimplexalakhoz

Megjegyzések a szimplexalakhoz

- Feltesszük, hogy A sorai (k darab vektor) lineárisan független vektorok.

Megjegyzések a szimplexalakhoz

- Feltesszük, hogy A sorai (k darab vektor) lineárisan független vektorok.
- Ez nem megszorító feltétel:

Megjegyzések a szimplexalakhoz

- Feltesszük, hogy A sorai (k darab vektor) lineárisan független vektorok.
- Ez nem megszorító feltétel: Az $Ax = b$ egyenletrendszer Gauss-eliminációval ekvivelens módon átalakítható.

Megjegyzések a szimplexalakhoz

- Feltesszük, hogy A sorai (k darab vektor) lineárisan független vektorok.

- Ez nem megszorító feltétel: Az $Ax = b$ egyenletrendszer Gauss-eliminációval ekvivelens módon átalakítható. Ha A sorai nem lineárisan függetlenek, akkor az elimináció során valamelyik egyenlet bal oldala lenullázódik.

Megjegyzések a szimplexalakhoz

- Feltesszük, hogy A sorai (k darab vektor) lineárisan független vektorok.

- Ez nem megszorító feltétel: Az $Ax = b$ egyenletrendszer Gauss-eliminációval ekvivelens módon átalakítható. Ha A sorai nem lineárisan függetlenek, akkor az elimináció során valamelyik egyenlet bal oldala lenullázódik. Egyenletrendszerünk vagy ellentmondásos, vagy valamelyik egyenlet elhagyható.

Megjegyzések a szimplexalakhoz

- Feltesszük, hogy A sorai (k darab vektor) lineárisan független vektorok.

- Ez nem megszorító feltétel: Az $Ax = b$ egyenletrendszer Gauss-eliminációval ekvivelens módon átalakítható. Ha A sorai nem lineárisan függetlenek, akkor az elimináció során valamelyik egyenlet bal oldala lenullázódik. Egyenletrendszerünk vagy ellentmondásos, vagy valamelyik egyenlet elhagyható.

- A sorok függetlensége azt jelenti, hogy $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$-nak van olyan $k \times k$ méretű részmátrixa, ami invertálható.

Megjegyzések a szimplexalakhoz

- Feltesszük, hogy A sorai (k darab vektor) lineárisan független vektorok.

- Ez nem megszorító feltétel: Az $Ax = b$ egyenletrendszer Gauss-eliminációval ekvivelens módon átalakítható. Ha A sorai nem lineárisan függetlenek, akkor az elimináció során valamelyik egyenlet bal oldala lenullázódik. Egyenletrendszerünk vagy ellentmondásos, vagy valamelyik egyenlet elhagyható.

- A sorok függetlensége azt jelenti, hogy $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$-nak van olyan $k \times k$ méretű részmátrixa, ami invertálható.

- Sőt, azt is feltesszük, hogy A-nak I_k részmátrixa. Ez sem megszorító feltételezés.

Megjegyzések a szimplexalakhoz

- Feltesszük, hogy A sorai (k darab vektor) lineárisan független vektorok.
- Ez nem megszorító feltétel: Az $Ax = b$ egyenletrendszer Gauss-eliminációval ekvivelens módon átalakítható. Ha A sorai nem lineárisan függetlenek, akkor az elimináció során valamelyik egyenlet bal oldala lenullázódik. Egyenletrendszerünk vagy ellentmondásos, vagy valamelyik egyenlet elhagyható.
- A sorok függetlensége azt jelenti, hogy $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$-nak van olyan $k \times k$ méretű részmátrixa, ami invertálható.
- Sőt, azt is feltesszük, hogy A-nak I_k részmátrixa. Ez sem megszorító feltételezés.
- Ha a második poliedrikus formában lévő LP feladatot szimplex formára hozzuk (slack változók segítségével), akkor feltevésünk automatikusan teljesül.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!