

KOMBINATORIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉG GYAKORLAT
matematika BSc hallgatók számára

Feladatsor

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2025

1. Kombinatorikus függvények becslése

1. Tétel (Kombinatorika). Egy n elemű véges halmaz sorbaállításainak száma

$$n!.$$

$n!$ az első n pozitív egész szorzata, azaz $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^n i$. (Ebbe beleértjük, hogy $0!$ az üres szorzat, amely értéke 1. Továbbá $1!$ értéke is 1, egy egy tényező szorzat, ahol az egy tényező értéke 1.)

(1) Bitonyítsuk be, hogy minden n -re

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} \leq n! \leq n^n.$$

(2) Bizonyítsuk be, hogy minden n -re

$$n^{n/2} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n < \frac{e}{2^n} n^n.$$

2. Tétel (Analízis). Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n=1}^\infty$ egy szigorúan monoton növekvő, korlátos sorozat. Ebből a két tulajdonságból következik, hogy a sorozat konvergens. A sorozat határértéke az e szám.

(3) Bizonyítsuk be, hogy minden n -re

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n!.$$

3. Tétel (Kombinatorika). Egy n elemű véges halmaz k elemű részhalmazainak száma

$$\binom{n}{k}.$$

$\binom{n}{k}$ kiszámolható, mint

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}.$$

(4) Igazoljuk, hogy

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(e \cdot \frac{n}{k}\right)^k$$

4. Tétel (Stirling-formula (analízis/valószínűségszámítás)).

$$n! \sim \sqrt{\pi} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n},$$

ahol $a_n \sim f(n)$ azt jelenti, hogy $\frac{a_n}{f(n)} \rightarrow \infty$ amennyiben $n \rightarrow \infty$. $a_n \sim f(n)$ olvasata: a_n aszimptotikusan egyenlő $f(n)$ -nel.

(5) Adjunk aszimptotikus formulát a következő binomiális együtthatókra:

(i)

$$\binom{2n}{n},$$

(ii)

$$\binom{2n}{n - \sqrt{n}},$$

(iii)

$$\binom{n}{\alpha n},$$

ahol $0 < \alpha < 1$ adott konstans.

2. Valószínűség számítási alapok

(6) Igazoljuk, hogy

(i) $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$

(ii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$

(iii) $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots + \mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$

Jelölés. Legyen $R_1, R_2, \dots, R_n$ részhalmazai egy S véges alaphalmaznak. Legyen $J = S \setminus \cup_{i=1}^n R_i = S - \cup_{i=1}^n R_i$.

Legyen $I \subset \{1, 2, \dots, n\} = [n]$. Ekkor legyen $R_I = \cup_{i:i \in I} R_i$. $R_\emptyset = S$

Legyen $\sigma_k = \sum_{I:|I|=k} |R_I|$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

5. Tétel (Szita formula (kombinatorika)).

$$|J| = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \dots + (-1)^n \sigma_n.$$

(7) (Bonferroni) Igazoljuk, hogy $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \dots - \sigma_{2k+1} \leq |J| \leq \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \dots + \sigma_{2k}.$$

(8) Általánosítsuk a szita formula egyenlőségét és a Bonferroni egyenlőtlenségeket $\mathbb{P}(\Omega - \cup_{i=1}^n R_i)$ -re vonatkozó egyenlőségekre és egyenlőtlenségekre.

(9) (i) Válasszunk ki egy véletlen $f : [n] \rightarrow [n]$ függvényt uniform eloszlással. Mi a valószínűsége, hogy nincs fixpontja? Hogyan változik ez a valószínűség, ha $n \rightarrow \infty$?

(ii) Válasszunk ki egy véletlen $f : [n] \rightarrow [n]$ permutációt uniform eloszlással. Mi a valószínűsége, hogy nincs fixpontja? Hogyan változik ez a valószínűség, ha $n \rightarrow \infty$?

3. Közepek

Definíció. Legyenek $a : a_1, a_2, \dots, a_n$ nem-negatív valós számok. Az a_i számok
(i) számtani/aritmetikai közepe

$$A(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

(ii) négyzetes közepe

$$Q(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}},$$

(i) mértani/geometria közepe

$$G(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

(i) harmonikus közepe

$$H(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

6. Tétel. Tetszőleges $a : a_1, a_2, \dots, a_n$ nem-negatív valós számokra

$$H(a) \leq G(a) \leq A(a) \leq Q(a).$$

(10) Igazoljuk, hogy

$$\min_i a_i \leq H(a) \leq G(a) \leq A(a) \leq Q(a) \leq \max_i a_i.$$

Definíció. $a : a_1, a_2, \dots, a_n$ nem-negatív valós számokra rendeljünk hozzá egy $K(a)$ értéket. Azt mondjuk, hogy K egy *közép*, ha

$$\min_i a_i \leq K(a) \leq \max_i a_i.$$

(11) Legyenek $p : p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+$ számok, amelyek összege 1. Legyen

$$K_p(a) = p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \dots + p_n \cdot a_n.$$

Igazoljuk, hogy K_p egy közép.

Definíció. $p : p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+$ számokat, amelyek összege 1 valószínűségi eloszlásnak nevezzük a $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset \mathbb{R}$ halmazon.

(12) Legyen X egy p eloszlású H -értékű valószínűségi változó. Igazoljuk, hogy

$$\min H \leq \mathbb{E}(X) \leq \max H.$$

(13) Legyen X egy p eloszlású H -értékű valószínűségi változó. Igazoljuk, hogy

$$\mathbb{E}^2(X) \leq \mathbb{E}(X^2).$$