

KOMBINATORIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉG GYAKORLAT

matematika BSc hallgatók számára

Feladatsor: Ramsey-elmélet

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2025

1. Ramsey-számok

1. Tétel (Ramsey tétele (Kombinatorika)). (i) Minden $k \geq 2$ egész szám esetén elég nagy pontú teljes gráf éleit tetszőlegesen színezve piros/kék-kel biztos találhatunk k pontot, amelyek között minden él azonos színű.

(ii) Minden $k, \ell \geq 2$ egész szám esetén elég nagy pontú teljes gráf éleit tetszőlegesen színezve piros/kék-kel biztos találhatunk k pontot, amelyek között minden él piros vagy ℓ pontot, amelyek között minden él kék.

(1) A fenti két állítást elolvasva az első benyomásunk az, hogy a (ii) általánosabb mint (i). Érveljünk, hogy a két állítás lényegében ugyanaz.

Definíció. (Kombinatorika)

A tétel (i) részéhez tartozó pontszámra vonatkozó pontos küszöbértéket jelöljük $R(k)$ -val.

A tétel (ii) részéhez tartozó pontszámra vonatkozó pontos küszöbértéket jelöljük $R(k, \ell)$ -val.

(2) Igazoljuk, hogy $R(3, 4) \geq 9$.

(3) Igazoljuk, hogy $R(3, 4) \leq 10$.

(4) Igazoljuk, hogy $R(3, 4) \leq 9$.

(5) Igazoljuk, hogy $R(4) = R(4, 4) \leq 18$.

(6) Igazoljuk, hogy

$$R(k, \ell) \leq R(k-1, \ell) + R(\ell, k-1).$$

(7)

(i) Hány piros/kék élszínezése van a $V = \{1, 2, \dots, n\}$ csúcshalmazon vett teljes gráfnak?

(ii) Ezek közül hányban lesz az $U = \{1, 2, \dots, 20\}$ egy monokromatikus halmaz?

(iii) Igazoljuk, hogy $1000 \leq R(20)$.

(iv) Próbáljuk meg javítani ezt az alsó becslést $R(20)$ -ra.

(8) Igazoljuk, hogy

$$\binom{n}{k} \cdot 2 \cdot 2^{-\binom{k}{2}} < 1,$$

ha $n = \sqrt{2}^k$ (feltehetjük, hogy k páros).

(9) Igazoljuk az alábbi állítások helyességét:

(a) Minden k esetén, a legnagyobb n amelyre teljesül, hogy

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$$

$$\text{arra } n = \left(\frac{1}{e\sqrt{2}} + o(1) \right) k 2^{k/2}.$$

(b) Minden k esetén

$$n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$$

legnagyobb értéke

$$\left(\frac{1}{e} + o(1) \right) k 2^{k/2}$$

ahol n a természetes számokon fut.

(c) Minden k esetén, a legnagyobb n amelyre

$$e \left(\binom{k}{2} \binom{n}{k-2} + 1 \right) 2^{1-\binom{k}{2}}$$

teljesíti, hogy

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{e} + o(1) \right) k 2^{k/2} < 1.$$

(10) Igazolja, hogy ha $p \in [0, 1]$ esetén az n természetes számra teljesül, hogy

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{\ell} (1-p)^{\binom{\ell}{2}} < 1$$

akkor $R(k, \ell) > n$.

(11) Igazolja, hogy

$$R(4, t) \geq c \left(\frac{t}{\log t} \right)^{3/2}$$

alkalmas $c > 0$ konstanssal.