

KOMBINATORIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉG GYAKORLAT

matematika BSc hallgatók számára

Feladatsor: Turnamentek

Gyakorlatvezető: Hajnal Péter

2025

Definíció. Egy T irányított gráf *turnament*, ha egy teljes gráf egy irányítása.

Másképpen egy hurokél-mentes irányított T akkor és csak akkor turnament, ha bármely két különböző csúcsa között pontosan egy él halad (valamelyik irányban).

Jelölés. Legyen $\mathcal{T}_n$ azon turnamentek által alkotott halmaz, amelyek csúcshalmaza $V = \{1, 2, \dots, n\}$.

1) Határozzuk meg $\mathcal{T}_n$ elemszámát.

Definíció. Egy G irányított gráfban egy P irányított út Hamilton-út, ha P minden csúcsot tartalmaz. (Persze pontosan egyszer, hiszen út.)

Egy T turnamentben egy H Hamilton-út azonosítható V egy π sorbarendezésével: ahol a feltétel az, hogy minden $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ esetén $\overrightarrow{\pi(i)\pi(i+1)}$ él legyen T -ben.

2) Legyen $T \in \mathcal{T}_{n-1}$ egy turnament egy π Hamilton-úttal. Adjunk T -hez hozzá egy új ' n ' csúcsot és kössük össze a régi csúcsokkal, majd ezeket az éleket tetszőlegesen irányítsuk.

Igazoljuk, hogy a kapott $T^+ \in \mathcal{T}_n$ turnamentben π -ből nyerhető egy Hamilton-út az ' n ' csúcs beszúrásával.

3) Igazoljuk, hogy minden turnamentben van van Hamilton-út.

4) Legyen π a csúcsok egy sorbaállítása egy hurokél-mentes irányított gráfban. Ekkor minden él természetes módon balról-jobbra vagy jobbról-balra kategóriába sorolható.

Hogyan változik a balról-jobbra élek száma, ha két szomszédos csúcsot felcserélünk a sorbaállításban?

5) Igazoljuk, hogy minden turnamentben van van Hamilton-út.

Jelölés. Legyen G egy irányított gráf. $h(G)$ jelölje a Hamilton-utak számát G -ben.

A korábbi feladat alapján minden T turnamentre $1 \leq h(T)$. Nyilván $1 \leq h(T) \leq n!$.

Jelölés.

$$H(n) = \max_{T \in \mathcal{T}_n} h(T).$$

6) Legyen $T \in \mathcal{T}_n$ egy tetszőleges turnament. Tegyük fel, hogy n páros.

- (i) Hány olyan π Hamilton-út van, amely első két eleme $1, 2$ (a sorrendről nem nyilatkoztam), harmadik és negyedik eleme $3, 4, \dots$ (azaz a $2i - 1$ -edik és $2i$ -edik eleme $2i - 1$ és $2i$ valamilyen sorrendben ($i = 1, 2, \dots, n/2$))?

- (ii) Adjunk javított becslést $H(n)$ -re. ($n!$ az alap felső becslés.)
- (iii) Hogyan kell "egész-részezni", hogy a becslés minden n -re teljesüljön?

7) Egy adott π esetén, hány olyan $T \in \mathcal{T}_n$ van, amelynek π Hamilton-útja?

8) Mi az átlagon a $h(T)$ számoknak ($T \in \mathcal{T}_n$)? Mi következik ebből $H(n)$ -re?

Definíció. Legyen $(a_i)_{i=1}^\infty$ egy valós sorozat. $(a_i)_{i=1}^\infty$ szubadditív, ha tetszőleges $k, \ell \in \mathbb{N}_+$ esetén

$$a_{k+\ell} \leq a_k + a_\ell.$$

9)

(i) Legyen $k, \ell \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$. Igazoljuk, hogy $H(k + \ell) \leq \binom{k+\ell}{k} H(k) H(\ell)$.

(ii) Igazoljuk, hogy

$$\log_2 \frac{H(n)}{n!}$$

egy szubadditív függvény.

10)

(i) [Fekete Mihály Lemmája] Legyen $(a_i)_{i=1}^\infty$ egy szubadditív sorozat. Igazoljuk, hogy az $\frac{a_n}{n}$ sorozatnak van határértéke, ha $n \rightarrow \infty$.

(ii) Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{H(n)}{n!}}$$

létezik.

Definíció. Egy $T \in \mathcal{T}_n$ turnament k -zavaros, minden k -elemű K csúcshalmazra van olyan v_K csúcs, amelyből vezet él K összes csúcsához

11) Tetszőleges $n, k \in \mathbb{N}_+$ esetén amennyiben

$$\binom{n}{k} (1 - 2^{-k})^{n-1} < 1,$$

akkor van n csúcsú k -zavaros turnament.

12) Igazoljuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}_+$ esetén elég nagy n -re van $T \in \mathcal{T}_n$ turnament, amely k -zavaros.

Definíció. Legyen T egy turnament és v egy csúcsa.

- (i) v teljes-nyerő, ha minden v -re illeszkedő él v -től elfelé irányított.
- (ii) v sorozta-nyerő, ha v -ből indul ki Hamilton-út.
- (iii) v pszeudó-nyerő, ha minden v -től különböző csúcshoz vezet v -ből induló 1 vagy 2 hosszú irányított út.

13) Igazoljuk, hogy minden $T \in \mathcal{T}_n$ turnamentre

- (i) T -ben nem biztos, hogy van totál-nyerő csúcs. De ha van totál-nyerő csúcs, akkor az egyértelmű.
- (ii) T -ben biztos, hogy van sorozat-nyerő csúcs. Továbbá általában ez nem egyértelmű. Sőt van olyan turnament, amelyben minden csúcs sorozat-nyerő csúcs.
- (iii) T -ben biztos, hogy van pszeudó-nyerő csúcs. Továbbá általában ez nem egyértelmű. Sőt van olyan turnament, amelyben minden csúcs pszeudó-nyerő csúcs.

Definíció. Egy egyszerű irányított gráf olyan irányított gráf, amelyben nincs hurokél és minden u és v csúcsra legfeljebb egy él halad u -ból v -be (vegyük észre, hogy minden különböző csúcsokat tartalmazó csúcspárra két feltételünk van).

Definíció. A V csúcshalmazú teljes irányított gráfban minden u és v különböző csúcsra pontosan egy $\overrightarrow{uv}$ él van (u és v szerepének felcserélésével ez azt is jelenti, hogy pontosan egy $\overrightarrow{vu}$ és is van).

Minden egyszerű V csúcshalmazú irányított gráf a V csúcshalmazú teljes irányított gráf részgráfja. Így definiálható a komplementer gráf fogalma egyszerű irányított gráfokra.

14) Ellenőrizzük, hogy minden $\overrightarrow{T}$ turnamentre $\overrightarrow{\overrightarrow{T}} = \overleftarrow{T}$, ahol $\overleftarrow{T}$ úgy kapható $\overrightarrow{T}$ -ből, hogy minden él irányítását megfordítjuk.

Igazoljuk, hogy $h(\overleftarrow{T}) = h(\overrightarrow{T})$.

15)* Igazoljuk, hogy minden egyszerű irányított gráfra $h(G) \equiv h(\overline{G}) \pmod{2}$.

16) Igazoljuk, hogy T turnamentre

$$h(T) + h(T - \overrightarrow{e} + \overleftarrow{e}) = h(T - \overleftarrow{e}) + h(T + \overrightarrow{e}),$$

ahol $\overrightarrow{e}$ a T turnament egy éle és $\overleftarrow{e}$ az $\overrightarrow{e}$ megfordítottja.

17)* Igazoljuk, hogy T turnamentre $h(T)$ páratlan.