

Ramsey-számok

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2024. ősz

Egy fejtörő

Egy ismert középiskolai feladattal, fejtörővel kezdünk.

Feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges hatfős társaságban található három ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

- A feladat zárójelbeli megjegyzése arra utal, hogy a társaság emberei között az ismeretséget egy egyszerű gráffal írhatjuk le.
- Az ismeretséget leíró gráfban a csúcsok az emberek.
- Két ember/csúcs pontosan akkor szomszédos/összekötött ha ismerik egymást.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása

Három ember, akik páronként ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű klikket alkotnak.

Definíció: Klikk

Egy gráfban egy $K \subset V(G)$ csúcshalmaz klikk, ha K tetszőleges két különböző csúcsa összekötött.

Három ember, akik páronként nem ismerik egymást, azok az ismeretséget leíró gráfban egy három elemű független csúcshalmazt alkotnak.

Definíció: Független csúcshalmaz

Egy gráfban egy $F \subset V(G)$ csúcshalmaz független, ha nincs olyan él, amely mindkét végpontja F -beli.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása (folytatás)

Észrevétel

Egy csúcshalmaz akkor és csak akkor klikk, ha ugyanezen csúcshalmaz független a komplementer gráfban.

Definíció: Homogén halmaz

Egy H csúcshalmazt nevezünk homogénnek, ha bármely két különböző eleme az összekötöttség szempontjából ugyanolyan.

Feladat (gráfelmélet nyelvezet)

Minden hatpontú egyszerű gráfban van három elemű homogén halmaz.

A feladat gráfelméleti megfogalmazása színezésekkel

- A feladat „gráfelméleti lefordítására ” van más lehetőség is.
- A társaságot alkotó emberek most is gráfunk csúcshalmazát alkotják. Azonban bármely két csúcsot összekötünk. Ezzel egy teljes gráfot kapunk. (Mondhatjuk azt is, hogy $V(G)$, a teljes csúcshalmaz egy klikk lesz.)
- Az ismeretség/nem ismerős viszonyt most színekkel „kódoljuk”.
- x -et és y -t összekötő élt kékre színezzük ha az x csúcs által reprezentált személy ismeri az y csúcs által reprezentált személyt.
- Különben az összekötő él piros lesz. A társaság ismeretségi viszonyát egy piros/kék élszínezett teljes gráffal „kódoltuk”.

Feladat (második gráfelmélet nyelvezet)

K_6 tetszőleges piros/kék élszínezésében garantáltan található három olyan csúcs, amelyek között mindhárom él ugyanolyan színű (monokormatikus).

A feladat megoldása

- Vegyük a hatpontú teljes gráfunk egy tetszőleges v csúcsát.
- A további öt csúcsot két csoportba oszthatjuk aszerint, hogy a hozzá vezető él piros vagy kék.
- A két szín szimmetriája miatt feltehetjük, hogy a kék éllel elérhető csúcsok vannak többen.
- Azaz legalább három csúcshoz vezet kék él v -ből. Három ilyen csúcs alkossa a J halmazt.
- Két esetet különböztetünk meg.
 1. eset: J -n belül halad kék él.
Legyen egy ilyen él az xy él. Ekkor $\{v, x, y\}$ egy kék monokromatikus halmaz.
 2. eset: J -n belül nem halad kék él. Ekkor J egy piros monokromatikus halmaz.
- Készen vagyunk.

Ramsey-tétel

- Frank Plumpton Ramsey (1903—1930) brit matematikus (jelentős filozófiai és közgazdaságtani munkássággal) bizonyította be az alábbi tételt:

Ramsey-tétel 1929, társaságos nyelvezet

Tetszőleges 4^k fős társaságban található k ember, akik páronként ismerik vagy páronként nem ismerik egymást. (Az ismeretséget kölcsönös viszonynak tekintjük.)

Ramsey tétele 1929, színezéses nyelvezet

K_{4^k} éleit tetszőlegesen színezve piros/kékkel garantáltan található k csúcs, amelyek között haladó összes $\binom{k}{2}$ darab) él ugyanolyan színű.

Azaz a 4^k pontú teljes gráf minden piros/kék élszínezésében van k -elemű monokromatikus halmaz.

Ramsey-tétel bizonyítása

- Rendezzük sorba a csúcsokat.
- Válasszuk ki az első v csúcsot.
- A többi csúcsot osszuk két csoportba aszerint, hogy hozzájuk v -ből piros vagy kék él megy.
- A többségi szomszédokat tartsuk meg (ezeket túlélő csúcsoknak nevezzük), a kisebbségi csúcsokat dobjuk el. Könnyű látni, hogy a csúcsok legalább fele túlélő csúcs.
- A túlélő csúcsokkal ismételjük meg a fentieket:
 - Az első túlélő u csúcsot kiválasztjuk (a már kiválasztott v mellé).
 - A többi túlélő csúcsot a hozzávezető él színétől függően két csoportba osztjuk.
 - A többségi szomszédokat meghagyjuk, a többit eldobjuk.
- Ezt ismételjük addig amíg a túlélő csúcsok elfogynak.

Bizonyítás (folytatás)

- Így kiválasztunk csúcsok egy halmazát. Minden lépésben a csúcsok legalább fele túlélő marad. A kiinduló csúcsszám $4^k = 2^{2k}$. Tehát legalább $2k$ felezésre lehetőség van. Legalább $2k$ csúcsot kiválasztunk.
- Ez a csúcshalmaz nem szükségszerűen monokromatikus. Az elsőnek kiválasztott v csúcsból ugyanolyan színű élek haladnak ki, mondjuk piros. De a másodiknak kiválasztott u esetén a rá illeszkedő többségi szín lehet kék.
- Azt tudjuk, hogy a sorrendben minden kiválasztott csúcsból a későbbi csúcsok felé haladó éle egyszínűek (vagy piros vagy kék).
- A bizonyítás vége egyszerű. Minden kiválasztott csúcsra nézzük meg, hogy hátrafelé piros vagy kék él halad.
- Vegyük a többséget a két csúcskategória közül. Ezek legalább k -an lesznek és nyilvánvalóan monokromatikus halmazt alkotnak.

Definíció

Legyen $R(k)$ az a minimális S szám, hogy az S pontú teljes gráf tetszőleges piros/kék élszínezése esetén garantáltan legyen k elemű monokormatikus csúcshalmaz. Az $R(k)$ számokat nevezzük Ramsey-számoknak.

- Ez egy nehéz definíció.
- Megismétlem képlettel:

$$R(k) = \min\{S \in \mathbb{N} : K_S \text{ éleit tetszőlegesen piros/kék színekkel színezve garantáltan lesz } k \text{ csúcs, amelyek közt minden él ugyanolyan színű}\}.$$

- A kiinduló feladat szerint $R(3) \leq 6$.
- Ramsey tétele szerint $R(k) \leq 4^k$.
- Hiányoznak az alsó becslések.

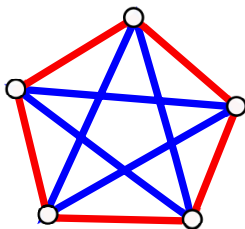
Alsó becslések?

- $R(k) > \ell$, azt jelenti, hogy a K_ℓ teljes gráf élei kiszínezhetők piros/kék színekkel úgy, hogy ne legyen k darab csúcs, amelyek között minden él ugyanolyan színű.
- Egy ilyen állítás legegyszerűbb módja: adjunk meg egy konkrét színezését egy ℓ csúcsú teljes gráfnak és ellenőrizzük a megígért tulajdonságokat.
- Az ilyen bizonyításokat **konstruktívnak** nevezzük.
- Az alábbiakban először két konstruktív bizonyítást mutatok. Tényleg mutatok, nem írok semmit csak „láttatom” a konkrét színezéseket/konstrukciókat.

$R(3)$ alsó becslése, konstrukció

Lemma

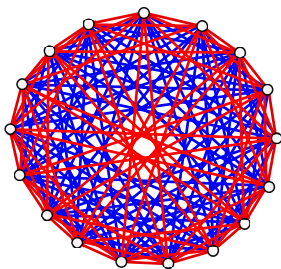
$$R(3) > 5.$$



$R(4)$ alsó becslése, konstrukció

Tétel

$$R(4) > 17.$$



A csúcsok halmaza $\mathbb{Z}_{17} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 16\}$. ij pontosan akkor piros, ha $i - j \in \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$, ahol a „számtan” a modulo 17 ($\mathbb{Z}_{17}$ -beli aritmetika).

Nem konstruktív bizonyítások?

- Vannak más féle, alsó becslést igazoló bizonyítások?

IGEN!

El tudunk ilyet képzelni?



Melyik Ramsey-számokat ismerjük?

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(3) = 6.$$

A bevezető feladat szerint $R(3) \leq 6$. „Láttuk” az alsó becslést is.

Tétel: $R(3)$ értéke.

$$R(4) = 18.$$

„Láttuk” az alsó becslést. A felső becslés (egy feladat egy 18 fős társaságról) nem nehéz. Előtte azonban oldjuk meg az alábbi feladatot.

Feladat

Egy 10 fős társaságban mindig találhatunk négy embert, akik páronként ismerik egymást vagy hármat, akik páronként nem ismerik egymást. Igazoljuk, hogy 9 fős társaságra is igaz ugyanez.

Melyik Ramsey-számokat ismerjük? II.

- $R(5)$ értéke mind a mai napig nem ismert.
- Csak a $43 \leq R(5) \leq 49$ becsléseket tudjuk.
- Erdős „meséje”: „Ha az idegenek megtámadnának minket, és a Föld elpusztításával fenyegetőzve $R(5)$ értékét követelnénk tőlünk, még érdemes lenne minden erőnkkel, a számítógépeket is bevetve nekiesnünk a megoldásnak. $R(6)$ -ot kiszámolni azonban már annyira reménytelen, hogy ha azt kérnék számon rajtunk, nem lenne más választásunk, mint fegyverrel harcolni ellenük.”

Erdős Pál alsó becslés módszere

- Erdős Pál az $R(k) > \ell$ állítás egy új fajta bizonyítását vezette be. Úgy bizonyítja a megfelelő színezés létezését, hogy nem mutat fel egy konkrét színezést.
- Erdős Pál indoklása a következőképpen megy: Vegyünk egy ℓ elemű csúcshalmazt. Minden csúcspárra újra és újra (függetlenül) dobjunk fel egy „számoló korongot”. Ha a piros oldalára esik, akkor fessük az összekötő élt pirosra, ha a kék oldalára esik, akkor fessük kékre. Ha a véletlen színezésnél van esély arra, hogy ne legyen k elemű monokromatikus halmaz, akkor beláttuk az alsó becslést. ◦ Egy példán mutatjuk be módszerét.

Tétel

$$R(20) > 1000.$$

- Az egyszerűség kedvéért jó/rossz eseteket számolunk, kiküszöböljük a valószínűségszámítás nyelvezetét.

A bizonyítás

- Vegyünk fel egy 1000 elemű csúcshalmazt, mondjuk $V = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$. Legyen K a V csúcshalmazon definiált teljes gráf.
- Látnunk kellene, hogy az élek kiszínezhetők piros/kék színekkel, hogy ne legyen olyan 20 elemű csúcshalmaz, amelyen belül minden él ugyanolyan színű.
- A K teljes gráf piros/kék élszínezéseiből készítünk egy táblázatot. A táblázat sorai az összes lehetséges 20 elemű csúcshalmaznak felelnek meg. Egy R részhalmaz sorában élszínezések lesznek. Pontosan azok, amelyek R -en belül minden élt ugyanarra a színre színeznék.
- Mekkora lesz táblázatunk?

Lemma

A táblázatunknak

(i) $\binom{1000}{20}$ sora van.

(ii) Minden sorban $2 \cdot 2^{\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}}$ élszínezés szerepel.

- Az R részhalmaz sorában kialakuló élszínezések listájának (csak egy feltétel van: R -en belül ugyanaz a szín) egy eleméhez el kell döntenünk, hogy
 - (1) az R -en kívüli élek (ebből $\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}$ darab van) színezését hogyan végezzük el. A színezést ezeken az éleken külön-külön egymástól függetlenül végezhetjük. A lehetőségek száma $2^{\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}}$.
 - (2) Másrészt el kell döntenünk, hogy az R -en belüli élek közös színe mi legyen. Erre két lehetőségünk van.

A bizonyítás terve

- A táblázatunkban lévő színezések száma legfeljebb

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}}.$$

- A színezések száma szigorúan kisebb a fenti számnál, hiszen a különböző sorokban a színezések ismétlődnek.
- Ha belátjuk, hogy van olyan színezés, ami táblázatunkban nem szerepel, akkor tételünket beláttuk.
- Ez nyilvánvaló lesz, ha

$$\binom{1000}{20} \cdot 2 \cdot 2^{\binom{1000}{2} - \binom{20}{2}} < 2^{\binom{1000}{2}}.$$

Azaz táblázatunk listája nem tartalmaz annyi elemet mint kiinduló teljes gráfunk összes élszínezése.

- Biztosak lehetünk a táblázatban nem szereplő színezés létezésében, annak ellenére hogy ilyet nem látunk (maga a táblázat is felrajzolhatatlan, áttekinthetetlenül hatalmas).

A számolás

- A szükséges egyenlőtlenség ellenőrzése egyszerű.
- A mindkét oldalon szereplő 2-es tényezőkkel egyszerűsítsünk. Így a bizonyítandó egy ekvivalens formáját kapjuk:

$$\binom{1000}{20} < 2^{\binom{20}{2}-1} = 2^{189}.$$

- A bal oldalon szereplő binomiális együttható becslése egyszerű:

$$\begin{aligned}\binom{1000}{20} &= \frac{1000 \cdot 999 \cdot \dots \cdot 981}{20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 1} < \\ &\frac{1024 \cdot 1024 \cdot \dots \cdot 1024}{16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} = \frac{(2^{10})^{20}}{(2^4)^5} = 2^{200-20} = 2^{180},\end{aligned}$$

ahol a számláló összes tényezőjét (a legkézenfekvőbb kettő hatvánnyal) felülről becsültük, míg a nevező első öt tényezőjét alúlról becsültük 16-tal, a többit pedig 1-gyel.

- A tétel adódik.

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén

- Legyen γ egy véletlen piros/kék élszínezése K -nak uniform eloszlással (mindegyik lehetséges színezés ugyanolyan valószínűségű).
- Legyen M_R az az esemény, hogy egy R 20-elemű csúcshalmazt γ monokromatikusan színez.
- Legyen M az az esemény, hogy γ valamelyik 20-elemű csúcshalmazt monokromatikusan színezi. Azaz

$$M = \cup_{R: R \subset V, |R|=20} M_R.$$

- Így nyilván

$$\Pr[M] \leq \sum_{R: R \subset V, |R|=20} \Pr[M_R].$$

A bizonyítás valószínűségszámítási nyelvén (folytatás)

- A fenti számolás alapján

$$\Pr[M] < 1,$$

azaz M bekövetkezése nem biztos, M komplementere pozitív valószínűségű.

- Ez csak úgy lehet, ha γ valamely értékére M nem következik be: Ebben a színezésben nincs monokromatikus 20-elemű csúcshalmaz.
- Ezt kellett igazolnunk.



- A nyelv változtatása nem tűnik jelentősnek. Első látásra idegen is lehet.
- Az új nyelv azonban a kombinatorika egyik legfontosabb módszerét alapozta meg: a valószínűségszámítási módszerét.

Valószínűségszámítási módszer: Erdős Pál öröksége



- A későbbi alkalmazásokban a nyelv már nem egy öncélú dolog az összeszámolási kérdések eltakarására. A valószínűségszámítás fontos, kikerülhetetlen eszközzé vált. Ebben Erdős Pálnak központi szerepe volt.
- Végül (a számolások mellékelése nélkül) megemlítjük, hogy a módszer általában milyen becslést ad:

Erdős Pál tétele 1947

Ha $k \geq 2$, akkor

$$R(k) \geq (\sqrt{2})^k.$$

- Ramsey és Erdős tétele összegezve

$$(\sqrt{2})^k \leq R(k) \leq 4^k.$$

- A becslések közel 70 éve ismertek és élesítésük központi probléma.
- Egy élesítést megemlítek:

Erdős—Szekeres-tétel

$$R(k) \leq \binom{2k-2}{k-1}.$$

- Ez a becslés $k = 3$ esetén már a 6-ot adja felső becslésként (ahogy a kiinduló feladat). Azonban nagy k esetén sem éri el a $3,9999999^k$ -típusú javítást.

Tétel (Marcelo Campos, Simon Griffiths, Robert Morris, Julian Sahasrabudhe 2023)

$$R(k) \leq (4 - \epsilon)^k,$$

alkalmas $\epsilon > 0$ számra.

Tétel (Parth Gupta, Ndiame Ndiaye, Sergey Norin, Louis Wei 2024)

$$R(k) \leq 3,8^{k+o(k)}.$$

Itt a vége, fuss el véle!

Köszönöm a figyelmet!