

Gráfok nagy kromatikus számmal és derékbősséggel

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2024. ősz

Definíció

Egy $c : V(G) \rightarrow P$ leképezést a G gráf egy (csúcs)színezésének nevezzük. A $c(v)$ a v csúcs színe.

A P halmazt palettának nevezzük, elemei színek. Gondolhatunk $P = \{\text{piros, kék}\}$ halmazra, vagy $P = \mathbb{N}_+$ halmazokra.

Definíció

A G gráf egy színezése jó színezés, ha minden $e \in E(G)$ élre $e = uv$ esetén $c(u) \neq c(v)$.

Ebben a témakörben egyszerű gráfokkal dolgozunk, tehát csúcsszínezések vizsgálatánál MINDEN GRÁFON EGYSZERŰ GRÁFOT FOGUNK ÉRTENI.

Emlékeztető (folytatás)

Definíció

A G gráf egy színezése k -színezés, ha a paletta mérete k .

Definíció

Egy G gráf kromatikus száma

$$\chi(G) = \min \{k : G\text{-nek létezik jó } k\text{-színezése}\}.$$

Színezések és független ponthalmazok

Definíció

A G gráf esetén egy $F \subset V(G)$ csúcshalmazt független ponthalmaznak nevezünk, ha bármely két F -beli pont között nincs él.

Definíció

$\alpha(G) = \max \{|F| : F \text{ független ponthalmaz } G\text{-ben}\}.$

Egy színezés jó színezés, ha minden színosztály egy független halmaz.

Egy jó színezés felfogható úgy is mint a csúcshalmaz egy osztályozása független ponthalmazokra.

Definíció

A G gráf esetén egy $K \subset V(G)$ csúcshalmazt klikknek nevezünk, ha bármely két K -beli pont között van él.

Definíció

$\omega(G) = \max \{|K| : K \text{ klikk } G\text{-ben}\}.$

Észrevétel

Tetszőleges G gráfra $\chi(G) \geq \omega(G).$

Ez következik abból, hogy egy klikkben minden csúcsnak más-más színt kell adnunk jó színezésnél.





Tétel (BSc)

Létezik olyan $\{G_n\}$ gráfsorozat, melyre teljesül, hogy $\omega(G_n) = 2$ (azaz G háromszögmentes), illetve $\chi(G_n) \rightarrow \infty$, ha $n \rightarrow \infty$.

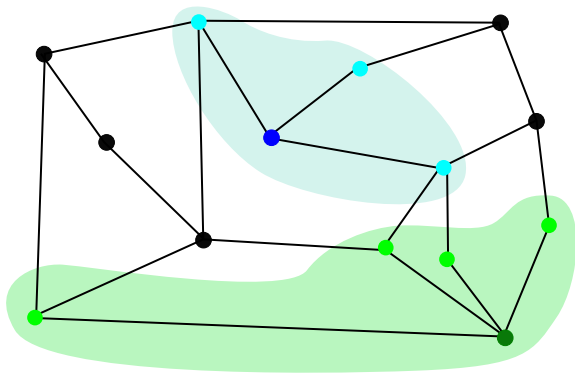


Figure: Háromszögmentes gráf

Lokális vs globális

Vegyünk egy olyan gráfot, amelyben nincs háromszög. Tegyük fel, hogy ennek a gráfnak egy pontjában állunk.

Ez a pont a szomszédaival együtt egy csillagot feszít ki, ami az eredeti gráf részgráfja. Ezen lokális részeket látva semmilyen nehézséget nem érzékelünk a színezési problémával kapcsolatban.

A gráf globális színezéséhez szükséges színszám tetszőlegesen nagy lehet. Ez rávilágít a probléma nehézségére. A nehézség formálisan is igazolható: ez az egyik alap $\mathcal{NP}$ -teljes probléma (szerepel Richard Karp 1972-ben összegyűjtött 21 $\mathcal{NP}$ -teljes problémája között).

Definíció

Tetszőleges G gráf esetén rögzítsünk egy $o \in V(G)$ csúcsot, és tetszőleges $r \in \mathbb{N}^+$ esetén definiáljuk a következő részgráfot:

$$B(o, r) = G \mid_{\{v \in V : d(o, v) \leq r\}},$$

ahol $d(o, v)$ a legrövidebb ov út hosszát jelöli.

Az, hogy minden $B(o, 1)$ csillag az azzal ekvivalens gráfunkban nincs háromszög.

Derékbőség

Erősíthetjük a lokális feltételünket azzal, hogy nagyobb sugár esetén követeljük meg, hogy minden gömb egyszerű legyen.

Hasonlóan $B(o, r)$ -re tett egyszerűségi feltételekre több lehetőség van

- (1) Minden o csúcsra $B(o, r)$ páros gráf. Ez azzal ekvivalens, hogy G -ben nem létezik $2r + 1$ hosszú, vagy rövidebb páratlan kör.
- (2) Minden o csúcsra $B(o, r)$ fa (körmentes, hisz a gömbök összefüggősége nyilvánvaló). Ez azzal ekvivalens, hogy G -ben nem létezik $2r + 1$ hosszú, vagy rövidebb kör.

Definíció

A G gráf derékbőségének (girth) nevezzük a következő gráfparamétert

$$g(G) = \min \{ \ell : G\text{-ben létezik } \ell \text{ hosszú kör} \}.$$

Erdős Pál tétele

Adott egy γ és egy τ pozitív egész szám, akkor létezik-e olyan G gráf, melyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$? Azaz az erősített lokális egyszerűség mellett is elképzelhető-e színezésre bonyolult gráf? A válasz igen.

Tétel (Erdős Pál)

Bármely $\gamma, \tau \in \mathbb{N}^+$ számokhoz létezik olyan G gráf, amelyre $g(G) \geq \gamma$ és $\chi(G) \geq \tau$.

Nem konstruktív bizonyítást adunk a tételre. (Konstruktív bizonyítások is léteznek, de azok nehezebbek.)

A következőkben egy valószínűségszámítási módszeren alapuló bizonyítást mutatunk meg.

Véletlen gráfok

Legyen V egy n elemű csúcshalmaz. n értékét később rögzítjük, egyelőre elég azt tudnunk n -ről, hogy elég nagy.

Bármely V -beli pontpárra behúzzuk a közöttük lévő élt p valószínűséggel (azaz az össze nem kötöttség valószínűsége $1 - p$).

A p ($0 < p < 1$) értékét később adjuk meg n, τ, γ függvényében.

Ezzel a módszerrel felépítünk egy gráf értékű valószínűségi változót. Ez az Erdős—Rényi-féle véletlengráf modell, jelölése

$\underline{G}_{n,p}$.

Több ismeretlen paraméterünk is van. Ennek ellenére előre kijelentett „ígéretek” teszünk, és ezeket vastag betűtípussal fogjuk jelölni. Majd a bizonyítás végén megmutatjuk, hogy ezek az ígéretek valóban teljesülnek/kielégíthetők.

Kromatikus szám helyett független halmazok

A kromatikus szám vizsgálata helyett a könnyebben kezelhető legnagyobb független halmaz méretét vizsgáljuk (szokásos jelölése $\alpha(G)$).

Észrevétel

$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V(G)| = n.$$

Azaz, „ha $\alpha(G)$ kicsi, akkor $\chi(G)$ nagy”. Egyszerűbb nyelven: „ha csak kicsik lehetnek a színosztályok, akkor sok színre lesz szükség egy jó színezéshez”.

Az $\mathcal{A}_t$ esemény

Jelölje $\mathcal{A}_t$ azt az eseményt, hogy $\alpha(G) < t$. Ez ekvivalens azzal, hogy G -ben nincs t elemű független ponthalmaz.

Jelölje $\mathcal{F}_R$ pedig azt az eseményt, hogy R független ponthalmaz G -ben. Ekkor

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_R) = (1 - p)^{\binom{|R|}{2}}.$$

Érvényes továbbá az alábbi összefüggés:

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{R \subseteq V \\ |R|=t}} \mathcal{F}_R\right).$$

Valóban, korábbi megjegyzéseink alapján $\mathcal{A}_t$ az $\bigcup_{R \subseteq V, |R|=t} \mathcal{F}_R$ esemény komplementere.

Az $\mathcal{A}_t$ esemény valószínűségének becslése

Felhasználva azt a triviális tényt, hogy $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$ azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - \binom{n}{t} (1-p)^{\binom{t}{2}}.$$

Felhasználtuk azt is, hogy $\binom{n}{t}$ tag unióját kell nézni, illetve az unió által leírt esemény valószínűségét egy olyan összeggel becsülhetjük, amelyben minden $\mathbb{P}(\mathcal{F}_R)$ tag értéke közös: $(1-p)^{\binom{t}{2}}$.

A becslést egyszerűsíthetjük a $\binom{n}{t} < n^t$ durva és az $1-p < e^{-p}$ nem annyira durva becslésekkel (p pozitív és közel lesz 0-hoz)

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_t) \geq 1 - n^t e^{-p \binom{t}{2}} = 1 - e^{t \log n} e^{-p \frac{t(t-1)}{2}} = 1 - e^{t \log n - p \frac{t(t-1)}{2}}.$$

t választása

Feltesszük, hogy $n/2t \geq \tau$ és $\mathcal{A}_t$ valószínűségére adott alsó becslés legalább $2/3$,

Derékbőség helyett rövid körök száma

Jelöljük $\xi_{\leq \gamma}$ -val azt a valószínűségi változót, amely megadja a γ -nál nemhosszabb körök számát G -ben. Keressük ennek a várható értékét.

Ehhez vezessük be a

$$\xi_C = \begin{cases} 1, & \text{ha } C \subseteq G_{n,p} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}.$$

valószínűségi változót, ahol C egy lehetséges kör.

Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi_{\leq \gamma}) = \mathbb{E}\left(\sum_{C \text{ hossza} \leq \gamma} \xi_C\right) = \sum_{l=3}^{\gamma} \left(\sum_{C \text{ hossza}=l} \mathbb{E}(\xi_C)\right).$$

Rövid körök számnak várható értékének becslése

Ha a C hossza ℓ , akkor $\mathbb{E}(\xi_C) = p^\ell$. Hány darab lehetséges ℓ hosszú kör van? A válasz $\binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2}$, ugyanis a csúcsokat $\binom{n}{\ell}$ -féleképpen választhatjuk ki, és ezeket a kiválasztott ℓ pontokat $\frac{(\ell-1)!}{2}$ -féleképpen rendezhetjük körbe.

Felhasználva az

$$\binom{n}{\ell} \frac{(\ell-1)!}{2} = \frac{n(n-1)\dots(n-\ell+1)}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{2\ell} \leq \frac{n^\ell}{6}$$

egyenlőtlenséget, felírhatunk $\mathbb{E}(\xi_{\leq \gamma})$ -ra egy felső becslést:

$$\mathbb{E}(\xi_{\leq \gamma}) \leq \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{n^\ell}{6} p^\ell = \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{n^\ell p^\ell}{6} \stackrel{(!)}{\leq} \sum_{\ell=3}^{\gamma} \frac{(np)^\ell}{6} \leq \gamma \frac{(np)^\gamma}{6}.$$

További feltevések

A becslésnél feltettük, hogy $np \geq 1$, így használhattuk, hogy az 1-nél nagyobb kvóciensű geometriai sorozat monoton nő, minden eleme az utolsóval felülről becsülhető.

A paramétereinket úgy fogjuk megválasztani, **hogy**
 $\gamma(np)^\gamma/6 \leq n/6$ **teljesüljön.**

A végső következtetés

A fenti választások után a Markov-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} > \frac{n}{2}\right) < \mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} > 3\mathbb{E}\xi_{\leq \gamma}\right) < \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}\left(\xi_{\leq \gamma} \leq \frac{n}{2}\right) > \frac{2}{3}.$$

Ezek után felírhatjuk a

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{A}_t \wedge \left(\xi_{\leq \gamma} \leq \frac{n}{2}\right)\right) > 0$$

megállapítást, mivel a $\wedge$ két oldalán álló események valószínűsége külön-külön legalább $\frac{2}{3}$.

A keresett gráf létezik!

Ebből következik, hogy létezik olyan G gráf, amelynek n csúcsa van, és amelyre teljesül a következő két állítás:

- A G -ben lévő γ -nál nem hosszabb körök száma $\frac{n}{2}$ -nél kevesebb, azaz alkalmas $n/2$ csúcs elhagyásával egy olyan G_0 gráfot kapunk, amely derékbősége legalább γ .
- G_0 minden színosztálya legfeljebb t méretű. Így $\chi(G_0) \geq |V(G_0)|/t \geq \tau$.

Azaz G_0 a tételt igazolja.

A paraméter választások konzisztenciája

Csak az van hátra, hogy a p, t paramétereket úgy kell megválasztanunk, hogy az ezekre tett ígéreteink igazak legyenek:

$$0 < 1 - e^{t \log n - p \frac{t(t-1)}{2}} < \frac{1}{3}, \quad np > 1, \quad \gamma(np)^\gamma \leq n,$$

és emellett $n \geq 2t\tau$.

Egy lehetséges választás: p legyen olyan, hogy $\gamma(np)^\gamma = n$. Azaz a harmadik feltétel igazsága „definiálja” p -t.

Ekkor $np = (n/\gamma)^{1/\gamma}$, azaz a második feltétel automatikusan igaz (n -et nagyon nagynak választjuk).

$$p = \frac{1}{n} \cdot (n/\gamma)^{1/\gamma} = c(\gamma)n^{-(1-1/\gamma)},$$

ahol $c(\gamma)$ csak a γ -tól függő konstans.

Paraméterek választása (folytatás)

Az első feltételben szereplő kitevő

$$t \log n - c(\gamma) n^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} t(t-1)/2.$$

Ennek negatív, kis abszolút értékű számnak kell lenni.

Választás előtt oldjuk meg az

$$x \log n = c(\gamma) n^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} x(x-1)/2.$$

egyenletet.

A megoldás

$$x_0 = \frac{2}{c(\gamma)} (\log n) n^{1-\frac{1}{\gamma}} + 1.$$

Paraméterek választása (folytatás)

Legyen

$$t = \frac{2}{c(\gamma)} (\log n) n^{1-\frac{1}{\gamma}} + 1 + \epsilon,$$

ahol $\epsilon > 0$.

A

$$t \log n - c(\gamma) n^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} t(t-1)/2.$$

kitevőben t értéke az x_0 gyök növeltje lesz. Ez a kitevőt csökkenti, azaz negatívvá teszi. A kitevőfüggvény folytonossága miatt ϵ megválasztható úgy, hogy az exponenciális kifejezés legalább $2/3$ legyen.

$n \geq 2t\tau$ nyilván teljesül, HA n elég nagy.

Vége van!

Köszönöm a figyelmet!