

Halmazrendszerek 2-színezése

Hajnal Péter

Bolyai Intézet, TTIK, SZTE, Szeged

2024. ősz

Az alapkérdés

Az alapkérdés

Definíció (halmazrendszer)

Egy halmazrendszer egy V alaphalmaz és bizonyos részhalmazainak $\mathcal{H}$ halmazából/élekből áll.

Az alapkérdés

Definíció (halmazrendszer)

Egy halmazrendszer egy V alaphalmaz és bizonyos részhalmazainak $\mathcal{H}$ halmazából/élekből áll.

Definíció (jó színezés)

Egy halmazrendszer csúcshalmazának színezése jó színezés, ha nem lesz monokromatikus él, azaz minden él tartalmaz két különböző színű csúcsot.

Az alapkérdés

Definíció (halmazrendszer)

Egy halmazrendszer egy V alaphalmaz és bizonyos részhalmazainak $\mathcal{H}$ halmazából/élekből áll.

Definíció (jó színezés)

Egy halmazrendszer csúcshalmazának színezése jó színezés, ha nem lesz monokromatikus él, azaz minden él tartalmaz két különböző színű csúcsot.

$\chi(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer jó színezéséhez szükséges színek minimális száma.

Az alapkérdés

Definíció (halmazrendszer)

Egy halmazrendszer egy V alaphalmaz és bizonyos részhalmazainak $\mathcal{H}$ halmazából/élekből áll.

Definíció (jó színezés)

Egy halmazrendszer csúcshalmazának színezése jó színezés, ha nem lesz monokromatikus él, azaz minden él tartalmaz két különböző színű csúcsot.

$\chi(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer jó színezéséhez szükséges színek minimális száma.

A színezések kérdését éppen csak érintjük. A 2-színezhetőségre vonatkozó alaptételeket ismertetjük (ekkor piros-kék színekkel dolgozunk).

Történeti megjegyzések

Történeti megjegyzések

A 2-színezhetőség fogalmát végtelen halmazrendszerekre már Bernstein vizsgálta a XX. század elején.

Történeti megjegyzések

A 2-színezhetőség fogalmát végtelen halmazrendszerekre már Bernstein vizsgálta a XX. század elején.

Kombinatorikus vizsgálatukat Erdős Pál kezdte meg, aki Bernstein tiszteletére B -tulajdonságúaknak nevezte azon $\mathcal{H}$ halmazrendszereket, amelyekre $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Történeti megjegyzések

A 2-színezhetőség fogalmát végtelen halmazrendszerekre már Bernstein vizsgálta a XX. század elején.

Kombinatorikus vizsgálatukat Erdős Pál kezdte meg, aki Bernstein tiszteletére B -tulajdonságúaknak nevezte azon $\mathcal{H}$ halmazrendszereket, amelyekre $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Fontos speciális eset, amikor $(V, \mathcal{H})$ uniform.

Történeti megjegyzések

A 2-színezhetőség fogalmát végtelen halmazrendszerekre már Bernstein vizsgálta a XX. század elején.

Kombinatorikus vizsgálatukat Erdős Pál kezdte meg, aki Berstein tiszteletére B -tulajdonságúaknak nevezte azon $\mathcal{H}$ halmazrendszereket, amelyekre $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Fontos speciális eset, amikor $(V, \mathcal{H})$ uniform.

Definíció (uniform halmazrendszer)

$(V, \mathcal{H})$ halmazrendszer uniform, ha minden éle ugyanolyan méretű. Ha a közös k méretet hangsúlyozni akarjuk, akkor k -uniform esetről beszélünk.

Az alaptétel

Az alaptétel

A következő tétel a Ramsey-számok alsó becslése mellett az egyik bevezető példája a valószínűségszámítási módszernek.

Az alaptétel

A következő tétel a Ramsey-számok alsó becslése mellett az egyik bevezető példája a valószínűségszámítási módszernek.

Tétel (Erdős Pál 1963)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Az alaptétel

A következő tétel a Ramsey-számok alsó becslése mellett az egyik bevezető példája a valószínűségszámítási módszernek.

Tétel (Erdős Pál 1963)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Legyen c egy véletlen piros-kék színezése V -nek (az alaphalmaznak).

Az alaptétel

A következő tétel a Ramsey-számok alsó becslése mellett az egyik bevezető példája a valószínűségszámítási módszernek.

Tétel (Erdős Pál 1963)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Legyen c egy véletlen piros-kék színezése V -nek (az alaphalmaznak).

Erre tekinthetünk úgy, mint a $2^{|V|}$ elemű összes színezést tartalmazó halmazból uniform eloszlással választott elem.

Az alaptétel

A következő tétel a Ramsey-számok alsó becslése mellett az egyik bevezető példája a valószínűségszámítási módszernek.

Tétel (Erdős Pál 1963)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Legyen c egy véletlen piros-kék színezése V -nek (az alaphalmaznak).

Erre tekinthetünk úgy, mint a $2^{|V|}$ elemű összes színezést tartalmazó halmazból uniform eloszlással választott elem.

Vagy tekinthetünk úgy, hogy minden csúcs függetlenül $1/2$ - $1/2$ valószínűséggel piros, illetve kék színt kap. (Egy fair érmét dobunk fel, az érmedobás kimenetele dönti el a színezést.)

A bizonyítás

A bizonyítás

- Legyen P_E , K_E illetve M_E az az esemény, hogy az E él minden csúcsa piros, minden csúcsa kék illetve minden csúcsa ugyanazt a színt kapja (ez utóbbi esetben mondjuk azt, hogy E monokromatikus).

A bizonyítás

- Legyen P_E , K_E illetve M_E az az esemény, hogy az E él minden csúcsa piros, minden csúcsa kék illetve minden csúcsa ugyanazt a színt kapja (ez utóbbi esetben mondjuk azt, hogy E monokromatikus).
- Nyilván $\mathbb{P}[K_E] = \mathbb{P}[P_E] = 1/2^k$, és így

$$\mathbb{P}[M_E] = \mathbb{P}[P_E \dot{\cup} R_E] = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

A bizonyítás

- Legyen P_E , K_E illetve M_E az az esemény, hogy az E él minden csúcsa piros, minden csúcsa kék illetve minden csúcsa ugyanazt a színt kapja (ez utóbbi esetben mondjuk azt, hogy E monokromatikus).
- Nyilván $\mathbb{P}[K_E] = \mathbb{P}[P_E] = 1/2^k$, és így

$$\mathbb{P}[M_E] = \mathbb{P}[P_E \dot{\cup} R_E] = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

- Legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés. Azaz $R = \cup_{E \in \mathcal{H}} M_E$.

A bizonyítás

- Legyen P_E , K_E illetve M_E az az esemény, hogy az E él minden csúcsa piros, minden csúcsa kék illetve minden csúcsa ugyanazt a színt kapja (ez utóbbi esetben mondjuk azt, hogy E monokromatikus).
- Nyilván $\mathbb{P}[K_E] = \mathbb{P}[P_E] = 1/2^k$, és így

$$\mathbb{P}[M_E] = \mathbb{P}[P_E \dot{\cup} R_E] = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

- Legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés. Azaz $R = \cup_{E \in \mathcal{H}} M_E$.
- Ekkor

$$\mathbb{P}[R] = \mathbb{P}[\cup_{E \in \mathcal{H}} M_E] < \sum_{E \in \mathcal{H}} \mathbb{P}[M_E] = |\mathcal{H}| \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \leq 1.$$

A bizonyítás vége

A bizonyítás vége

- Az egyetlen szigorú egyenlőtlenség szorul csak magyarázatra. Ez viszont nyilvánvaló az alábbiakból: Az M_E események persze nem diszjunktak, a „minden piros szint kap” esemény egy pozitív valószínűségű esemény az összes M_E esemény metszetében.

A bizonyítás vége

- Az egyetlen szigorú egyenlőtlenség szorul csak magyarázatra. Ez viszont nyilvánvaló az alábbiakból: Az M_E események persze nem diszjunktak, a „minden piros szint kap” esemény egy pozitív valószínűségű esemény az összes M_E esemény metszetében.
- A nem jó színezés valószínűsége 1-nél kisebb. Így szükségszerű, hogy legyen $\mathcal{H}$ -nak jó színezése. (Tudjuk, hogy van ilyen, anélkül hogy láttunk volna egyet.)

Szünet



Javítások

Technikailag igen igényes módszerekkel (15 évvel az Erdős eredmény után) Beck József javította az eredményt:

Javítások

Technikailag igen igényes módszerekkel (15 évvel az Erdős eredmény után) Beck József javította az eredményt:

Tétel (Beck József 1978)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq k^{1/3-\epsilon} 2^{k-1}$ (ahol $\epsilon < 1/3$ alkalmas pozitív szám), akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Ha k -t növeljük, sőt tartatjuk ∞ -be, akkor ϵ tart 0-ba.

Javítások

Technikailag igen igényes módszerekkel (15 évvel az Erdős eredmény után) Beck József javította az eredményt:

Tétel (Beck József 1978)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq k^{1/3-\epsilon} 2^{k-1}$ (ahol $\epsilon < 1/3$ alkalmas pozitív szám), akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Ha k -t növeljük, sőt tartatjuk ∞ -be, akkor ϵ tart 0-ba.

Tétel (Radhakrishnan, Srinivasan 2000)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq \beta \sqrt{\frac{k}{\log k}} \cdot 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Javítások

Technikailag igen igényes módszerekkel (15 évvel az Erdős eredmény után) Beck József javította az eredményt:

Tétel (Beck József 1978)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq k^{1/3-\epsilon} 2^{k-1}$ (ahol $\epsilon < 1/3$ alkalmas pozitív szám), akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Ha k -t növeljük, sőt tartatjuk ∞ -be, akkor ϵ tart 0-ba.

Tétel (Radhakrishnan, Srinivasan 2000)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer ($k \geq 2$ egész). Ha $|\mathcal{H}| \leq \beta \sqrt{\frac{k}{\log k}} \cdot 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Mi egy későbbi, gyengébb becslés esetén (de Erdős tételénél jóval több él jelenléte mellett) bizonyítjuk a 2-színezhetőséget.

Pluhár tétele

Pluhár tétele

Tétel (Pluhár András tétele 2009)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer, α alkalmas pozitív szám.
Ha $|\mathcal{H}| \leq \alpha \sqrt[4]{k} \cdot 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Pluhár tétele

Tétel (Pluhár András tétele 2009)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer, α alkalmas pozitív szám.
Ha $|\mathcal{H}| \leq \alpha \sqrt[4]{k} \cdot 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Legyen π a V alaphalmaz egy véletlen sorrendje (a $|V|!$ darab összes sorbaállításának halmazán egy uniform eloszlású valószínűségszámítási változó).

Pluhár tétele

Tétel (Pluhár András tétele 2009)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer, α alkalmas pozitív szám.
Ha $|\mathcal{H}| \leq \alpha \sqrt[4]{k} \cdot 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Legyen π a V alaphalmaz egy véletlen sorrendje (a $|V|!$ darab összes sorbaállításának halmazán egy uniform eloszlású valószínűségi számítási változó).

Legyen c a következő színezés: Minden E él első csúcsa kapja a piros színt. Az ezekután még színezetlen csúcsok lesznek a kék színű pontok.

Pluhár tétele

Tétel (Pluhár András tétele 2009)

Legyen $\mathcal{H}$ egy k -uniform halmazrendszer, α alkalmas pozitív szám. Ha $|\mathcal{H}| \leq \alpha \sqrt[4]{k} \cdot 2^{k-1}$, akkor $\chi(\mathcal{H}) \leq 2$.

Legyen π a V alaphalmaz egy véletlen sorrendje (a $|V|!$ darab összes sorbaállításának halmazán egy uniform eloszlású valószínűségi számítási változó).

Legyen c a következő színezés: Minden E él első csúcsa kapja a piros színt. Az ezekután még színezetlen csúcsok lesznek a kék színű pontok.

Tehát c alapján egy véletlen színezés, de π választása után már determinisztikusan meghatározott.

Bizonyítás

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.
- Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják.

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.
- Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják.
- Természetesen ez csak a piros szín lehet. Ekkor az E él π szerinti utolsó z csúcsa is piros.

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.
- Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják.
- Természetesen ez csak a piros szín lehet. Ekkor az E él π szerinti utolsó z csúcsa is piros.
- Így lennie kell F élnek, ami π szerinti első csúcsa z . Tehát lennie kell olyan E és F élpárnak, hogy egyetlen közös csúcsuk legyen ($|E \cup F| = 2k - 1$) és π szerint $E - F$ minden csúcsa megelőzze $F - E$ minden csúcsát.

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.
- Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják.
- Természetesen ez csak a piros szín lehet. Ekkor az E él π szerinti utolsó z csúcsa is piros.
- Így lennie kell F élnek, ami π szerinti első csúcsa z . Tehát lennie kell olyan E és F élpárnak, hogy egyetlen közös csúcsuk legyen ($|E \cup F| = 2k - 1$) és π szerint $E - F$ minden csúcsa megelőzze $F - E$ minden csúcsát. Legyen $S_{E,F}$ ez az esemény.

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.
- Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják.
- Természetesen ez csak a piros szín lehet. Ekkor az E él π szerinti utolsó z csúcsa is piros.
- Így lennie kell F élnek, ami π szerinti első csúcsa z . Tehát lennie kell olyan E és F élpárnak, hogy egyetlen közös csúcsuk legyen ($|E \cup F| = 2k - 1$) és π szerint $E - F$ minden csúcsa megelőzze $F - E$ minden csúcsát. Legyen $S_{E,F}$ ez az esemény.
- A fentiek összefoglalása, hogy $R \subset \cup_{E,F \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}} S_{E,F}$.

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.
- Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják.
- Természetesen ez csak a piros szín lehet. Ekkor az E él π szerinti utolsó z csúcsa is piros.
- Így lennie kell F élnek, ami π szerinti első csúcsa z . Tehát lennie kell olyan E és F élpárnak, hogy egyetlen közös csúcsuk legyen ($|E \cup F| = 2k - 1$) és π szerint $E - F$ minden csúcsa megelőzze $F - E$ minden csúcsát. Legyen $S_{E,F}$ ez az esemény.
- A fentiek összefoglalása, hogy $R \subset \cup_{E,F \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}} S_{E,F}$.
- A hátralévő részben az $S_{E,F}$ esemény valószínűségét becsüljük.

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.
- Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják.
- Természetesen ez csak a piros szín lehet. Ekkor az E él π szerinti utolsó z csúcsa is piros.
- Így lennie kell F élnek, ami π szerinti első csúcsa z . Tehát lennie kell olyan E és F élpárnak, hogy egyetlen közös csúcsuk legyen ($|E \cup F| = 2k - 1$) és π szerint $E - F$ minden csúcsa megelőzze $F - E$ minden csúcsát. Legyen $S_{E,F}$ ez az esemény.
- A fentiek összefoglalása, hogy $R \subset \cup_{E,F \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}} S_{E,F}$.
- A hátralévő részben az $S_{E,F}$ esemény valószínűségét becsüljük.
- Ha $|E \cap F| \neq 1$, akkor 0 valószínűségű eseményről van szó.

Bizonyítás

- Ismét legyen R az az esemény, hogy c nem jó színezés.
- Ekkor van egy olyan E él, aminek elemei ugyanazt a színt kapják.
- Természetesen ez csak a piros szín lehet. Ekkor az E él π szerinti utolsó z csúcsa is piros.
- Így lennie kell F élnek, ami π szerinti első csúcsa z . Tehát lennie kell olyan E és F élpárnak, hogy egyetlen közös csúcsuk legyen ($|E \cup F| = 2k - 1$) és π szerint $E - F$ minden csúcsa megelőzze $F - E$ minden csúcsát. Legyen $S_{E,F}$ ez az esemény.
- A fentiek összefoglalása, hogy $R \subset \cup_{E,F \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}} S_{E,F}$.
- A hátralévő részben az $S_{E,F}$ esemény valószínűségét becsüljük.
- Ha $|E \cap F| \neq 1$, akkor 0 valószínűségű eseményről van szó.
- Ha $E \cap F = \{x\}$, akkor vegyük észre, hogy a π véletlen sorrendből kiemelve $E \cup F$ elemeit, ezek $(2k - 1)!$ -féle sorbaállítása egyformán valószínű.

Bizonyítás (folytatás)

Bizonyítás (folytatás)

- Ezek után $S_{E,F}$ azt jelenti, hogy az $E \cup F$ -beli elemek sorrendjében az első $k - 1$ darab elem $E - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva, az utolsó $k - 1$ darab elem $F - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva.

Bizonyítás (folytatás)

- Ezek után $S_{E,F}$ azt jelenti, hogy az $E \cup F$ -beli elemek sorrendjében az első $k - 1$ darab elem $E - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva, az utolsó $k - 1$ darab elem $F - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva.
- Így

$$\mathbb{P}[S_{E,F}] = \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

Bizonyítás (folytatás)

- Ezek után $S_{E,F}$ azt jelenti, hogy az $E \cup F$ -beli elemek sorrendjében az első $k - 1$ darab elem $E - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva, az utolsó $k - 1$ darab elem $F - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva.

- Így

$$\mathbb{P}[S_{E,F}] = \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

- Összefoglalva

$$\mathbb{P}[R] \leq \mathbb{P}[\cup_{E,F \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}} S_{E,F}] \leq |\mathcal{H}|^2 \cdot \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

Bizonyítás (folytatás)

- Ezek után $S_{E,F}$ azt jelenti, hogy az $E \cup F$ -beli elemek sorrendjében az első $k - 1$ darab elem $E - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva, az utolsó $k - 1$ darab elem $F - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva.

- Így

$$\mathbb{P}[S_{E,F}] = \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

- Összefoglalva

$$\mathbb{P}[R] \leq \mathbb{P}[\cup_{E,F \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}} S_{E,F}] \leq |\mathcal{H}|^2 \cdot \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

- Az állítás abból adódik, hogy feltételünk mellett R valószínűsége 1-nél kisebbnek adódik.

Bizonyítás (folytatás)

- Ezek után $S_{E,F}$ azt jelenti, hogy az $E \cup F$ -beli elemek sorrendjében az első $k - 1$ darab elem $E - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva, az utolsó $k - 1$ darab elem $F - \{x\}$ elemei valahogy sorbaállítva.

- Így

$$\mathbb{P}[S_{E,F}] = \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

- Összefoglalva

$$\mathbb{P}[R] \leq \mathbb{P}[\cup_{E,F \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}} S_{E,F}] \leq |\mathcal{H}|^2 \cdot \frac{(k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!}.$$

- Az állítás abból adódik, hogy feltételünk mellett R valószínűsége 1-nél kisebbnek adódik.
- Ez a Stirling-formula alkalmazásával könnyen ellenőrizhető.

Szünet



Az alapkérdés

Az alapkérdés

- Láttuk, hogy a kiinduló tétel élesíthető. A következőkben az élesítések határát szeretnénk kitapogatni.

Az alapkérdés

- Láttuk, hogy a kiinduló tétel élesíthető. A következőkben az élesítések határát szeretnénk kitapogatni.
- Milyen kevés k -elemű élből rakhatunk össze egy halmazrendszert úgy, hogy ne legyen 2-színezhető?

Az alapkérdés

- Láttuk, hogy a kiinduló tétel élesíthető. A következőkben az élesítések határát szeretnénk kitapogatni.
- Milyen kevés k -elemű élből rakhatunk össze egy halmazrendszert úgy, hogy ne legyen 2-színezhető?
- Egy jó konstrukció, ha egy legalább $2k - 1$ elemű V halmaz összes k -asát vesszük. Tetszőleges piros-kék színezés esetén a nagyobb színosztály legalább k csúcsot tartalmaz, amelyben minde k -as él is egyben.

Az alapkérdés

- Láttuk, hogy a kiinduló tétel élesíthető. A következőkben az élesítések határát szeretnénk kitapogatni.
- Milyen kevés k -elemű élből rakhatunk össze egy halmazrendszert úgy, hogy ne legyen 2-színezhető?
- Egy jó konstrukció, ha egy legalább $2k - 1$ elemű V halmaz összes k -asát vesszük. Tetszőleges piros-kék színezés esetén a nagyobb színosztály legalább k csúcsot tartalmaz, amelyben minde k -as él is egyben.
- Az élszám nagyságrendje "nagy" [$\approx 4^k$ (ha $|V| = 2k - 1$)].

A javítás ötlete

A javítás ötlete

- Ennél jobb konstrukció is adható, ha egy kicsit nagyobb V esetén a fenti példát ügyesen „kiritkítjuk”.

A javítás ötlete

- Ennél jobb konstrukció is adható, ha egy kicsit nagyobb V esetén a fenti példát ügyesen „kiritkítjuk”.
- Legyen $\mathcal{H}_0 = \binom{V}{k}$.

Definíció ($\mathcal{S}$ segéd-halmazrendszer)

$\mathcal{H}_0$ ÉLEI alkotják az alaphalmazát. V minden piros-kék színezéséhez tartozik egy él: a monokromatikusán színezett $\mathcal{H}_0$ -beli halmazok.

A javítás ötlete

- Ennél jobb konstrukció is adható, ha egy kicsit nagyobb V esetén a fenti példát ügyesen „kiritkítjuk”.
- Legyen $\mathcal{H}_0 = \binom{V}{k}$.

Definíció ($\mathcal{S}$ segéd-halmazrendszer)

$\mathcal{H}_0$ ÉLEI alkotják az alaphalmazát. V minden piros-kék színezéséhez tartozik egy él: a monokromatikusan színezett $\mathcal{H}_0$ -beli halmazok.

- $\mathcal{S}$ -et azért definiáltuk, hogy lássuk ha $\mathcal{H}_0$ éleit elkezdjük eldobálni/ritkítani, akkor meddig mehetünk el, hogy a nem-2-színezhetősége megmaradjon.

Halmazrendszerek lefogó ponthalmazai

Halmazrendszerek lefogó ponthalmazai

Definíció (halmazrendszerek lefogó ppnthalmaza)

$L \subset V$ a $(V, \mathcal{H})$ halmazrendszer egy lefogó ponthalmaza, ha minden $H \in \mathcal{H}$ élre $H \cap L \neq \emptyset$.

Halmazrendszerek lefogó ponthalmazai

Definíció (halmazrendszerek lefogó ppnthalmaza)

$L \subset V$ a $(V, \mathcal{H})$ halmazrendszer egy lefogó ponthalmaza, ha minden $H \in \mathcal{H}$ élre $H \cap L \neq \emptyset$.

- Nyilván egy lefogó halmaznak mindig meg kell maradni: V bármelyik 2-színezésénél legyen olyan k -as, ami egyszínű.

Halmazrendszerek lefogó ponthalmazai

Definíció (halmazrendszerek lefogó ppnthalmaza)

$L \subset V$ a $(V, \mathcal{H})$ halmazrendszer egy lefogó ponthalmaza, ha minden $H \in \mathcal{H}$ élre $H \cap L \neq \emptyset$.

- Nyilván egy lefogó halmaznak mindig meg kell maradni: V bármelyik 2-színezésénél legyen olyan k -as, ami egyszínű. Más feltétel nincs is.

Halmazrendszerek lefogó ponthalmazai

Definíció (halmazrendszerek lefogó ppnthalmaza)

$L \subset V$ a $(V, \mathcal{H})$ halmazrendszer egy lefogó ponthalmaza, ha minden $H \in \mathcal{H}$ élre $H \cap L \neq \emptyset$.

- Nyilván egy lefogó halmaznak mindig meg kell maradni: V bármelyik 2-színezésénél legyen olyan k -as, ami egyszínű. Más feltétel nincs is.

Jelölés

Legyen $\tau(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer legkisebb lefogó ponthalmazának mérete.

Halmazrendszerek lefogó ponthalmazai

Definíció (halmazrendszerek lefogó ppnthalmaza)

$L \subset V$ a $(V, \mathcal{H})$ halmazrendszer egy lefogó ponthalmaza, ha minden $H \in \mathcal{H}$ élre $H \cap L \neq \emptyset$.

- Nyilván egy lefogó halmaznak mindig meg kell maradni: V bármelyik 2-színezésénél legyen olyan k -as, ami egyszínű. Más feltétel nincs is.

Jelölés

Legyen $\tau(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer legkisebb lefogó ponthalmazának mérete.

- Milyen kicsi lehet $\mathcal{S}$ egy lefogó halmaza? „ $\tau(\mathcal{S}) = ?$ ”, pontosabban „ $\tau(\mathcal{S}) \leq ?$ ”.

Tört lefogások

Tört lefogások

Definíció

Legyen $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyozása az alaphalmaznak. Ezt tört lefogásnak nevezzük, ha minden él elemeire a függvényértékek összege legalább 1.

Tört lefogások

Definíció

Legyen $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyozása az alaphalmaznak. Ezt tört lefogásnak nevezzük, ha minden él elemeire a függvényértékek összege legalább 1.

Egy tört lefogás mérete $\sum_{v \in V} \lambda(v)$.

Tört lefogások

Definíció

Legyen $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyozása az alaphalmaznak. Ezt tört lefogásnak nevezzük, ha minden él elemeire a függvényértékek összege legalább 1.

Egy tört lefogás mérete $\sum_{v \in V} \lambda(v)$.

Jelölés

Legyen $\tau^*(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer legkisebb tört lefogó pontthalmazának mérete.

Tört lefogások

Definíció

Legyen $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ súlyozása az alaphalmaznak. Ezt tört lefogásnak nevezzük, ha minden él elemeire a függvényértékek összege legalább 1.

Egy tört lefogás mérete $\sum_{v \in V} \lambda(v)$.

Jelölés

Legyen $\tau^*(\mathcal{H})$ a $\mathcal{H}$ halmazrendszer legkisebb tört lefogó pontthalmazának mérete.

Igazából $\tau^*(\mathcal{S})$ felső becslése lesz egyszerű.

τ^* becslése

τ^* becslése

- A szokásos uniform súlyozással veszünk egy tört-lefogást. Ennek mérete felülről becsli a $\tau^*(S)$ paramétert. A közös súly persze $1/s(S)$, ahol s a legkisebb élméret-paraméter.

τ^* becslése

- A szokásos uniform súlyozással veszünk egy tört-lefogást. Ennek mérete felülről becsli a $\tau^*(S)$ paramétert. A közös súly persze $1/s(S)$, ahol s a legkisebb élméret-paraméter.
- Könnyű igazolni, hogy a legkisebb él (V piros-kék színezésének) mérete (általa monokromatikusan színezett k -asok száma) akkor lesz a legkisebb, amikor annyira egyenletes a színelosztás, amennyire lehetséges (a piros és kék csúcsok száma is $\lfloor |V|/2 \rfloor$ és $\lceil |V|/2 \rceil$ közül kerül ki).

τ^* becslése

- A szokásos uniform súlyozással veszünk egy tört-lefogást. Ennek mérete felülről becsli a $\tau^*(\mathcal{S})$ paramétert. A közös súly persze $1/s(\mathcal{S})$, ahol s a legkisebb élméret-paraméter.
- Könnyű igazolni, hogy a legkisebb él (V piros-kék színezésének) mérete (általa monokromatikusan színezett k -asok száma) akkor lesz a legkisebb, amikor annyira egyenletes a színelosztás, amennyire lehetséges (a piros és kék csúcsok száma is $\lfloor |V|/2 \rfloor$ és $\lceil |V|/2 \rceil$ közül kerül ki). Azaz $s(\mathcal{S}) \geq 2^{\binom{|V|/2}{k}}$.

τ^* becslése

- A szokásos uniform súlyozással veszünk egy tört-lefogást. Ennek mérete felülről becsli a $\tau^*(\mathcal{S})$ paramétert. A közös súly persze $1/s(\mathcal{S})$, ahol s a legkisebb élméret-paraméter.
- Könnyű igazolni, hogy a legkisebb él (V piros-kék színezésének) mérete (általa monokromatikusan színezett k -asok száma) akkor lesz a legkisebb, amikor annyira egyenletes a színelosztás, amennyire lehetséges (a piros és kék csúcsok száma is $\lfloor |V|/2 \rfloor$ és $\lceil |V|/2 \rceil$ közül kerül ki). Azaz $s(\mathcal{S}) \geq 2 \binom{|V|/2}{k}$.

•

$$\tau^*(\mathcal{S}) \leq \binom{|V|}{k} \cdot \frac{1}{2 \binom{|V|/2}{k}}.$$

Hol tartunk?

Hol tartunk?

- Úgy tűnik a szerzett információk nem illenek össze: $\tau(\mathcal{S})$ -t szeretnénk kicsinek tudni, de $\tau^*(\mathcal{S})$ -ről ($\leq \tau(\mathcal{S})$) derült ez ki.

Hol tartunk?

- Úgy tűnik a szerzett információk nem illenek össze: $\tau(\mathcal{S})$ -t szeretnénk kicsinek tudni, de $\tau^*(\mathcal{S})$ -ről ($\leq \tau(\mathcal{S})$) derült ez ki.
- Egy fontos tételt kell „elővenni”, hogy eddigi bizonyításrészeink összeálljanak.

Hol tartunk?

- Úgy tűnik a szerzett információk nem illenek össze: $\tau(\mathcal{S})$ -t szeretnénk kicsinek tudni, de $\tau^*(\mathcal{S})$ -ről ($\leq \tau(\mathcal{S})$) derült ez ki.
- Egy fontos tételt kell „elővenni”, hogy eddigi bizonyításrészeink összeálljanak.

Tétel

$$\frac{\tau_{\text{mohó}}}{\tau^*(\mathcal{H})} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{\Delta(\mathcal{H})} \leq 1 + \ln \Delta(\mathcal{H}).$$

Hol tartunk?

- Úgy tűnik a szerzett információk nem illenek össze: $\tau(\mathcal{S})$ -t szeretnénk kicsinek tudni, de $\tau^*(\mathcal{S})$ -ről ($\leq \tau(\mathcal{S})$) derült ez ki.
- Egy fontos tételt kell „elővenni”, hogy eddigi bizonyításrészeink összeálljanak.

Tétel

$$\frac{\tau_{\text{mohó}}}{\tau^*(\mathcal{H})} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{\Delta(\mathcal{H})} \leq 1 + \ln \Delta(\mathcal{H}).$$

Követlezmény

$$\frac{\tau(\mathcal{H})}{\tau^*(\mathcal{H})} \leq \frac{\tau_{\text{mohó}}}{\tau^*(\mathcal{H})} \leq 1 + \ln \Delta(\mathcal{H}),$$

azaz

$$\tau(\mathcal{H}) \leq (1 + \ln \Delta(\mathcal{H})) \cdot \tau^*(\mathcal{H}).$$

Összegzés

Összegzés

- Az általános tételt $\mathcal{S}$ -re alkalmazva speciálisan kapjuk, hogy

$$\tau(\mathcal{S}) \leq (1 + \ln \Delta(\mathcal{S}))\tau^*(\mathcal{S}).$$

Összegzés

- Az általános tételt $\mathcal{S}$ -re alkalmazva speciálisan kapjuk, hogy

$$\tau(\mathcal{S}) \leq (1 + \ln \Delta(\mathcal{S}))\tau^*(\mathcal{S}).$$

- $\Delta(\mathcal{S})$ kiszámolása egyszerű feladat.

Összegzés

- Az általános tételt $\mathcal{S}$ -re alkalmazva speciálisan kapjuk, hogy

$$\tau(\mathcal{S}) \leq (1 + \ln \Delta(\mathcal{S}))\tau^*(\mathcal{S}).$$

- $\Delta(\mathcal{S})$ kiszámolása egyszerű feladat. Egy E csúcson azon élek haladnak, amik E -t egyszínűvé tevő színezésekhez tartoznak. Az ilyenek felsorolásához az E -n kívüli $|V| - k$ darab csúcs esetén kell eldöntenünk, hogy színük E közös színével megegyező vagy tőle különböző legyen. Speciálisan $\mathcal{S}$ reguláris és $\Delta(\mathcal{S}) = 2 \cdot 2^{|V|-k}$.

Összegzés

- Az általános tételt $\mathcal{S}$ -re alkalmazva speciálisan kapjuk, hogy

$$\tau(\mathcal{S}) \leq (1 + \ln \Delta(\mathcal{S}))\tau^*(\mathcal{S}).$$

- $\Delta(\mathcal{S})$ kiszámolása egyszerű feladat. Egy E csúcson azon élek haladnak, amik E -t egyszínűvé tevő színezésekhez tartoznak. Az ilyenek felsorolásához az E -n kívüli $|V| - k$ darab csúcs esetén kell eldöntenünk, hogy színük E közös színével megegyező vagy tőle különböző legyen. Speciálisan $\mathcal{S}$ reguláris és $\Delta(\mathcal{S}) = 2 \cdot 2^{|V|-k}$.
- Összegezve

$$\tau(\mathcal{S}) \leq \left(1 + \ln(2 \cdot 2^{|V|-k})\right) \cdot \binom{|V|}{k} \cdot \frac{1}{2^{\binom{|V|}{k}/2}}.$$

A tétel

A tétel

- A $|V| = k^2$ választással élve kapjuk, hogy $\tau(\mathcal{S}) \leq 10k^2 \cdot 2^{k-1}$ (a számolást mellőzzük).

A tétel

- A $|V| = k^2$ választással élve kapjuk, hogy $\tau(\mathcal{S}) \leq 10k^2 \cdot 2^{k-1}$ (a számolást mellőzzük).
- A következő tétel összefoglalja eredményeinket.

A tétel

- A $|V| = k^2$ választással élve kapjuk, hogy $\tau(\mathcal{S}) \leq 10k^2 \cdot 2^{k-1}$ (a számolást mellőzzük).
- A következő tétel összefoglalja eredményeinket.

Tétel

Van olyan $10k^2 \cdot 2^{k-1}$ -nél nem több élű k -uniform halmazrendszer, ami nem 2-színezhető.

Itt a vége, fuss el véle!

Köszönöm a figyelmet!