Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Algebra és Számelmélet Tanszék

Matematikus mesterszak

Diplomamunka

Irányított gráfok transzformációgráfjai: összefüggőség, komponensek, retrakciók

Gyenizse Gergő

Témavezető: Dr. Maróti Miklós, egyetemi docens

2013.

1. fejezet

Bevezető

Az univerzális algebrában kulcsfogalom a homomorf kép fogalma. Két, azonos típusú algebra vagy relációs struktúra kapcsolatának vizsgálatakor az első kérdés az, hogy izomorfak-e. Amennyiben nem, szintén fontos, hogy van-e mindkettőből a másikban menő homomorfizmus. Ha speciálisan véges irányított gráfokról van szó, akkor az, hogy van-e $G \to H$ homomorfizmus, azzal ekvivalens, hogy a H^G irányított gráfban van-e hurokél. Ez vezet (többek közt) az irányított gráfok hatványainak vizsgálatához.

[1] a hatványgráfokat használja annak belátásához, hogy reflexív irányított gráfokon bizonyos Malcev-feltételek ekvivalensek. Ennek során többször előkerül az egy komponensben levés és a retrakció fogalma. Mi ezeket önmagukért vizsgáljuk (bár a 4.8 tételben előkerül egy erős Malcev-feltétel).

A speciális $G = H$ esettel fogunk foglalkozni: ekkor a G^G hatványgráfot a G transzformációgráfjának nevezzük. Ez annyiban könnyebben kezelhető, hogy csúcsain természetes módon definiálható szorzás, ami a csúcshalmazon félcsoportot hoz létre, és a kapott félcsoportstuktúra szoros kapcsolatban van az élstruktúrával.

A G^G gráf vizsgálatakor érdekesek lesznek bizonyos részfélcsoportjai, ezeket (a $Pol(G)$ kivételével) a 2. fejezetben fogjuk definiálni. [1] csak a homomorfizmusok által feszített részgráfot (amit mi $Hom(G)$-vel jelölünk) használja, ami általában nehezen kezelhető. A 3. fejezetben G^G, a 4.-ben $Pol(G)$ vagy $Sm(G)$ használata lesz kényelmesebb.

A 3. fejezet az identitás komponensét vizsgálja ezekben a részfélcsoportokban. Ez teljes gráf lesz a G automorfizmusai által feszített részgráf esetében, amiből megállapítjuk, hogy ez a részgráf milyen szerkezetű lehet. Két másik részfélcsoport esetében nem kapunk ilyen szép szerkezeteket, bár az automorfizmusokról megállapítottak egy része ezekre is átvihető.

A legtöbb irányított gráfra az identitás izolált a transzformációgráfban. A 3. fejezet további része az ezzel ellentétes esetről szól, amikor az identitás komponense gazdag. Ekkor megállapítjuk, hogy a gráfban (igazából az identitás komponensében) van nemtriviális automorfizmus vagy retrakció.

A 4. fejezet a transzformációgráf, illetve a vizsgált részfélcsoportok összefüggőségéről szó. A transzformációgráf esetében szükséges és elégséges feltételt adunk az összefüggőségre abban az esetben, ha a (kiindulási) gráf legalább hatcsúcsú (a módszer alighanem a legfeljebb ötcsúcsú esetre is átvihető, de igen sok számítást igényel). Megmutatjuk továbbá, hogy bizonyos feltételek teljesülése mellett bizonyos részfélcsoportok összefüggősége garantálja egy másikét is. Végül felhasználjuk a 3. fejezetbeli eredményeket retrakciók létezéséről arra, hogy egyes részfélcsoportok összefüggőségének eldöntését redukáljuk az adott részfélcsoport összefüggőségének eldöntésére egy kisebb elemszámú gráf (a retrakt) esetén.

2. fejezet

Transzformációgráfok és fontos részfélcsoportjaik

2.1. Definíció. *[]* Irányított gráfnak *nevezünk egy* $G = (V(G), E(G))$ *párt, ahol* $V(G)$ *egy nemüres halmaz egy rajta megadott* $E(G) \subseteq V(G)^2$ *kétváltozós relációval. Ha* $a, b \in V(G)$ *esetén* $(a, b) \in E(G)$*, akkor azt mondjuk, hogy* (a, b) él *(*$a \to b$*),* (b, a) visszaél. $V(G)$ *elemeit* csúcsoknak *vagy* pontoknak *nevezzük, és ha nem okoz félreértést, akkor* G *elemeiként a csúcsokra hivatkozunk (*$|G|$*-vel tehát a gráf csúcsszámát jelöljük). Az* $a \to a$ *alakú éleket (*a*-ban lévő)* hurokélnek *nevezzük. Egy* G *irányított gráf* teljes*, ha* $E(G) = V(G) \times V(G)$*, és* üres*, ha* $E(G) = \emptyset$.

Kizárólag véges irányított gráfokkal fogunk foglalkozni, ezt a kitételt a továbbiakban külön nem jelezzük.

2.2. Definíció. *[] Legyen* G *irányított gráf,* a *egy csúcsa.* a be-halmazának *nevezzük a* $Be(a) := \{x \in G : (x, a) \in E(G)\}$, ki-halmazának *a* $Ki(a) := \{x \in G : (a, x) \in E(G)\}$ *halmazokat,* be- *illetve* ki-fokának *ezek elemszámait.*

2.3. Definíció. *[] Egy irányított gráfban* $a, b \in G$*-re* a*-ból* b*-be menő (*k *hosszú)* sétának *nevezünk nem feltétlen különböző csúcsok egy* $a = c_0, c_1, \ldots, c_k = b$ *sorozatát, ha minden* $0 \leq i \leq k-1$*-re* (c_i, c_{i+1}) *él vagy visszaél. A séta részének tekintjük az éleket/visszaéleket is, tehát ha például* $(a, b), (b, a) \in E(G)$*, akkor két* a*-ból* b*-be menő* 1 *hosszú séta van: az egyik az* (a, b) *élen, a másik a* (b, a)*-ból adódó* (a, b) *visszaélen keresztül.*

$a = b$ *esetén a sétát* körsétának *nevezzük.* Irányított *egy séta, ha csak éleket tartalmaz. Ha a* c_i *csúcsok közül legfeljebb* a *és* b *egyezik meg, akkor a séta* út*, amennyiben pedig tényleg meg is egyezik, és nem* 0 *hosszú,* kör*. Két csúcs azonos komponensben van, ha van köztük út (ami ekvivalens azzal, hogy van köztük séta), az azonos komponensben levőség ekvivalenciareláció, ennek ekvivalenciaosztályai a gráf* komponensei*. Két séta* azonos típusú*, ha ugyanolyan hosszúak, és élek, illetve visszaélek ugyanolyan sorozatát tartalmazzák, tehát például két azonos hosszú irányított séta azonos típusú.*

2.4. Definíció. *[] Egy G irányított gráf $R \subseteq V(G)$ részhalmazához tartozó* feszített részgráfja *az az irányított gráf, melynek csúcsai R elemei, élhalmaza pedig $E(G)$ megszorítva R^2-re. G (R-hez tartozó)* részgráfjai *az ebből élek esetleges elhagyásával kapott gráfok.*

Az irányított gráfok összeszorozhatóak és hatványozhatóak:

2.5. Definíció. *[] Az $A_1, A_2, \ldots, A_k$ irányított gráfok* direkt szorzata *az az $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$-nel jelölt szorzat, amelynek csúcshalmaza az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-esek halmaza, ahol minden $1 \leq i \leq n$ esetén $a_i \in A_i$, az élek pedig a következőképp vannak definiálva: $((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \in E(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)$ akkor és csak akkor, ha minden $1 \leq i \leq n$-re $(a_i, b_i) \in E(A_i)$. Egy A irányított gráf n-edik* direkt hatványának *nevezzük (és A^n-nel jelöljük) az n tényezős $A \times \cdots \times A$ szorzatot.*

2.6. Definíció. *[] G és H irányított gráfok esetén G^H-nak nevezzük azt az irányított gráfot, melynek csúcsai a H-ból G-be menő leképezések, az élek pedig a következő szerint adottak: ha f_1 és f_2 két $H \to G$ leképezés, akkor G^H-ban $f_1 \to f_2$ akkor és csak akkor, ha minden H-beli $a \to b$ élre $f_1(a) \to f_2(b)$ teljesül G-ben.*

Megjegyezzük, hogy $|G \times H| = |G||H|$ és $|G^H| = |G|^{|H|}$.

Gyakran fogjuk használni a G^H-beli $f_0 \to f_1$ reláció ezen átfogalmazásait (amik azonnal adódnak a definícióból):

2.7. Állítás. *[] Tetszőleges $f_0, f_1 \in G^H$ esetén a következők ekvivalensek:*

1. *$f_0 \to f_1$*
2. *minden $x \in H$-ra $f_0(Be(x)) \subseteq Be(f_1(x))$*
3. *minden $x \in H$-ra $f_1(Ki(x)) \subseteq Ki(f_0(x))$*

A H-ból G-be menő leképezések közt különösen fontosak a homomorfizmusok és az izomorfizmusok:

2.8. Definíció. *[] Egy $\varphi : H \to G$ leképezés* homomorfizmus, *ha H minden $a \to b$ élére $(\varphi(a), \varphi(b))$ egy G-beli él (vagyis $\varphi \to \varphi$ teljesül G^H-ban). Egy homomorfizmust* izomorfizmusnak *nevezünk, ha bijektív és az inverze is homomorfizmus. Egy irányított gráfot önmagába képező homomorfizmust a gráf* endomorfizmusának, *egy önmagába képező izomorfizmust a gráf* automorfizmusának *nevezünk.*

A homomorfizmusok szorzásra nézve zártak az alábbi értelemben:

2.9. Állítás. *[] Ha $\varphi_1 : G_3 \mapsto G_2$ és $\varphi_2 : G_2 \mapsto G_1$ homomorfizmusok, akkor $\varphi_1\varphi_2 \in G_1^{G_3}$ is az.*

Bizonyítás. Tetszőleges $(a, b) \in E(G_3)$ élre $(\varphi_2(a), \varphi_2(b)) \in E(G_2)$, mert φ_2 homomorfizmus, és így $(\varphi_1\varphi_2(a), \varphi_1\varphi_2(b)) \in E(G_1)$, mert φ_1 is homomorfizmus. $\square$

Ebből az állításból következik, hogy két irányított gráf izomorfiája (vagyis, hogy létezik egyikből a másikba menő izomorfizmus) ekvivalencia reláció. (Az identikus leképezés mutatja a reflexivitást, a szimmetrikusság a definícióból következik.)

A (két tényezős) szorzásnak és a hatványozásnak van (jobb)egységeleme: jelöljük O-val azt az egycsúcsú gráfot, amelynek a csúcsán van hurokél: ekkor minden A irányított gráfra $O \times A$, $A \times O$, A^O és A izomorfak. A^O és A izomorfiája következménye a következő izomorfiának:

2.10. Állítás. *[] Tetszőleges A, B, C irányított gráfokra $A^{B\times C} \cong (A^B)^C$.*

Bizonyítás. Legyen $\phi : A^{B\times C} \to (A^B)^C$ úgy, hogy minden $f \in A^{B\times C}$ és $c \in C$ esetén $(\phi(f))(c) \in A^B$ az a leképezés, amelyre tetszőleges $b \in B$-re $((\phi(f))(c))(b) = f(b, c)$.
ϕ injektív, mert ha $f_1, f_2 \in A^{B\times C}$ különböző leképezések, akkor eltérnek valahol: $f_1(b_0, c_0) \neq f_2(b_0, c_0)$ egy $(b_0, c_0) \in B\times C$-re, így $((\phi(f_1))(c_0))(b_0) \neq ((\phi(f_2))(c_0))(b_0)$, tehát $\phi(f_1)(c_0) \neq \phi(f_2)(c_0)$ és $\phi(f_1) \neq \phi(f_2)$.
ϕ emiatt szürjektív is, mert $|A^{B\times C}| = |A|^{|B\times C|} = |A|^{|B||C|} = (|A|^{|B|})^{|C|} = (|A^B|)^{|C|} = |(A^B)^C|$.
Végül, ϕ és inverze homomorfizmusok: minden $f_1, f_2 \in A^{B\times C}$-re:

$$(f_1, f_2) \in E(A^{B\times C}) \Leftrightarrow \forall((b_1, c_1), (b_2, c_2)) \in E(B \times C) : (f_1(b_1, c_1), f_2(b_2, c_2)) \in E(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall(c_1, c_2) \in E(C) : \forall(b_1, b_2) \in E(B) :: (((\phi(f_1))(c_1))(b_1), ((\phi(f_2))(c_2))(b_2)) \in E(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall(c_1, c_2) \in E(C) : ((\phi(f_1))(c_1), (\phi(f_2))(c_2)) \in E(A^B) \Leftrightarrow (\phi(f_1), \phi(f_2)) \in E((A^B)^C).$$

$\square$

Ez az állítás mutatja, hogy a hatványgráfok általában közel sem egyértelműen állnak elő hatványként, vagyis a G^H gráf kevesebb információt ad, mint a (G, H) pár. Tartalmazza viszont azt a fontos információt, hogy van-e H-ból G-be menő homomorfizmus: ezek ugyanis pont azok a leképezések, melyeknél G^H-ban hurokél van. (Az az információ ellenben, hogy G és H izomorfak-e, általában nincs benne G^H-ban: tetszőleges G nem egycsúcsú gráfra $G^G \cong (G^G)^O$, de $G \cong G$ és $G^G \ncong O$.)

2.11. Definíció. *[] Egy G irányított gráf* transzformációgráfjának *nevezzük a G^G gráfot.*

A transzformációgráfokon természetes módon értelmezhető szorzás: az f és g csúcsok/leképezések szorzata legyen az $f \circ g$ leképezés. A szorzás szoros kapcsolatban van a gráf élstruktúrájával: az élreláció majdnem kompatibilis vele:

2.12. Állítás. *[] Ha G^G-ben $f_1 \to f_2$ és $g_1 \to g_2$, akkor $f_1g_1 \to f_2g_2$.*

Bizonyítás. Minden $a \to b$-re G-ben $g_1(a) \to g_2(b)$ $g_1 \to g_2$ miatt, és így $f_1 g_1(a) \to f_2 g_2(b)$ $f_1 \to f_2$ miatt. $\square$

Van azonban olyan részgráfja G^G-nek, melyen a szorzás valóban kompatibilis, és nem is vezet ki:

2.13. Definíció. *[] $Hom(G)$-vel jelöljük a G^G-ben a homomorfizmusok által feszített részgráfot.*

2.14. Állítás. *[] $Hom(G)$ részfélcsoportja G^G-nek, és rajta a szorzás kompatibilis.*

Bizonyítás. Ha $f, g \in Hom(G)$, akkor $f \to f$ és $g \to g$, így a fenti állítás szerint $fg \to fg$, tehát fg is homomorfizmus. A kompatibilitás adódik a fenti állításból és abból, hogy $f \in Hom(G)$-re $f \to f$. $\square$

Ez az állítás (ami persze igaz $Hom(G)$ részfélcsoportjaira is) mutatja $Hom(G)$ kitüntetett jellegét és valamelyest könnyebben kezelhető voltát. Megjegyezzük, hogy általában van az állítást teljesítő olyan részfélcsoport is, ami nem része $Hom(G)$-nek: például egy tetszőleges idempotens leképezést (ami nem homomorfizmus) tartalmazó egyelemű halmaz. Ilyen leképezés csak akkor nincs, ha G teljes vagy üres, ezekben az esetekben persze $Hom(G)$ megegyezik G^G-vel, és teljes. $Hom(G)$ G^G-nek azon pontok által feszített részgráfja, amin van hurokél, vagyis a legnagyobb reflexív részgráfja G^G-nek.

2.15. Definíció. *[] Egy $f \in G^G$ (vagy $f \in G^H$) leképezés* rangjának *nevezzük, és $rang(f)$-fel jelöljük az $f(G)$ halmaz elemszámát. Magát a halmazt f* képének *nevezzük.*

A következő nem igényel bizonyítást:

2.16. Állítás. *[] Tetszőleges $f, g \in G^G$ esetén $rang(fg) \leq \min(rang(f), rang(g))$.* $\square$

Eszerint G^G-nek részfélcsoportjait alkotják a legfeljebb k rangú leképezések bármely $1 \leq k \leq |G|$-re. Szintén részfélcsoportot alkotnak a maximális (vagyis $|G|$) rangú, tehát bijektív leképezések. Ez utóbbi részfélcsoportot (az elemei által feszített részgráffal mint élstruktúrával együtt) $Sym(G)$-nek nevezzük. Mindezen félcsoportok alaphalmaza (ellentétben $Hom(G)$-ével) független G élstruktúrájától. A következő fontos részfélcsoportra ez nem igaz:

2.17. Definíció. *[] Egy irányított gráf egy csúcsa* nyelő, *ha ki-fokszáma 0,* forrás, *ha be-fokszáma 0, illetve* sima, *ha se nem nyelő, se nem forrás. A gráf sima, ha minden csúcsa sima. Egy G gráf* sima részének *nevezzük, és $G^{(S)}$-sel jelöljük a maximális sima feszített részgráfját, $Sm(G)$-vel pedig $(G^G)^{(S)}$-et, azaz G^G sima részét.*

A „sima rész” következő átfogalmazása azt is mutatja, hogy a fenti definíció jó, vagyis hogy egyetlen maximális sima feszített részgráfja van egy irányított gráfnak.

2.18. Állítás. *[] Legyen $a \in G$. $a \in G^{(S)}$ akkor és csak akkor áll fenn, ha a része egy irányított körnek, vagy egy olyan irányított útnak, amely végpontjai irányított körben fekvő csúcsok.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $a \in G^{(S)}$. Ekkor van olyan $b_1 \in G^{(S)}$, hogy $a = b_0 \to b_1$, olyan b_2, hogy $b_1 \to b_2$, és így tovább. G véges, ezért van ezek közt egy $b_i = b_k, i < k$ ismétlődés. Ha $i = 0$, akkor a része az $a \to b_1 \to \cdots \to b_{k-1} \to a$ irányított körnek $G^{(S)}$-ben és persze G-ben is. Ha $i > 0$, akkor hasonlóan adódnak $G^{(S)}$-beli $a \leftarrow c_1 \leftarrow c_2 \leftarrow \ldots$ csúcsok, ahol $c_j = c_m$ valamely $j < m$-re, $j = 0$ esetén a része egy irányított körnek, ha pedig $j > 0$, akkor b_i és c_j részei egy irányított körnek, a pedig egy köztük menő $c_j \to c_{j-1} \to \cdots \to c_1 \to a \to b_1 \to \cdots \to b_i$ útnak.

Fordítva, ha a része egy irányított körnek vagy egy irányított körök közt menő irányított útnak, akkor része G egy sima részgráfjának, és így $G^{(S)}$-nek is. □

2.19. Állítás. *[] $Sm(G)$ részfélcsoportja G^G-nek.*

Bizonyítás. Legyen $f, g \in Sm(G)$. Ekkor f-en és g-n keresztül is megadható egy mindkét irányban végtelen irányított séta (tehát $a, b : \mathbb{Z} \mapsto G^G$ leképezések, melyekre minden $i \in \mathbb{Z}$ esetén $(a(i), a(i+1)), (b(i), b(i+1)) \in E(G)$, illetve $a(0) = f, b(0) = g$), ezek szorzata (vagyis a $c : \mathbb{Z} \mapsto G^G, c(i) := a(i)b(i)$ leképezés) egy végtelen irányított séta a $c(0) = fg$ G^G-beli csúcson keresztül. Egy ilyen séta része kell legyen G^G sima részének. □

$Sm(G)$ egy $Hom(G)$-nél bővebb részfélcsoport, hiszen ha $h \in Hom(G)$, akkor $h \to h$, vagyis h része egy irányított körnek. A $Sym(G)$ részfélcsoport elemei invertálhatók, és az inverzzel együtt G^G egy részcsoportját alkotják. Érdemes megjegyezni a következőt:

2.20. Állítás. *[] $Sym(G)$-n az invertálás kompatibilis művelet.*

Bizonyítás. Ha $f, g \in Sym(G)$, akkor az $s : G^2 \mapsto G^2, (a, b) \mapsto (f(a), g(b))$ leképezés bijektív. Így ha $f \to g$, akkor $s(E(G)) \subseteq E(G)$-ből következik, hogy s élt élbe, nem-élt pedig nem-élbe visz (kihasználva a gráf végességét). Így inverze is ezt teszi: $s' : G^2 \mapsto G^2, (a, b) \mapsto (f^{-1}(a), g^{-1}(b))$ is élt élbe visz, ami pont azt jelenti, hogy $f^{-1} \to g^{-1}$. □

$Aut(G)$-nek nevezzük $Sym(G)$ és $Hom(G)$ metszetét, ennek elemei G automorfizmusai (éppen a fenti állításból következik, hogy a bijektív endomorfizmusok inverze is endomorfizmus). A szorzás $Sym(G)$-n sem lesz (általában) kompatibilis művelet, csak annak $Hom(G)$-be eső részén.

3. fejezet

Az identitás komponense

Az identikus leképezés G-ből önmagába (amit id-nek jelölünk) nyilánvalóan egységeleme G^G-nek, valamint $Sym(G)$-nek, $Hom(G)$-nek, $Aut(G)$-nek és $Sm(G)$-nek is, hiszen automorfizmus, és az előzőek közül $Aut(G)$ a legszűkebb részfélcsoport. Ennek a (különböző részfélcsoportokhoz tartozó) komponenseit vizsgáljuk ebben a szakaszban.

Azonos típusú G^G-beli séták összeszorozhatóak a következő értelemben: ha $f_0, f_1 \ldots, f_n$ és $g_0, g_1, \ldots, g_n$ azonos típusú, vagyis minden $0 \leq i \leq n-1$-re vagy (f_i, f_{i+1}) és (g_i, g_{i+1}) is él, vagy mindkettő visszaél, akkor a megfelelő igaz $(f_i g_i, f_{i+1} g_{i+1})$-re is, tehát $f_0 g_0, f_1 g_1, \ldots, f_n g_n$ egy ugyanilyen típusú séta. Ez mutatja, hogy az identitásból egy adott típusú sétával elérhető G^G-beli csúcsok félcsoportot alkotnak. Mivel $k_1 < k_2$ esetén, ami eléhető az identitásból egy k_1 hosszúságú irányított sétával, az elérhető egy k_2 hosszúságúval is ($id \to id$ miatt a séta elejére rakható $k_2 - k_1$-szer az identitás), az identitásból irányított úttal elérhető leképezések szintén félcsoportot alkotnak, amit $id_{\to}$-lal jelölünk. Hasonlóan, az identitásból csak visszaéleket tartalmazó irányított sétán át elérhető leképezések G^G egy részfélcsoportját alkotják, amit $id_{\leftarrow}$-val jelölünk.

Többször fogjuk használni a következő észrevételt: ha $id \to g_1 \to g_2 \to \cdots \to g_k$ teljesül, akkor $id \to g_1 \to g_1 g_2 \to \cdots \to g_1 g_2 \ldots g_k$ és $id \to g_1 \to g_2 g_1 \to \cdots \to g_k \ldots g_2 g_1$ is. Ez azonnal következik abból, hogy utóbbi két relációsor l-edik eleme az első relációsor első l relációjának szorzata (különböző sorrendben). A két kapott relációsorra az eredeti jobb- illetve bal-felszorzottjaként fogunk hivatkozni. Hasonlóan kaphatunk jobb- illetve bal-felszorzottat egy, az identitásból induló, csak visszaéleket tartalmazó sétából — ezek úgyszintén ilyen séták lesznek.

3.1. Definíció. *[] Egy $f \in G^G$ leképezést* idempotensnek *nevezünk, ha $f^2 = f$, tehát ha f identikus a képhalmazán.*

Az $n = |G|$ jelöléssel, ha G^G (vagy egy tetszőleges részhalmaza) elemeit $n!$-adik hatványra emeljük, akkor az összes elem idempotens lesz. Legyen ugyanis $f \in G^G$, $a \in G$, és tekintsük az $a, f(a), f^2(a), \ldots$ sorozatot, ha ebben az első ismétlődés $f^k(a) = f^l(a)$, ahol

$0 \le k < l$, akkor $f^i(a) = f^j(a)$ pontosan azon (i,j) párokra teljesül, melyekre $i \ge k$, és $l-k|i-j$. Tekintve, hogy $l \le n$ $(a, f(a), f^2(a), \dots, f^n(a)$ nem lehet mind különböző), ezeket a feltételeket az $i = n!$, $j = 2n!$ teljesíti, tehát $f^{2n!}(a) = f^{n!}(a)$, így $f^{n!}$ tényleg idempotens.

Az azonos típusú séták összeszorzásából adódik, hogy ha egy G^G-beli séta minden elemét azonos kitevőjű hatványra emeljük, továbbra is (egy ugyanolyan típusú) sétát kapunk. Ez a kitevő választható úgy az előzőek szerint, hogy a séta elemei idempotensek legyenek. Az így kapott sétát az eredeti idempotens felhatványozásának nevezzük. Ez egyértelmű, mert egy $f \in G^G$-nek csak egyetlen idempotens hatványa van: ha ugyanis f^n idempotens, akkor $f^n = f^{2n} = f^n f^n = f^n f^{2n} = f^{3n} = f^{4n} = \dots$. Ha f^m is idempotens, akkor tehát $f^n = f^{mn} = f^m$.

A fentebb említett részfélcsoportok közül $Aut(G)$ szerkezete a legegyszerűbb.

3.2. Állítás. *[] $Aut(G)$ szimmetrikus gráf: tetszőleges $f, g \in Aut(G)$ esetén, ha $f \to g$ teljesül, akkor $g \to f$ is.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f = id$. Legyen g rendje ($Sym(G)$-ben) m. $id \to g$-ből következik $id \to g^{-1}$, amit g-vel szorozva ($Aut(G)$-ben mindkét művelet kompatibilis az élstruktúrával) adódik $g \to id$. Általában, ha $f \to g$, akkor $fg^{-1} \to id$, így a speciális eset miatt $id \to fg^{-1}$, tehát g-vel jobbról szorozva $g \to f$. □

3.3. Állítás. *[] Az identitás komponense $Aut(G)$-ben teljes gráf.*

Bizonyítás. Mivel már tudjuk, hogy $Aut(G)$ szimmetrikus, elég belátni, hogy nincs olyan g automorfizmus, amely nem szomszédos id-del, de van egy közös $f \in Aut(G)$ szomszédjuk. Ilyen g azért nincs, mert $id \to f \to g$-ből jobbfelszorzással $f \to fg$, abból pedig f^{-1}-gyel való balról szorzással $id \to g$ adódik. □

Tekintve, hogy minden $f \in Aut(G)$-re az $r_f : Aut(G) \mapsto Aut(G), g \mapsto gf$ egy automorfizmusa $Aut(G)$-nek (az ott meglévő kompatibilitás, és $r_f r_{f^{-1}} = id_{Aut(G)}$ miatt), ami id-et f-be viszi, f $Aut(G)$-beli komponense az identitáséval izomorf, amiből következik az alábbi tétel.

3.4. Tétel. *[] $Aut(G)$ azonos csúcsszámú teljes irányított gráfok diszjunkt uniója.* □

Tehát $Aut(G)$-t két paraméter jellemzi: komponensei száma, illetve a komponensek (közös) mérete, ami megegyezik az automorfizmusok számával $Ki(id)$-ben. Itt a ki-halmaz tekinthető G^G-ben, ellenben az nem feltétlen igaz, hogy ez megegyezne az automorfizmusok számával az identitás G^G-beli komponensében (lehetséges, hogy egy automorfizmus elérhető G^G-beli sétával, csak olyannal nem, ami végig $Aut(G)$-ben halad).

Felmerül a kérdés, hogy mondhatunk-e többet a 3.4 tétel állításánál. Felvetődhet, hogy valamelyik paraméter esetleg mindenképp 1-gyel egyenlő, tehát az automorfizmusok mindig összefüggő részgráfját alkotják G^G-nek, vagy épp ellenkezőleg, $Aut(G)$-ben csak izolált csúcsok vannak. Egyik sem teljesül általában, de ahogy rögtön látjuk, az egyik paraméter nem vehet fel akármilyen értéket.

Legyen $f \in Aut(G)$ olyan, hogy $id \to f$, és $f \neq id$. Vegyünk egy $a \in G$ csúcsot, amit f nem hagy fixen, és legyen k a legkisebb olyan pozitív egész, melyre $f^k(a) = a$. A 2.7 állítás alapján minden x csúcsra $Be(x) \subseteq Be(f(x))$, amiből $Be(a) \subseteq Be(f(a)) \subseteq Be(f^2(a)) \subseteq \cdots \subseteq Be(f^k(a)) = Be(a)$. Így f minden csúcsot olyan csúcsba visz, amelynek azonos a be-halmaza. Ugyanez elmondható a ki-halmazokra is, mert a 3.2 állítás szerint $id \to f$ maga után vonja a duális $f \to id$-et is. Tehát f egy olyan leképezés, ami az azonos be- és ki-halmazokkal rendelkező csúcsokat permutálja. Másrészről, minden olyan $g \in Sym(G)$ leképezés, ami az azonos be- és ki-halmazokkal rendelkező csúcsokat permutálja, automorfizmus, és teljesíti $id \to g$-t. Utóbbi nyilvánvaló, mert ekvivalens $\forall x \in G : Be(x) \subseteq Be(f(x))$-szel, előbbi pedig azért teljesül, mert ilyen g-re:

$$(x, y) \in E(G) \Leftrightarrow y \in Ki(x) \Leftrightarrow y \in Ki(g(x)) \Leftrightarrow g(x) \in Be(y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow g(x) \in Be(g(y)) \Leftrightarrow (g(x), g(y)) \in E(G)$$

Ez azt mutatja, hogy $Aut(G)$-ben az identitás komponense (ami, mint láttuk, részcsoport) izomorf (mint csoport) szimmetrikus csoportok direkt szorzatával. Ez limitálja lehetséges elemszámát: nem minden szám áll elő faktoriálisok szorzataként. További limitáció azonban nincs: legyenek $n_1, n_2, \ldots, n_s$ tetszőleges pozitív egészek, H pedig az az irányított gráf, amelynek csúcshalmaza az $A_1, \ldots, A_s$ (diszjunkt) halmazok uniója, ahol $|A_i| = n_i$, és $(x, y) \in E(H) \Leftrightarrow \exists\, 1 \leq i \leq s-1 : x \in A_i, y \in A_{i+1}$. Világos, hogy $Aut(H) \cong S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_s}$, illetve hogy minden automorfizmus az identitás szomszédja.

$Aut(G)$ (mint gráf) másik paraméterére (komponensei számára) nincs megkötés: ha m_1 egy lehetséges komponensméret, tetszőleges $m_2 > 0$ esetén van olyan G_0 irányított gráf, melyre $Aut(G_0)$ m_2 számú m_1 méretű komponensből áll. Ennek belátásához vegyünk egy H-t az előzőekben látott módon az m_1 komponensméretre, és vegyük ennek diszjunkt unióját egy m_2 hosszú irányított körrel, az így kapott G_0 megfelelő. Könnyen található összefüggő példa is.

Ezzel megkaptuk $Aut(G)$ lehetséges szerkezeteit - de csak a gráfstruktúrára vonatkozóan. A csoportstruktúra általában bonyolultabb. A kettő közti megjegyzendő összefüggés, hogy a gráf komponensei a csoport egy kongruenciájának osztályait alkotják. Ez következik abból, hogy id komponense normálosztó: ha $id \to f$, akkor minden $g \in Aut(G)$-re $g \to g$-vel és $g^{-1} \to g^{-1}$-gyel szorozva $id \to g^{-1}fg$.

A 3.4 tételt tehát a következőképpen módosíthatjuk.

3.5. Tétel. *[] Legyen H irányított gráf. Akkor és csak akkor létezik olyan G irányított gráf,* *melyre $Aut(G) \cong H$, ha H teljes gráfok diszjunkt uniója, az összes komponense azonos elemszámú, és ez a közös elemszám előáll faktoriálisok szorzataként.* $\square$

Visszatérünk G^G többi, a szakasz elején említett részfélcsoportjára. Ezek struktúrája közel sem olyan egyszerűen írható le, mint $Aut(G)$-é — és ez igaz az identitás komponensére is, sőt, a komponens és a teljes részfélcsoport közti kapcsolatra is. $Aut(G)$ szép struktúrájából van azonban, ami átvihető: az r_f leképezéseket értelmezhetjük $Sym(G)$-n is, és amennyiben f automorfizmus, $Sym(G)$-beli automorfizmusokat kapunk, amik id-et f-be viszik. Ez azt mutatja, hogy $Sym(G)$ komponensei közül azok, amelyek tartalmaznak automorfizmust, izomorfak.

$Sym(G)$-ben az identitás komponense nem feltétlen teljes gráf, így annak az állításnak, hogy $Aut(G)$-ben az identitás komponense normálosztó, természetes $Sym(G)$-beli analógjaként $Ki(id)$, illetve $Be(id)$ normálosztósága merül fel (itt ezek nem kell, hogy egybeessenek). Ez sem teljesül: tekintsünk egy olyan gráfot, amelyben az a és b csúcsoknak azonos a ki- és a be-halmaza, míg minden más csúcspárnak különbözik a ki-halmaza is és a be-halmaza is. Egyetlen nem identikus bijektív leképezés van $Ki(id)$-ben (ami megcseréli a-t és b-t), legyen ez f, míg legyen g az a-t és c-t megcserélő leképezés (ahol c egy tetszőleges harmadik csúcs). Ekkor $g^{-1}fg$ a b-t és c-t megcserélő leképezés, ami nem része $Ki(id)$-nek.

Igaz viszont a következő, gyengébb állítás:

3.6. Állítás. *[] Ha $S \leq Sym(G)$ egy olyan részcsoport, amely, mint irányított gráf, sima. Ekkor $Ki(id)$ és $Be(id)$ normálosztók S-ben.*

Bizonyítás. A két analóg állítás közül csak az elsőt bizonyítjuk. $f \in Ki(id)$ esetén bármely $g \in S$-re van olyan $h \in Sym(G)$, hogy $h \to g$. Ekkor az invertálás $Sym(G)$-beli kompatibilitása miatt $h^{-1} \to g^{-1}$, így $id = h^{-1} id\, h \to g^{-1}fg$. $\square$

Ennek az állításnak meglepően gyengének tűnő feltétele van tekintetbe véve, hogy a simasági feltételt elhagyva igen könnyen kaptunk ellenpéldát. A simasági feltétel azonban G^G-ben egyáltalán nem gyenge, és ez különösen igaz $Sym(G)$-re (amint az a 4.2 bizonyításából is fog látszani): a 2.7 állításból $f \to g$-re ekvivalens feltételként adódó $\forall x \in G : f(Be(x)) \subseteq Be(g(x))$ relációban $f, g \in Sym(G)$ mindenütt egyenlőséget követel meg: ha egy x-re szigorú tartalmazás állna, akkor az $|Be(x)| = |f(Be(x))| \leq |Be(g(x))|$ egyenlőtlenségek összegeként $\sum_{x \in G} |Be(x)| < \sum_{x \in G} |Be(x)|$ adódna.

Az r_f leképezések a $Hom(G)$-t illetően azt mutatják, hogy ha f automorfizmus (mivel r_f és $r_{f^{-1}}$ homomorfizmusok, és egymás inverzei), akkor az automorfizmust tartalmazó komponensek $Hom(G)$-ben éppúgy izomorfak, mint $Sym(G)$-ben (de nem csak hogy különbözőek általában ezek a komponensek, hanem az is lehetséges, hogy két automorfizmus egy komponensben van $Sym(G)$-ben, különbözőekben $Aut(G)$-ben - megfordítva a 3.4 tétel miatt nem).

Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor $id_{\rightarrow}$-nak és $id_{\leftarrow}$-nak van az identitáson kívüli közös eleme. Megjegyezzük, hogy a közös elemek halmaza megegyezik az identitást tartalmazó irányított körséták uniójával.

3.7. Tétel. *[] Tegyük fel, hogy $id_{\rightarrow} \cap id_{\leftarrow}$ legalább két elemet tartalmaz. Ekkor tartalmaz egy olyan homomorfizmust is, ami nem az identitás.*

Bizonyítás. Legyen $id \rightarrow f_1 \rightarrow \cdots \rightarrow f_n \rightarrow id$ egy minimális hosszúságú nem egyelemű irányított körséta G^G-ben. A fenti relációsorban lévő relációk szorzatából adódik, hogy $id\, f_1 f_2 \ldots f_n \rightarrow f_1 f_2 \ldots f_n\, id$, tehát $f_1 f_2 \ldots f_n$ homomorfizmus. A relációsor jobbfelszorzottjaként adódik, hogy $f_1 f_2 \ldots f_n \in id_{\rightarrow}$, míg $f_1 f_2 \ldots f_n \in id_{\leftarrow}$ a kört visszéleket tartalmazó sétának tekintve, annak balfelszorzottjaként adódik. Már csak azt kell megmutatni, hogy $f_1 f_2 \ldots f_n$ nem az identitás. Az $n = 1$ esetben ez nyilvánvaló. Ha $n > 1$, akkor pedig ez a minimalitásból következik: a jobbfelszorzottként adódó $id \rightarrow f_1 \rightarrow f_1 f_2 \rightarrow \cdots \rightarrow f_1 f_2 \ldots f_n$ egy rövidebb (de nem egyelemű) identitást tartalmazó körsétát ad $f_1 f_2 \ldots f_n = id$ esetén. □

A fenti bizonyítás bizonyos értelemben konstruktív: egy identitáson átmenő $n+1$ hosszú körből a jobb- illetve balfelszorzottakkal gyárt egy $2n$ hosszú irányított körsétát, amiben az identitással szemközti elem homomorfizmus. Ha ez éppen megegyezne az identitással, akkor kaptunk két n hosszúságú irányított körsétát, és az eredeti helyett ezzel megismételhetjük az eljárást, ami véges lesz a kör hosszának csökkenése miatt. Ha a kezdeti körben csak $Sym(G)$-beli elemek voltak, akkor az eljárás folyamán nem fognak megjelenni ezen kívüli elemek, így az eredményül kapott homomorfizmus automorfizmus lesz. Ha azonban a kezdeti körben van olyan f_i, ami nem bijektív leképezés, akkor $f_1 f_2 \ldots f_n$ sem lesz bijektív, így a (már az első lépés után) adódó homomorfizmus nem lesz automorfizmus.

Retrakcióknak nevezzük az idempotens, de nem identikus (épp ezért nem is bijektív) homomorfizmusokat. Az idempotens felhatványozás mutatja, hogy ha $id_{\rightarrow} \cap id_{\leftarrow}$ tartalmaz nem bijektív homomorfizmust, akkor tartalmaz retrakciót is (az idempotens felhatványozás körsétát körsétába visz). Így a 3.7 tétel a következőképp pontosítható:

3.8. Tétel. *[] Ha $id_{\rightarrow} \cap id_{\leftarrow}$ tartalmaz $Sym(G)$-n kívüli elemet, akkor tartalmaz retrakciót is. Minden $S \leq G^G$ részfélcsoportra, ha S-ben van egy identitást tartalmazó nem egyelemű (vagyis nem 1 hosszúságú) kör, akkor $id_{\rightarrow} \cap id_{\leftarrow} \cap S$-ben van homomorfizmus. Speciálisan, ha $id_{\rightarrow} \cap id_{\leftarrow}$ nem egyelemű, de minden eleme bijektív, akkor tartalmaz nemtriviális automorfizmust.*

Felmerül, hogy a fenti tétel második esetének feltételéből következhet nem csak automorfizmus, de retrakció létezése is. Ez a következő tényhez lenne hasonló:

3.9. Állítás. *[] Ha $Ki(id)$-ben (vagy $Be(id)$-ben) van az identitáson kívüli leképezés, akkor van nem bijektív is.*

Bizonyítás. $id \to f$-ből a 2.7 állítás alapján, minden x csúcsra $Be(x) \subseteq Be(f(x))$. Ha van ezt kielégítő f, akkor az egy x_1 csúcsot egy tőle különböző x_2-be visz, amelynek be-halmaza bővebb x_1-énél. Ekkor az a leképezés, ami x_1-et x_2-be viszi, az összes többi pontot fixen hagyja, eleme id ki-halmazának, de nem bijektív. □

Legyen $N(G) = id_{\to} \cap id_{\leftarrow} \cap Sym(G)$, ez részcsoportja G^G-nek (a részfélcsoportság következik abból, hogy részfélcsoportok metszete, az invertálásra való zártság pedig onnan, hogy egy identitáson átmenő $N(G)$-beli irányított körséta inverzei egy identitáson átmenő irányított körsétát alkotnak). A 3.8 tétel azt adja, hogy amennyiben $N(G)$ nemtriviális (tartalmaz identitáson kívüli elemet), akkor tartalmaz nemidentikus automorfizmust is. A következőekben megvizsgáljuk $N(G)$ szerkezetét, és eldöntjük, hogy $N(G)$ nemtrivialitásából következik-e az, hogy tartalmaz retrakciót, vagy esetleg az a gyengébb állítás, hogy G^G tartalmaz retrakciót.

Minden $g \in N(G)$ esetén $a(g)$-vel jelöljük az identitásból g-be vezető legrövidebb $N(G)$-beli irányított út hosszát, $b(g)$-vel pedig az identitásból g-be vezető legrövidebb N-beli, csak visszaéleket tartalmazó út hosszát. Továbbá minden $n \geq 0$-ra $A_n = \{g \in N(G) : a(g) = n\}$, illetve $B_n = \{g \in N(G) : b(g) = n\}$, $\mathcal{A}_n = \cup_{i=0}^{n} A_i$, $\mathcal{B}_n = \cup_{i=0}^{n} B_i$. Végül, $a = \min\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}_n = N\}$, és $b = \min\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{B}_n = N(G)\}$.

Az imént bevezetett paraméterekre, illetve konstansokra a következőek teljesülnek.

3.10. Tétel. *[] Tegyük fel, hogy $N(G)$ nemtriviális. Ekkor teljesülnek benne a következők:*

1. *$\mathcal{A}_n$, illetve $\mathcal{B}_n$ minden n-re $N(G)$ normálosztói, amik $n = 0, 1, \ldots, a$-ra, illetve $n = 0, 1, \ldots, b$-re (szigorúan növekvő) normálláncokat adnak.*
2. *$n \leq a$ esetén $|A_n| \geq |\mathcal{A}_{n-1}|$, illetve $n \leq b$ esetén $|B_n| \geq |\mathcal{B}_{n-1}|$.*
3. *$a = b$*

Bizonyítás. 1, $\mathcal{A}_n$-be azok az $N(G)$-beli leképezések tartoznak, amik elérhetőek legfeljebb n hosszú úttal, és az ilyen leképezések részfélcsoportot, és mivel bijektívek, részcsoportot alkotnak (tehát bármely $f, g \in N(G)$-re $a(fg) \leq \max\{a(f), a(g)\}$ és $b(fg) \leq \max\{b(f), b(g)\}$). A konjugálásra való zártság abból következik, hogy $N(G)$ sima, ezért egy $f \in \mathcal{A}_n$-be az identitásból vezető irányított út konjugálható egy $g \in N(G)$-be vezető (mindegy, honnan induló) $N(G)$-beli, ugyanilyen hosszú irányított sétával, ami id-ből $g^{-1}fg$-be vezető, legfeljebb n hosszú irányított sétát ad. (Két azonos típusú $Sym(G)$-beli

út konjugálása analóg két azonos típusú út összeszorzásával). Az irányított sétából esetlegesen csúcsok elhagyásával legfeljebb n hosszú irányított út adódik.
Van olyan $N(G)$-beli elem, amibe az identitásból vezető legrövidebb irányított út a hosszúságú, ennek az (egyik) legrövidebb útnak az elemei rendre $A_0, A_1, \ldots, A_a$-ba tartoznak, ami mutatja, hogy az $\mathcal{A}_n$-ek szigorúan növekednek, amíg $a \leq n$. A definícióból világos, hogy $\mathcal{A}_a = N(G)$. A $\mathcal{B}_n$-ekre vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható.
2, Tegyük fel, hogy $f, g \in N(G)$ olyanok, hogy $a(f) < a(g)$. Ekkor $a(fg) \leq \max\{a(f), a(g)\}$ $= a(g)$, és ha itt nem áll egyenlőség akkor $a(f^i g) < a(g)$ teljesül minden $i > 0$-ra egyszerű indukció alapján (ha $a(f^i g) < a(g)$, akkor $a(f^{i+1}g) \leq \max\{a(f^i g), a(f)\} < a(g)$). Ez lehetetlen, mert f-nek van olyan hatványa, ami az identitás. Így $a(fg) = a(g)$, és hasonlóan, $a(gf) = a(g)$. Ebből következik, hogy a értéke egy szorzaton megegyezik a legnagyobb értékével a szorzat tényezőin, feltéve, ha ezt a legnagyobb értéket a tényezők közül csak egy helyen veszi fel. Ha $f \in N(G)$, akkor a korábban definiált r_f leképezés $N(G)$-n zárt és bijektív, valamint id-et f-be viszi, az előző megállapítás szerint pedig $\mathcal{A}_{n-1}$ elemeit A_n-be, amennyiben $f \in A_n$. Ez mutatja a bizonyítandó állítás első felét, a második analóg.
3, Legyen $f_0 \in A_a$ tetszőleges. Mivel $N(G)$ sima, létezik egy $f_0 \to f_1 \to \cdots \to f_a$ irányított út $N(G)$-ben. Ha ezt egy id-ből f_a^{-1}-be menő, a hosszú irányított úttal összeszorozzuk (ilyen út a definíciója szerint létezik), akkor egy f_0-ból id-be menő, a hosszú irányított séta adódik. Így A_a elemeiből megy legfeljebb a hosszú irányított út az identitásba. A tétel (már bizonyított) 2, pontját $n = a$-ra alkalmazva adódik, hogy $N(G)$ elemeinek legalább fele A_a-ba, és legalább fele B_b-be esik. Mivel az identitás egyiknek sem eleme, A_a és B_b nem lehet diszjunkt. De B_b elemeiből az identitásba menő irányított utak legalább b hosszúak, míg, amint beláttuk, A_a minden eleméből megy egy legfeljebb a hosszú irányított út id-be. Így $a \geq b$, az analóg módon nyerhető $b \geq a$ miatt tehát valóban $a = b$. □

A fenti tétel egy meglehetősen gazdag struktúrát mutat $N(G)$-re - különösen, ha a nagy. Ha tehát ellenpéldát keresünk sejtésünkre, vagyis olyan G irányított gráfot keresünk, melyre $N(G)$ nemtriviális, de nem tartalmaz retrakciót (vagy a gyengébb változatban: G^G nem tartalmaz retrakciót), akkor célszerűnek tűnik az $a = 1$ esettel próbálkozni.

3.11. Állítás. *[] Ha $Ki(id)$ és $Be(id)$ metszete tartalmaz az identitáson kívüli elemet, akkor tartalmaz retrakciót is.*

Bizonyítás. Egy $f \in Ki(id) \cap Be(id)$ leképezés szükségképpen homomorfizmus, mert $id \to f$ és $f \to id$ szorzata $f \to f$-et ad. Ha tehát f nem bijektív, készen vagyunk. Ha f bijektív, vannak olyan $x_0, x_1, \ldots, x_k$ különböző csúcsok, hogy $f(x_0) = x_1, \ldots, f(x_{k-1}) = x_k, f(x_k) = x_0$. Minden x csúcsra $Be(x) \subseteq Be(f(x))$, és $Ki(x) \subseteq Ki(f(x))$ a 2.7 állítás, $id \to f$ és $f \to id$ miatt. Ezek szerint megegyeznek az x_i csúcsok be-halmazai, valamint a ki-halmazaik is. Ha g az a leképezés, ami minden csúcsot fixen hagy, kivéve x_0-t, amit x_1-be visz, akkor $id \to g$ és $g \to id$ teljesülni fog (mert minden csúcs képének be- illetve ki-halmaza meg fog egyezni a csúcs be- illetve ki-halmazával), így g homomorfizmus, az pedig nyilvánvaló, hogy idempotens és nem identikus. $\square$

Ez megerősíti sejtésünket: az $a = 1$ esetben nincs ellenpélda az erősebb változatra sem. Ha $a = 2$, $N(G)$ legalább 4 elemű (a 3.10 tétel 2. pontjából következik, hogy $|N(G)| \geq 2^a$). Amennyiben ténylegesen $|N(G)| = 4$, akkor ez csak úgy lehetséges, ha $Ki(id)$ és $Be(id)$ mindegyike egyetlen identitáson kívüli elemet tartalmaz (legyenek ezek f_1, illetve f_2). Feltehető, hogy f_1 és f_2 különböznek, különben a 3.11 állítás miatt van retrakció $N(G)$-ben. $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{B}_1$ részcsoport volta miatt f_1 és f_2 idempotensek, tehát $f_1 f_2 = f_2 f_1$ $N(G)$ negyedik eleme. Az eddigiek meghatározzák $N(G)$ csoportstruktúráját, ez izomorf lesz $\mathbb{Z}_2^2$-tel. Ami az élstruktúrát illeti: $A_1 = \{f_1\}$, $A_2 = \{f_2, f_1 f_2\}$, amiből $(id, f_1), (f_1, f_2), (f_1, f_1 f_2)$ élek, $B_1 = \{f_2\}$, $B_2 = \{f_1, f_1 f_2\}$, amiből pedig $(f_2, id), (f_1, f_2), (f_1 f_2, f_2) \in E(N(G))$. Összeszorozva $f_2 \to id$-et és $id \to f_1$-et $f_2 \to f_1$ adódik, amit pedig $f_1 \to f_2$-vel szorozva az, hogy $f_1 f_2$ homomorfizmus. $id \to id$ nyilvánvaló. Ezzel megkaptuk 8 élét $N(G)$-nek, könnyen ellenőrizhető, hogy további élek nem lehetnek benne (például: $f_1 f_2 \to f_1$ esetén $f_2 \to f_1$-gyel szorozva $f_1 \to id$ adódna, de $f_1 \in B_2$. Tehát az egyetlen lehetséges élstruktúra:

$$E(N(G)) = \{(id, id), (id, f_1), (f_1, f_2), (f_1, f_1 f_2), (f_2, id), (f_2, f_1), (f_1 f_2, f_2), (f_1 f_2, f_1 f_2)\}$$

Vagyis $a = 2$ csak úgy lehetséges, ha $N(G) \cong N$, ahol N a fent megkapott négycsúcsú, nyolcélű gráf. Ez az N kielégíti a 3.10 tétel állításait, és ellenőrizhető, hogy a 2.12 állítás majdnem-kompatibilitási feltételét is. Elképzelhető tehát, hogy van olyan G, melyre $N(G)$ ilyen. Tekintsünk egy ilyen G-t.

Vizsgáljuk meg, hogy egy $x \in G$ csúcsra milyen az $\{x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)\}$ halmaz. Ez nem feltétlen 4 elemű, de most tegyük fel, hogy az, illetve ha mégsem, számoljuk multiplicitással a csúcsokat és az éleket, így ezen a halmazon 16 rendezett csúcspár van. Ha ezek között van él, akkor N éleit alkalmazva kapjuk hogy legalább 8 él van köztük, amik közt lesz hurokél is. Ez azért van, mert ha $f_i, f_j \in \{id, f_1, f_2, f_1 f_2\}$, és $f_i(x) \to f_j(x)$, akkor:

1. $f_j = f_i$ esetén $f_i(x) \to f_j(x)$ hurokél
2. $f_j = f_1 f_i$ esetén $f_2 f_1 f_i(x) \to f_2 f_j(x)$ hurokél $(f_2 f_1 \to f_2)$
3. $f_j = f_2 f_i$ esetén $f_2 f_i(x) \to f_j(x)$ hurokél $(f_2 \to id)$
4. $f_j = f_1 f_2 f_i$ esetén $f_1 f_i(x) \to f_2 f_j(x)$ hurokél $(f_1 \to f_2)$

Tehát az $\{x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)\}$ halmazon vagy nincs él G-ben, vagy van hurokél. Egy hurokélbe menő konstans leképezés retrakció. Ezért ha G ellenpéldája a gyengébb állításnak, akkor az $\{x, f_1(x), f_2(x), f_1 f_2(x)\}$ alakú halmazokon (az ilyen halmazok a csúcsok egy osztályozását adják) belül nem lehet él. (Az erősebb állítás esetén ezt nem mondhatjuk: egy konstans retrakció nem feltétlen része $id_{\rightarrow} \cap id_{\leftarrow}$-nek. Sőt, mint azt a következő fejezetben látni fogjuk, amennyiben mégis része, akkor az összes homomorfizmusra is elmondható ez.)

Mivel ha G az üres gráf, akkor G^G teljes, tehát van benne (és $id_{\to} \cap id_{\leftarrow}$-ben is) retrakció, ha azt akarjuk elérni, hogy G ellenpélda legyen, akkor az előbb említett osztályozásnak legalább két osztálya van. Tegyük fel, hogy csak kettő, és mondjuk az egyikbe eső x csúcsból megy él a másikba eső y-ba. Ez - az osztályokat megintcsak multiplicitással számolva - adja, hogy x osztályából (legyen ez X) y-éba (legyen ez Y) legalább 8 él mutat. Ha Y-ból nincs X-be menő él, akkor az X elemeit x-be, az Y elemeit y-ba vivő leképezés retrakció. Amennyiben van Y-ból X-be él, akkor legalább 8 van, és ha egy $x' \in X, y' \in Y$ párra $(x', y'), (y', x') \in E(G)$, akkor az X elemeit x'-be, Y elemeit y'-be vivő leképezés retrakció. Ha pedig nincsen ilyen x' és y', az csak egyféleképp lehetséges: az $a \to b$-ből adódó $a, f_1(a) \to b, f_2(b)$ (ezen azt értjük, hogy az első kettő mindegyikéből megy él a másik kettő mindegyikébe), és $f_2(a), f_1 f_2(a) \to f_1(b), f_1 f_2(b)$ melletti élek G-ben $b, f_2(b) \to f_2(a), f_1 f_2(a)$, valamint $f_1(b), f_1 f_2(b) \to a, f_1(a)$. Ekkor azonban szintén van retrakció G-ben: az a leképezés, ami $f_1(a)$-t a-ba, $f_2(b)$-t b-be, $f_1 f_2(a)$-t $f_2(a)$-ba, $f_1 f_2(b)$-t $f_1(b)$-be viszi, a többi csúcsot pedig fixen hagyja.

Úgy tűnhet, ez a gondolatmenet folytatható azokban az esetekben, amikor G-nek több osztálya van, de már a 3 osztályú esetnél elakadunk egy olyan gráfnál, amelyben minden osztályból mindegyikbe pontosan 8 él megy:

Legyen G_0 az a gráf, melynek 12 csúcsa van:

$$a, f_1(a), f_2(a), f_1 f_2(a), b, f_1(b), f_2(b), f_1 f_2(b), c, f_1(c), f_2(c), f_1 f_2(c),$$

valamint a következő éleket, és csak ezeket tartalmazza:

1. $a, f_2(a) \to b, f_1(b)$
2. $f_1(a), f_1 f_2(a) \to f_2(b), f_1 f_2(b)$
3. $b, f_2(b) \to a, f_1(a)$
4. $f_1(b), f_1 f_2(b) \to f_2(a), f_1 f_2(a)$
5. $a, f_2(a) \to f_2(c), f_1 f_2(c)$
6. $f_1(a), f_1 f_2(a) \to c, f_1(c)$
7. $c, f_2(c) \to a, f_1(a)$
8. $f_1(c), f_1 f_2(c) \to f_2(a), f_1 f_2(a)$
9. $b, f_2(b) \to c, f_1(c)$
10. $f_1(b), f_1 f_2(b) \to f_2(c), f_1 f_2(c)$
11. $c, f_2(c) \to b, f_1(b)$
12. $f_1(c), f_1 f_2(c) \to f_2(b), f_1 f_2(b)$

Ez az irányított gráf ellenpélda lesz sejtésünkre (mindkét változatra).

3.12. Állítás. *[] G_0-nak nincs retrakciója.*

Bizonyítás. Legyen

$$A = \{a, f_1(a), f_2(a), f_1 f_2(a)\},\ B = \{b, f_1(b), f_2(b), f_1 f_2(b)\},\ C = \{c, f_1(c), f_2(c), f_1 f_2(c)\}$$

a három adódó osztály. G_0 teljesíti a következőket (erős élnek nevezünk egy (x, y) élt, ha (y, x) is él):

1. Az osztályokon belül nincs él.
2. Minden A-beli csúcs ki- és be-halmazában egyaránt két B-beli csúcs van, ezekből egy a közös. Ugyanez igaz bármely két különböző osztályra.
3. Az erős élek bármely két osztály között egy párosítást adnak, az egész gráfon pedig egy Hamilton-kört. Ugyanez igaz a komplementergráf erős éleire, speciálisan nincs három G_0-beli csúcs úgy, hogy páronként különböző osztályban lennének, és üres részgráfot feszítenének.

Tegyük most fel, hogy r retrakció G_0-n. Ha r egy B-beli csúcsot egy A-belibe visz, akkor ez a két csúcs között nem lehet él vagy visszaél, hiszen ez azt jelentené, hogy G_0-ban (az A-beli csúcsnál) hurokél van, ami ellentmond az első tulajdonságnak. Így a harmadik tulajdonság miatt minden más csúcs szomszédja ezen kettő valamelyikének, tehát a többi csúcs képe nem lehet A-beli. Ez igaz speciálisan A másik három csúcsára is, aminek közül kettőnek a képe ugyanabba az osztályba kell essen (ami nem A), ami lehetetlen, hiszen ahogy A-beli sem lehetett egynál több nem A-beli csúcs képe, ugyanez igaz B-re és C-re is. Ugyanezt a többi osztálypárra felírva adódik, hogy r semelyik csúcsot nem viheti át másik osztályba. Egy homomorfizmus erős élt természetesen erős élbe visz, tehát r az erős élekből álló Hamilton-kör éleit a kör (esetleg más) éleibe kell, hogy vigye. Legyen $x_1 \in G_0$ egy olyan csúcs, amelyik része r képének, ekkor $r(x_1) = x_1$. Tegyük fel, hogy (például) x_1 A-beli. Legyen x_2 a B-beli szomszédja a Hamilton-körben, ekkor $r(x_2)$ B-beli, és x_1 szomszédja a Hamilton-körben, tehát $r(x_2) = x_2$. Hasonlóan, ha x_3 az x_2 C-beli szomszédja a Hamilton-körben, $r(x_3) = x_3$, és ezzel a módszerrel adódik, hogy r az identitás, ami ellentmond annak, hogy retrakció. □

Megjegyezzük, hogy bár a G_0 ellenpéldát egy négyelemű, nyolcélű N gráf vizsgálatából nyertük, nem láttuk be, hogy G_0-hoz ez az N tartozik, nem egy bővebb. ($id, f_1, f_2, f_1 f_2$ természetesen részei $id_{\to} \cap id_{\leftarrow}$-nek, ez azonban további leképezéseket is tartalmazhat - de az előző tétel és 3.8 szerint csak bijektíveket).

Megemlítjük továbbá, hogy a sejtés (valamelyik változatban) igaz lehet bizonyos további konkrét a-k esetén (mint ahogy $a = 1$-re az), de ez valószínűtlennek tűnik. A konkrét N esete más kérdés, lehetségesnek tűnik, hogy bizonyos (előforduló) N-ek is garantálják a retrakció létezését ($id_{\to} \cap id_{\leftarrow}$-ben vagy G^G-ben). Itt meg kell különböztetni, hogy N-et csak az élstruktúra, csak a csoportstruktúra, vagy mindkettő erejéig adtuk meg.

Az előzőekben $id_{\to} \cap id_{\leftarrow}$-ben kerestünk retrakciót, most az ennél bővebb $id_{\to}$-ra térünk át. Itt nem lesz elegendő, hogy ez a halmaz tartalmazzon nem bijektív elemet, egy további feltételre lesz szükség.

3.13. Tétel. *[] Tegyük fel, hogy $id_{\rightarrow}$ nem csak bijekciókat tartalmaz, valamint hogy egy minimális rangú elemének van ki-éle. Ekkor $id_{\rightarrow}$-ben van retrakció.*

Bizonyítás. Bevezetjük a következő jelöléseket:$|G| = n$, továbbá tetszőleges $H_1, H_2 \subseteq G$ esetén $E(H_1 \to H_2) := \{(a,b) \in E(G) |\, a \in H_1, b \in H_2\}$, továbbá $E(H_1) := E(H_1 \to H_1)$.

3.14. Lemma. *[] Választhatunk $g_1, g_2, \ldots, g_k, f_0, f_1 \in G^G$ elemeket (k nem rögzített, akár 0 is lehet) a következő feltételek szerint:*

1. *Teljesül $id \to g_1 \to g_2 \to \cdots \to g_k \to f_0 \to f_1$.*
2. *$g_1, g_2, \ldots, g_k, f_0, f_1$ mindegyike idempotens.*
3. *f_0 rangja minimális $id_{\rightarrow}$-ban.*
4. *f_1 rangja minimális $id_{\rightarrow}$-ban.*
5. *A fenti négy feltétel mellett $|E(f_0(G))|$ maximális.*

Bizonyítás. A tétel feltétele szerint $g_1, g_2, \ldots, g_k, f_0, f_1$ választhatóak úgy, hogy kielégítsék az 1. és a 3. feltételeket. Ennek a relációsornak a jobbfelszorzottja kielégíti az 1. és a 3. mellett a negyediket is (szorzat rangja nem lehet nagyobb egyik tényezője rangjánál sem), ez utóbbi idempotens felhatványozása pedig még a másodikat is. Az első négy feltételnek eleget tevő relációsorok között nyilván van olyan, amelynél $|E(f_0(G))|$ maximális. $\square$

Legyen $G_0 := f_0(G), G_1 := f_1(G)$, ahol a $g_1, g_2, \ldots, g_k, f_0, f_1$ leképezéseket úgy választottuk, hogy kielégítsék a fenti lemma állításait.

3.15. Lemma. *[] $|E(G_0)| \leq |E(G_0 \to G_1)|$*

Bizonyítás. f_1 injektív G_0-on, különben $rang(f_1 f_0 g_k \ldots g_1) \leq rang(f_1 f_0) = |f_1(G_0) < |G_0| = rang(f_0)$, ez $f_1 f_0 g_k \ldots g_1(G) \in id_{\rightarrow}$ miatt ellentmond a 3. feltételnek. f_0 idempotens, így az $(a,b) \mapsto (f_0(a), f_1(b)) = (a, f_1(b))$ leképezés injektív $E(G_0)$-ból $E(G_0 \to G_1)$-be. $\square$

3.16. Lemma. *[] $|E(G_0 \to G_1)| \leq |E(g_1 g_2 \ldots g_k(G_0))|$*

Bizonyítás. $g_1 g_2 \ldots g_k$ injektív G_0-on, $g_1 g_2 \ldots g_k f_0$ injektív G_1-en, különben a jobb-felszorzott $id \to g_1 \to g_1 g_2 \to \cdots \to g_1 g_2 \ldots g_k \to g_1 g_2 \ldots g_k f_0 \to g_1 g_2 \ldots g_k f_0 f_1$ relációsor ellentmond a 3., illetve a 4. pontoknak. Így az $(a,b) \mapsto (g_1 g_2 \ldots g_k(a), g_1 g_2 \ldots g_k f_0(b))$ leképezés injektív $E(G_0 \to G_1)$-ből $E(g_1 g_2 \ldots g_k(G_0))$-be. $\square$

$id \to g_1 \to g_1 g_2 \to \cdots \to g_1 g_2 \ldots g_k \to g_1 g_2 \ldots g_k f_0$ idempotens felhatványozása teljesíti az első négy feltételt, ebből következően $|E(g_1 g_2 \ldots g_k(G_0))| \leq |E(G_0)|$. Ezt összevetve a fenti két lemmával adódik $|E(G_0)| = |E(G_0 \to G_1)|$, vagyis az $E(G_0) \mapsto E(G_0 \to G_1)$, $(a,b) \mapsto (f_0(a), f_1(b)) = (a, f_1(b))$ leképezés szürjektív is.

f_1 bijektív G_0-on, így létezik $(f_1|_{G_0})^{-1}$, melynek képe G_1, legyen $f^* = (f_1|_{G_0})^{-1} f_1$. Most f^* G_0-ba képez, és ott identikus, ezért $f^* f_0 = f_0$. Tetszőleges $(a,b) \in E(G)$-re

$f_0 \to f_1$ miatt $(f_0(a), f_1(b)) \in E(G_0 \to G_1)$, a fentiek miatt pedig ebből $(f_0(a), f^*(b)) \in E(G_0)$ következik, hiszen a fentiek szerint $(f_0(a), f^*(b)) \in E(G_0) \Leftrightarrow (f_0(a), f_1(f^*(b)) = (f_0(a), f_1(b)) \in E(G_0 \to G_1))$. Tehát $f_0 \to f^*$, és $id \to g_1 \to g_2g_1 \to \cdots \to g_k \dots g_2g_1 \to f_0g_k \dots g_2g_1 \to f^*f_0g_k \dots g_2g_1 = f_0g_k \dots g_2g_1$, vagyis $f_0g_k \dots g_2g_1 \in id_{\to}$ homomorfizmus.

□

4. fejezet

Összefüggőség

Ebben a fejezetben G^G, illetve a korábban vizsgált (és még egy, eddig nem bevezetett) részfélcsoportjai összefüggőségének esetét, az összefüggőség feltételeit vizsgáljuk. A 3.4 tétel és az azt követő diszkusszió alapján az $Aut(G)$ esete egyszerűen kezelhető:

4.1. ***Állítás.*** *[] $Aut(G)$ akkor és csak akkor összefüggő, ha G minden f automorfizmusára és x csúcsára $Be(f(x)) = Be(x)$ és $Ki(f(x)) = Ki(x)$*

$Aut(G)$ összefüggősége egy gyenge feltétel, hiszen nemtriviális automorfizmus létezése egy gráfon már önmagában is viszonylag ritka (bebizonyítható, hogy az n csúcsú irányított gráfok közt azok aránya, amelyek tartalmaznak nemtriviális automorfizmust, tart a 0-hoz, ha n tart a végtelenhez).

G^G összefüggősége viszont egy nagyon erős feltétel:

4.2. ***Tétel.*** *[] Legyen $|G| = n \geq 6$. G^G akkor és csak akkor összefüggő, ha G üres, vagy van olyan csúcsa, melynek be- vagy ki-foka n.*

Bizonyítás. Amennyiben van ilyen csúcs (legyen ez a), akkor az a $G \to G$ leképezés, ami mindent ebbe a csúcsba visz (c_a), G^G összes elemével szomszédos, hiszen ha például $b \to a$ minden $b \in V(G)$ esetén, akkor tetszőleges $c \to d$ csúcsokra és $f \in G^G$-re fennáll $f(c) \to c_a(d) = a$, így $f \to c_a$ is.

Ha G üres, akkor G^G teljes.

Tegyük most fel, hogy nincs ilyen csúcs, és G nemüres.

Legyen k_{be}, illetve k_{ki} G csúcsainak maximális be- illetve ki-foka, valamint h_{be}, illetve h_{ki} a maximális be- illetve ki-fokú csúcsok száma. Legyen továbbá p_{be}, illetve p_{ki} $Sym(G)$ elemei közül azoknak az aránya, melyeknek van be- illetve ki-élük G^G-ben. Ha $p_{be}+p_{ki} \leq 1$, akkor tehát G^G-nek van izolált pontja, így nem összefüggő. ($id \to id$ miatt id-nek be- és ki-éle is van.)

Legyen most a G-nek maximális ki-fokú csúcsa, a ki-halmaza pedig $\{b_1, b_2, \ldots, b_{k_{ki}}\}$. Ha most $f \to g$ G^G-ben, ahol $g \in Sym(G)$, teljesül az, hogy $g(b_1), g(b_2), \ldots, g(b_{k_{ki}})$ egyaránt benne vannak $f(a)$ ki-halmazában. Ez csak úgy lehet, hogy egy maximális ki-fokú csúcs ki-halmazát alkotják. Ahhoz tehát, hogy egy $g \in Sym(G)$-nek legyen be-éle, szükséges, hogy ezt a k_{ki} elemszámú halmazt (amelyet $Sym(G)$ elemei $\binom{n}{k_{ki}}$ számú halmazba visznek - méghozzá egyenlő számban) egy ilyen ki-halmazba vigyék. Mivel ezek száma legfeljebb h_{ki}, adódik $p_{be} \leq \frac{h_{ki}}{\binom{n}{k_{ki}}}$, és hasonlóan $p_{ki} \leq \frac{h_{be}}{\binom{n}{k_{be}}}$.

Amennyiben $2 \leq k_{ki} \leq n-2$, $n \geq 6$ miatt $\frac{h_{ki}}{\binom{n}{k_{ki}}} \leq \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} < \frac{1}{2}$, tehát ha $2 \leq k_{ki} \leq n-2$ és $2 \leq k_{be} \leq n-2$ is teljesül, G^G nem összefüggő. Figyeljük meg, hogy feltevésünk kizárja, hogy akár k_{be}, akár k_{ki} 0 vagy n legyen.

A továbbiakban k_{be} és k_{ki} értéke szerint öt esetet különböztetünk meg.

1. eset: $k_{be} = k_{ki} = 1$. Amennyiben van olyan csúcs, aminek nincs ki-éle (mondjuk a), és olyan is, melynek nincs be-éle (mondjuk b), tekintsünk egy tetszőleges $c \to d$ élet és egy olyan $f \in G^G$ leképezést, melyre $f(c) = a$, és $f(d) = b$. Ekkor f izolált: $f \to g$ esetén $a \to g(d)$, $g \to f$ esetén $g(c) \to b$ állna. Hogyha viszont G-ben minden csúcsnak van (például) ki-éle, akkor $k_{ki} = 1$ miatt pontosan 1 van, így a gráfban összesen n él van, ezért $k_{be} = 1$ miatt mindegyik csúcs be-foka is 1 (vagyis G irányított körök diszjunkt uniója). Ekkor pedig az identitás izolált: $id \to g$ esetén bármely $y \in G$-re $\exists! \, x \in G : x \to y$, így $x \to g(y)$, $|Ki(x)| = 1$ miatt $g(y) = y$, tehát $g = id$. ($g \to id$ analóg.)

2. eset: $k_{be} = k_{ki} = n-1$. Tegyük fel, hogy $f \in Sym(G)$-nek van ki-éle G^G-ben, ekkor f a maximális méretű ($n-1$ elemű) be-halmazokat maximális be-halmazokba viszi. Nevezzük kimaradó csúcsoknak azokat, amelyek nem tartoznak bele (legalább) egy ilyen maximális méretű be-halmazba. Mivel f bijektív, a kimaradó csúcsokat kimaradó, a nem kimaradókat nem kimaradó csúcsokba viszi. Ha s a kimaradó csúcsok száma, akkor az ennek a feltételnek eleget tevő leképezések száma $s!(n-s)!$, így $p_{ki} \leq \frac{s!(n-s)!}{n!}$. $1 \leq s \leq n-1$ esetén ebből $p_{ki} \leq \frac{1}{2}$ következik, $s = 0$ nem lehetséges, $s = n$ esetén pedig $h_{be} = n$.

Analóg módon $p_{be} \leq \frac{1}{2}$ vagy $h_{ki} = n$ teljesül. Ha $p_{be} \leq \frac{1}{2}$, és $p_{ki} \leq \frac{1}{2}$, akkor G^G nem összefüggő, $h_{ki} = n$ és $h_{be} = n$ bármelyike pedig $k_{be} = k_{ki} = n-1$ miatt maga után vonja a másikat (mindkettő ekvivalens azzal, hogy G-nek $n^2 - n$ éle van). Ez utóbbi esetben az identitás izolált: $id \to g$ esetén bármely $y \in G$-re legyen $Be(y) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$, amiből $Be(g(y)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. Ha x_n G (egyetlen) olyan csúcsa, melyre $x_n \not\to y$, akkor $x_n \not\to g(y)$ is teljesül, $|Ki(x_n)| = n-1$ miatt így $y = g(y)$. Tehát $g = id$. ($g \to id$ esete analóg.)

3. eset: $k_{be} = 1$, $k_{ki} = n-1$ (vagy fordítva). Ekkor G-ben legfeljebb n él van, amiből rögtön következik $h_{ki} = 1$, és $p_{be} \leq \frac{1}{n}$. Ha $a \to b$ G-ben, $c \in G$-nek nincs ki-éle G-ben és $f \in G^G$-re $f(a) = c$, akkor f-nek nincs ki-éle G^G-ben ($f \to g$-ből $c \to g(b)$ következne). Mivel G-ben legfeljebb n él van, és egy csúcs ki-foka $n-1$, legalább $n-2$ csúcsnak nincs ki-éle. Eszerint $p_{ki} \leq \frac{2}{n}$, $p_{be} + p_{ki} < 1$, G^G nem összefüggő.

4. eset: $k_{be} = n-1$, $2 \leq k_{ki} \leq n-2$ (vagy fordítva). Ekkor a bizonyítandóhoz elégséges

$p_{be} + p_{ki} \leq 1$ egyenlőtlenséghez $p_{be} \leq \frac{h_{ki}}{\binom{n}{k_{ki}}}$ és $p_{ki} \leq \frac{h_{be}}{\binom{n}{k_{be}}}$ alapján elég, hogy $h_{be} + \frac{2h_{ki}}{n-1} \leq n$ teljesüljön. Ez az egyenlőtlenség csak akkor nem teljesül, ha $h_{be} \geq n-1$, vagy $h_{be} = n-2$, és $h_{ki} = n$. Előbbi lehetetlen, ugyanis implikálja, hogy legalább $n^2 - 2n + 1$ él van G-ben, ami ellentmond $k_{ki} \leq n-2$-nek. Utóbbi esetből hasonló okból következik $k_{ki} = n-2$. Ekkor G-ben pontosan $n(n-2)$ él van, $n-2$ csúcs be-foka $n-1$, a maradék kettő be-fokainak összege így $n-2$.

Tekintsünk egy tetszőleges $a \in G$ csúcsot, annak $n-2$ elemű ki-halmazát, egy olyan csúcsot, ami nem tartozik ebbe a ki-halmazba, de van be-éle (a fentiek szerint legfeljebb egy olyan csúcs van, aminek nincs be-éle, tehát található ilyen csúcs), végül ezen csúcs be-halmazának egy tetszőleges b elemét. Ekkor a és b olyan csúcsok, melyek ki-halmazai különbözőek, metszetük $n-3$ vagy $n-4$ elemű. Ha egy $f \in Sym(G)$-nek van be-éle G^G-ben, akkor ezeket a ki-halmazokat ki-halmazokba kell vinnie (ráadásul olyanokba, melyek metszetének ugyanannyi eleme van, mint a és b ki-halmazai metszetének). Az ilyen $Sym(G)$-beli leképezések száma felülről becsülhető $n(n-1)(n-3)!$-tal, illetve $4n(n-1)(n-4)!$-tal attól függően, hogy a ki-halmazok metszetének $n-3$ vagy $n-4$ eleme van (az első ki-halmaz képe az n ki-halmaz valamelyike, a másodiké a többi legfeljebb $n-1$ megfelelő módon metsző ki-halmaz valamelyike, a metszet elemei a metszet elemeibe mennek, a halmazkülönbégek elemei a megfelelő halmazkülönbségek elemeibe). Eszerint $p_{be} \leq \max(\frac{n(n-1)(n-3)!}{n!}, \frac{4n(n-1)(n-4)!}{n!}) \leq \frac{2}{n}$ (a második egyenlőtlenséghez kell az $n \geq 6$ feltevés). Mivel $p_{ki} \leq \frac{n-2}{n}$, G^G nem összefüggő.

5. eset: $k_{be} = 1$, $2 \leq k_{ki} \leq n-2$ (vagy fordítva). Ha $h_{be} \neq n$, akkor G-ben n-nél kevesebb él van, amiből az következik, hogy van G-ben olyan csúcs is, amelynek nincs be-éle, és olyan is, melynek nincs ki-éle. Az 1. esetnél láttuk, hogy ebből következik, hogy G^G nem összefüggő.

Legyen most $h_{be} = n$, ekkor n él van G-ben. $k_{ki} \neq 1$ miatt van olyan csúcs, melynek nincs ki-éle. Azon $Sym(G)$-beli leképezéseknek (számuk $(n-1)!$), melyek egy (adott) csúcsot, melynek van ki-éle, egy olyan adottba visznek, melynek nincs, G^G-beli ki-élük nincs, ezért $p_{ki} \leq \frac{n-1}{n}$. $h_{ki} \leq \frac{n-1}{2}$ esetén $p_{be} \leq \frac{2h_{ki}}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n}$, így adódik a bizonyítandóhoz elégséges $p_{be} + p_{ki} \leq 1$ egyenlőtlenség. $h_{ki} > \frac{n-1}{2}$ viszont csak akkor állhat fenn, ha $h_{ki} = \frac{n}{2}$ (hiszen $2 \leq k_{ki}$ és G-ben n él van), ekkor a $p_{be} \leq \frac{1}{n-1}$ egyenlőség adódik, de mivel ekkor $\frac{n}{2}$ csúcs van G-ben, amelynek nincs ki-éle, a fenti módon $p_{ki} \leq \frac{1}{2}$ adódik, és ezzel készen vagyunk. □

A bizonyításból kitűnik, hogy amikor G^G nem összefüggő, akkor van benne egy izolált $Sym(G)$-beli elem, tehát $Sym(G)$ sem összefüggő. Fordított irányú implikáció azonban nincs: bár nyilván ha G teljes, akkor $Sym(G)$ is teljes és ezért összefüggő, abból, hogy van egy $|G|$ ki-fokszámú (vagy be-fokszámú) pont, csak az következik, hogy $Sym(G)$ elemei úttal összeköthetőek egy konstans leképezésen át, az nem, hogy $Sym(G)$-n belül is. Az a kétcsúcsú (a,b) gráf melynek két éle van: $(a,b),(b,b)$, mutatja, hogy G^G lehet összefüggő anélkül, hogy $Sym(G)$ az lenne. (Az $n=2$ esetre ugyan a 4.2 tétel nem vonatkozik, tehát arra nem feltétlen igaz, hogy ha G^G összefüggő, akkor $Sym(G)$ is az, de hasonló példa adható nagyobb n-re is: egy n be-fokú csúcsot adjunk hozzá egy $n-1$ csúcsú, megfelelően aszimmetrikus gráfhoz).

Bevezetjük G^G egy új részfélcsoportját.

4.3. Definíció. *[] Egy $t: G^n \mapsto G$ homomorfizmust G n-változós* polimorfizmusának *nevezzük. Egy $f \in G^G$ leképezést* polinomnak *nevezünk, ha van egy m természetes szám, egy olyan s m-változós polimorfizmus, és $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} \in G$ csúcsok, hogy minden $x \in G$ esetén $f(x) = s(x, a_1, \ldots, a_{m-1})$. A polinomok által feszített G^G-beli részgráfot $Pol(G)$-vel jelöljük.*

A homomorfizmusok tehát (1-változós polimorfizmusokból származó) polinomok, vagyis $Hom(G) \subseteq Pol(G)$. A tartalmazás lehet valódi: minden $a \in G$ csúcsra a c_a konstans leképezés polinom, ugyanis ha $\pi_2 : G^2 \mapsto G, \pi_2(x,y) = y$ a kétváltozós projekció a második koordinátára, akkor π_2 polimorfizmus, és így $c_a(x) = a = \pi_2(x,a)$ miatt c_a polinom. A konstans leképezések ellenben csak abban az esetben mind homomorfizmusok, ha G reflexív, vagyis minden csúcsánál hurokél van.

4.4. Állítás. *[] Pol(G) részfélcsoportja G^G-nek.*

Bizonyítás. Legyenek f_1 és f_2 polinomok, ekkor vannak olyan s_1 és s_2, m_1, illetve m_2 változós polimorfizmusok és $a_1, \ldots, a_{m_1-1}, b_1, \ldots, b_{m_2-1} \in G$ elemek, melyekre $f_1(x) = s_1(x, a_1, \ldots, a_{m_1-1})$ és $f_2(x) = s_2(x, b_1, \ldots, b_{m_2-1})$. Ekkor

$$f_1 f_2(x) = s_1(s_2(x, b_1, \ldots, b_{m_2-1}), a_1, \ldots, a_{m_1-1}),$$

tehát $f_1 f_2$ polinom, mert

$$s_3(x_0, x_1, \ldots, x_{m_1+m_2-2}) := s_1(s_2(x_0, x_1, \ldots, x_{m_2-1}), x_{m_2}, \ldots, x_{m_1+m_2-2})$$

egy $m_1 + m_2 - 1$-változós polimorfizmus: ha $(x_i, y_i) \in E(G)$ minden $0 \leq i \leq m_1 + m_2 - 1$ esetén, akkor $s_2(x_0, x_1, \ldots, x_{m_2-1}) \to s_2(y_0, y_1, \ldots, y_{m_2-1})$, hiszen s_2 polimorfizmus, és így

$$s_1(s_2(x_0, x_1, \ldots, x_{m_2-1}), x_{m_2}, \ldots, x_{m_1+m_2-2}) \to$$
$$s_1(s_2(y_0, y_1, \ldots, y_{m_2-1}), y_{m_2}, \ldots, y_{m_1+m_2-2}),$$

mivel s_1 is polimorfizmus. □

A 4.2 tétel bizonyításában láttuk, hogy ($|G| \geq 6$-ra) G^G azokban az esetekben, amikor nem volt összefüggő, izolált csúcsot tartalmazott, így nem volt sima sem. A következő tétel mutatja, hogy $Pol(G)$ nem ilyen, feltéve, hogy G maga sima.

*4.5. **Tétel.** [] $Pol(G)$ akkor és csak akkor sima, ha G sima, vagy üres.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy G sima. Legyen $s(x, a_1, \ldots, a_{m-1})$ tetszőleges polinom (ahol s polimorfizmus). G simasága miatt vannak olyan $b_1, \ldots, b_{m-1} \in G$ csúcsok, melyekre $a_1 \to b_1, \ldots, a_{m-1} \to b_{m-1}$, ekkor $s(x, a_1, \ldots, a_{m-1}) \to s(x, b_1, \ldots, b_{m-1})$ teljesül G^G-ben, tehát a polinomnak van ($Pol(G)$-beli) ki-éle. Ugyanígy belátható, hogy van be-éle is, így $Pol(G)$ sima.

Ha G üres, akkor G^G teljes, így $Pol(G)$, mint G^G feszített részgráfja, sima.

Legyen most $Pol(G)$ sima, és $a \in G$. A c_a konstans függvény polinom, hiszen $c_a(x) = \pi_2(x, a)$, ezért van olyan $p(x) = s(x, a_1, \ldots, a_{m-1})$ polinom, melyre $c_a \to p$. Ha G nemüres, akkor van benne egy $b_1 \to b_2$ él, erre pedig $a = c_a(b_1) \to p(b_2)$, vagyis a-nak van ki-éle G-ben. Analóg módon, ha G nemüres, a-nak van be-éle is. Így G sima vagy üres. □

Ez a tétel egy kapcsolatot ad $Pol(G)$ és $Sm(G)$ között. A kettő összefüggősége között is kapcsolat van.

4.6. Definíció. *[]Egy t k-változós polimorfizmust G-n k-*többségi polimorfizmusnak *nevezünk, ha G bármely x csúcsára, ha az $x_1, \ldots, x_k$ csúcsok közül legalább $k-1$ megegyezik x-szel, akkor $t(x_1, \ldots, x_k) = x$. A 3-többségi polimorfizmusokat egyszerűen* többséginek *nevezzük.*

*4.7. **Állítás.** [] Ha $3 \leq k_1 \leq k_2$, és G-n van k_1-többségi polimorfizmus, akkor van rajta k_2-többségi is.*

Bizonyítás. Ha t k_1-többségi polimorfizmus, akkor legyen

$$t' : G^{k_2} \mapsto G,\ t'(x_1, \ldots, x_{k_1}, x_{k_1+1}, \ldots, x_{k_2}) = t(x_1, \ldots, x_{k_1}),$$

ez k_2-többségi polimorfizmus lesz. □

*4.8. **Tétel.** [] Tegyük fel, hogy G sima. Ekkor ha $Pol(G)$ összefüggő, akkor $Sm(G)$ is az. Amennyiben G-n van egy t többségi polimorfizmus, akkor az állítás megfordítása is igaz.*

Bizonyítás. Mivel G sima, $Pol(G)$ is az, így része $Sm(G)$-nek. $Pol(G)$ összefüggőségéből következik, hogy van benne egy út id és c_a között (tetszőleges $a \in G$-re). Legyen $f \in Sm(G)$ tetszőleges. Ekkor van egy ezzel azonos típusú, f-ből induló út $Sm(G)$-ben. Ennek a két útnak az összeszorzásából egy olyan, $Sm(G)$-beli út adódik, amely f-et c_a-val köti össze (hiszen c_a balzéró). Ilyen mód $Sm(G)$ tetszőleges eleméből van út c_a-ba, tehát $Sm(G)$ összefüggő.

Tegyük most fel, hogy $Sm(G)$ összefüggő. A G^G konstans leképezései által feszített részgráf izomorf G-vel (hiszen $c_a \to c_b \Leftrightarrow a \to b$, feltéve, hogy a gráf nemüres, ami itt teljesül, mert sima), ezért a konstans leképezések részei $Sm(G)$-nek, ahogy $id \to id$ miatt az identitás is, van tehát az identitást egy c_a-val összekötő út $Sm(G)$-ben. Legyen $b \in G$ tetszőleges, tekintsünk egy b-ből induló, az előzővel azonos típusú utat G-ben (ilyen van, mert G sima). Erre az útra alkalmazva az előbbi (G^G-beli) utat, adódik egy b-t a-val összekötő, azonos típusú út G-ben. Ugyanez G többi csúcsára is megtehető, amiből adódik, hogy G-ben minden csúcsból út vezethető a-ba ugyanolyan típusú módon. Legyen ezen utak (közös) hossza k, és jelöljük az utak elemeit úgy, hogy minden $b \in G$ esetén az adódó út $b = b^{(0)} \sim b^{(1)} \sim \cdots \sim b^{(k-1)} \sim b^{(k)} = a$ legyen.

Az identitás nyilvánvalóan eleme $Pol(G)$-nek, mert homomorfizmus, ezúttal azonban más polimorfizmusból állítjuk elő. Ehhez először soroljuk fel G csúcsait: legyenek ezek $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A $t(x, v_i, v_j)$ egy olyan polinom, mely a $\{v_i; v_j\}$ halmazon megegyezik az identitással. Ezekből rekurzívan építünk olyan polinomokat, melyek egyre nagyobb halmazokon egyeznek meg az identitással: tegyük fel, hogy $2 \leq m < n$ olyan, hogy minden, legfeljebb m elemű csúcshalmazra megadtunk egy polinomot, mely ott megegyezik az identitással, ezekből kiindulva minden $m+1$ elemű csúcshalmazra is megadunk ilyen polinomot. Vegyünk tehát egy tetszőleges $m+1$ elemű csúcshalmazt (az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez $\{v_1; v_2; \ldots; v_{m+1}\}$), és legyen minden $1 \leq i \leq m+1$-re f_i az a polinom, ami megegyezik az identitással a $\{v_1; \ldots; v_{i-1}; v_{i+1}; \ldots; v_{m+1}\}$ halmazon. Ekkor ha t_{m+1} egy $(m+1)$-többségi polimorfizmus G-n (ami van, hiszen 3-többségi is van), akkor $g := t_{m+1}(f_1, \ldots, f_{m+1})$ egy olyan leképezés, ami megegyezik az identitással $\{v_1; v_2; \ldots; v_{m+1}\}$)-en, hiszen bármely $1 \leq j \leq m+1$-re $f_1(v_j), \ldots, f_{m+1}(v_j)$ közül legfeljebb egy ($f_j(v_j)$) nem egyenlő v_j-vel, így $g(v_j) = t_{m+1}(f_1, \ldots, f_{m+1})(v_j) = v_j$. g polinom: az f_i-k ugyanis azok, így $f_i(x) = h_i(x, d_{i,1}, \ldots, d_{i,s_i})$ valamely h_i ((s_i+1)-változós) polimorfizmusra és $d_{i,1}, \ldots, d_{i,s_i} \in G$ csúcsokra. A

$$\begin{aligned} h'(x, y_1, \ldots, y_{s_1+\cdots+s_{m+1}}) := t_{m+1}(&h_1(x, y_1, \ldots, y_{s_1}), \\ &h_2(x, y_{s_1+1}, \ldots, y_{s_1+s_2}), \ldots, h_{m+1}(x, y_{s_1+\cdots+s_m+1}, \ldots, y_{s_1+\cdots+s_{m+1}})) \end{aligned}$$

leképezés ugyanis könnyen ellenőrizhetően polimorfizmus, amibe $y_{s_1+\cdots+s_i+r} = d_{i+1,r}$ helyettesítéssel (itt $1 \leq r \leq s_{i+1}$) adódik a g leképezés.

A rekurzió végén az identitás (mint polinom) egy olyan $h(x, y_1, \ldots, y_s)$ polimorfizmusból adódik megfelelő $y_i = b_i$ helyettesítésekkel, mely $t(x, y_i, y_j)$ alakú polimorfizmusok szintén többségi polimorfizmusokkal való kompozícióival áll elő. Definiáljuk minden $1 \leq r \leq k$ esetén a p_r polinomot a következőképp: legyen $p_r(x) = h(x, b_1^{(r)}, \ldots, b_s^{(r)})$. Mivel a $b_i^{(0)}, b_i^{(1)}, \ldots, b_i^{(k)}$ csúcsok a különböző i-kre azonos típusú utakat alkotnak, a $p_0, \ldots, p_r$ polinomok ugyanilyen típusú utat alkotnak $Pol(G)$-ben (hiszen ha mondjuk minden i-re $b_i^{(q)} \leftarrow b_i^{(q+1)}$, akkot tetszőleges $(z_1, z_2) \in E(G)$ esetén $h(z_2, b_1^{(q)}, \ldots, b_s^{(q)}) \leftarrow h(z_1, b_1^{(q+1)}, \ldots, b_s^{(q+1)})$, mivel h polimorfizmus, tehát $p_{q+1}(z_2) \leftarrow p_q(z_1)$, így $p_{q+1} \leftarrow p_q$). A p_0 polinom nyilván megegyezik az identitással, a p_r pedig a c_a konstanssal, hiszen $t(x, b_i^{(k)}, b_j^{(k)}) = t(x, a, a) = a$ leképezésekből többségi polimorfizmusokkal való kompozíciókkal adódik, így maga is a c_a leképezés.

Tehát van id-ből c_a-ba menő út $Pol(G)$-ben. Legyen $p \in Pol(G)$ tetszőleges, p-ből indul ugyanilyen típusú út, hiszen $Pol(G)$ sima (mert G is sima). Ezeket az utakat összeszorozva egy p-ből c_a-ba menő utat kapunk, ami $Pol(G)$-beli, ugyanis $Pol(G)$ részfélcsoportja G^G-nek. Mivel $Pol(G)$-ben minden csúcs úttal összekötött a c_a csúccsal, $Pol(G)$ összefüggő. $\square$

A 4.8 tétel két lehetséges erősítése vetődik fel: szükséges-e a simasági feltétel (egyik vagy mindkét irányhoz), illetve elhagyható-e a többségi polimorfizmus létezése a megfordítás feltételei közül? Megmutatjuk, hogy utóbbi kérdésre a válasz nemleges.

A következő állítás azt mutatja, hogy G egy tulajdonsága maga után vonja $Pol(G)$-nek egy majdnem megegyező tulajdonságát.

4.9. Állítás. *[] Ha G minden x csúcsára vannak olyan $x^{(1)}, x^{(2)}$ csúcsok, hogy*

$$(x, x^{(1)}), (x, x^{(2)}), (x^{(1)}, x^{(2)}) \in E(G)$$

(vagyik minden ki-halmaz nemüres részgráfot feszít), akkor minden $p \in Pol(G)$-re van p ki-halmazában homomorfizmus, vagy $|Ki(p)| \geq 2$.

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló abban az esetben, ha p homomorfizmus (p része a saját ki-halmazának). Amennyiben p egy $(n+1)$-változós polimorfizmusból adódik, tehát $p(x) = f(x, a_1, \ldots, a_n)$ az f polimorfizmusra és a_i csúcsokra, akkor léteznek olyan b_i és c_i csúcsok, hogy minden i-re $a_i \to b_i$, $a_i \to c_i$, $b_i \to c_i$. Ekkor a $q(x) := f(x, b_1, \ldots, b_n)$, $r(x) := f(x, c_1, \ldots, c_n)$ polinomokra fennáll $p \to q$, $p \to r$ és $q \to r$. Amennyiben $q = r$, $q \in Ki(p)$ homomorfizmus, egyébként $Ki(p)$ legalább kételemű. $\square$

Megjegyezzük, hogy az állítás feltétele meglehetősen gyenge: ha n elég nagy, az n csúcsú irányított gráfok döntő többsége kielégíti.

4.10. Lemma. *[] Tegyük fel. hogy a G irányított gráf, és benne az a, b, c, d, e csúcsok teljesítik a következő feltételeket:*

1. *Amennyiben $x \neq y \in G$ csúcsok úgy, hogy $\{x, y\} \neq \{a, b\}$ és $\{x, y\} \neq \{c, d\}$, akkor $|Be(x) \setminus Be(y)| \geq 1$.*
2. *Minden $x \neq y$ csúcspárra teljesül $|Ki(x) \setminus Ki(y)| \geq 2$.*
3. *$Be(b) \subsetneq Be(a)$, és $Be(c) \triangle Be(d) = \{a, b\}$ úgy, hogy $a \in Be(d)$, $b \in Be(c)$.*
4. *b és c azok a csúcsok, amiknek be-halmaza tartalmazza b-t, de nem tartalmazza a-t.*
5. *Nincs olyan x csúcs, melyre $|Be(b) \setminus Be(x)| = 1$ teljesülne.*
6. *$(x, e) \in E(G) \Leftrightarrow x \notin \{b, c\}$*

Ekkor vannak olyan $f, g \in G^G$ leképezések, hogy $id \to f \to g \to c_e$, továbbá G^G-ben az identitásnak f az egyetlen szomszédja önmagán kívül, $Ki(f) = \{g\}$, és f be-halmaza csak az identitást tartalmazza.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $h_1 \in G^G$ olyan leképezés, melyre $id \to h_1$. Ekkor a 2.7 állítás alapján minden $x \in H$-ra $Be(x) \subseteq Be(h_1(x))$, amiből az 1. és 3. feltételek alapján következik, hogy $x \neq b$ esetén $h_1(x) = x$, valamint $h_1(b) \in \{a, b\}$ (hiszen a be-halmazok közül csak egyik tartalmaz egy másikat: $Be(a)$ $Be(b)$-t, és más be-halmazt az sem). Így h_1 vagy az identitás, vagy az a leképezés, ami minden csúcsot fixen hagy, kivéve a b-t, amit a-ba visz. Legyen ez utóbbi leképezés f.

Tegyük most fel, hogy h_2 szomszédja f-nek. Ha $h_2 \to f$, akkor a 2.7 állítás alapján $f(Ki(x)) \subseteq Ki(h_2(x))$ (minden x-re). Az $f(Ki(x))$ halmaz legfeljebb egy elemben tér el a $Ki(x)$ halmaztól, ami viszont a 2. feltétel miatt legalább két olyan elemet tartalmaz, ami nem része $Ki(h_2(x))$-nek - amennyiben $h_2(x) \neq x$. Ez ellentmondana $f(Ki(x)) \subseteq Ki(h_2(x))$-nek, így csak $h_2 = id$ lehetséges.

Ha $f \to h_2$, akkor, megint a 2.7 állítás miatt, $f(Be(x)) \subseteq Be(h_2(x))$ minden x csúcsra. Ha $x \neq b, c$, akkor a 4. feltétel miatt ebből $Be(x) \subseteq Be(h_2(x))$ következik, abból pedig $h_2(x) = x$, hiszen csak b be-halmaza része másik be-halmaznak. Az $x = c$ esetben $f(Be(x)) = Be(d)$, így az 1. feltétel miatt $h_2(c) = d$ következik. Ha $x = b$, akkor, mivel $f(Be(b))$ legfeljebb egy elemben tér el $Be(b)$-től, $|Be(h_2(b)) \setminus Be(b)| \leq 1$, tehát az 5. feltétel miatt $Be(b) \subseteq Be(h_2(b))$, amiből az 1. feltétel miatt $h_2(b) \in \{a, b\}$ következik. $h_2(b) = b$ nem lehetséges, mert belőle $f(Be(b)) \subseteq Be(b)$ következne, de a 4. feltétel és $f(b) = a$ miatt itt a jobb oldalnak nem eleme a, míg a bal oldalnak igen. Tehát h_2 csak az a leképezés lehet, ami fixen hagyja G elemeit, kivéve b-t, amit a-ba visz, és c-t, amit d-be visz. Legyen ez a leképezés g.

f és g így kielégíti a lemma állításait ($g \to c_e$ azért teljesül, mert g értékkészlete nem tartalmazza b-t és c-t, minden más csúcs pedig a 6. feltétel miatt része e be-halmazának). □

4.11. Tétel. *[] Létezik olyan sima G irányított gráf, melyre $Sm(G)$ összefüggő, de $Pol(G)$ nem az.*

Bizonyítás. Egy G_0 irányított gráf megadásával kezdjük, ennek a gráfnak 5 csúcsa van: a, b, c, d, e, élei pedig a következők:

$$\begin{aligned} E(G_0) = \{&(a,a),(a,d),(a,e),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),\\ &(c,a),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d),(d,e),(e,e)\} \end{aligned}$$

Ez a gráf teljesíti az előző állítás 3., 4. és 6. feltételeit, de az első kettőt és az ötödiket nem. Az állítás alkalmazhatóságához további csúcsokat adunk G_0-hoz: legyen G_1 egy olyan irányított gráf, amelyben bármely két különböző csúcs ki-, illetve be-halmazainak különbsége legalább háromelemű, továbbá minden csúcs ki- és be-fokszáma egyaránt nagyobb G_0 és G_1 csúcsszáma összegének felénél. Ilyen G_1 létezik (elég nagy csúcshalmazon könnyen konstruálható). G_1 csúcsainak válasszuk ki 7 olyan részhalmazát, hogy egyrészt mindegyik elemszáma nagyobb legyen G_0 és G_1 csúcsszáma összegének felénél, másrészt pedig ha hozzáadjuk ezeket G_1 ki- és be-halmazaihoz, bármely kettő különbsége továbbra is legalább háromelemű legyen. Amennyiben nem lehet így kiválasztani halmazokat, cseréljük le G_1-et (ha ez elég nagy, mindenképp lehetséges ilyen halmazokat megadni). Legyenek a kiválasztott halmazok: $H_1, H_2, \ldots, H_7$. G_0 és G_1 unióját egészítsük ki a következő élekkel: (y, a) és (y, b) minden $y \in H_1$-re, (y, c) és (y, d) minden $y \in H_2$-re, (y, e) minden $y \in G_1$-re, (a, y) minden $y \in H_3$-ra, (b, y) minden $y \in H_4$-re, (c, y) minden $y \in H_5$-re, (d, y) minden $y \in H_6$-ra, (e, y) minden $y \in H_7$-re. Legyen az így kapott gráf G.

G már teljesíti az állítás mind a hat feltételét, így G^G-ben az $id \to f \to g \to c_e$ egy az identitást egy konstanssal összekötő irányított út, tehát $Sm(G)$ összefüggő.

Mivel az identitásnak csak önmaga és f a szomszédja, minden az identitást egy konstanssal összekötő útnak tartalmaznia kell f-et (G^G-ben és $Pol(G)$-ben is). Így ha $Pol(G)$ összefüggő, $f \in Pol(G)$. G-ben minden csúcs fokszáma nagyobb G csúcsszámának felénél, így a 4.9 állítás feltétele teljesül (bármely x csúcsra és $y \in Ki(x)$-re $Ki(x) \cap Ki(y)$ nem lehet üres), vagyis $Ki(f) = \{g\}$ miatt (G^G-ben) g-nek homomorfizmusnak kell lennie. Ez azonban nem teljesül: (c, b) él, de $(g(c), g(b)) = (d, a)$ nem él. Így $Pol(G)$ sem összefüggő. □

Tegyük fel, hogy G-n van egy r retrakció, aminek képe $R = r(G)$, G r-hez tartozó retraktja (amit irányított gráfként tekintünk, nem csak csúcshalmazként). Tekintsük a következő leképezéseket: legyen $\phi : G^G \to R^R$, $\phi(f) = rf|_R$, és $\psi : R^R \to G^G$, $\forall x \in G$: $(\psi(h))(x) = h(r(x))$. A két leképezés tulajdonságait az alábbi lemmában foglaljuk össze:

4.12. Lemma. *[] A fent definiált ϕ és ψ leképezésre:*

1. $\phi\psi = id_{R^R}$
2. ϕ *és* ψ *homomorfizmusok*
3. $\phi(Hom(G)) = Hom(R)$, $\psi(Hom(R)) \subseteq Hom(G)$
4. $\phi(Sm(G)) = Sm(R)$, $\psi(Sm(R)) \subseteq Sm(G)$
5. $\psi(Pol(R)) \subseteq Pol(G)$

Bizonyítás. 1, Ha $h \in R^R$, akkor $\phi\psi(h) = rhr|_R = h$, mert $r|_R = id_R$, hiszen r idempotens.
2, Ha $f_1 \to f_2$ G^G-ben, akkor minden $(a, b) \in E(R) \subseteq E(G)$-re $f_1(a) \to f_1(b)$ és $r \to r$ miatt $rf_1(a) \to rf_2(b)$, tehát $\phi(f_1) = rf_1|_R \to rf_2|_R = \phi(f_2)$ (R^R-ben). Ha $h_1 \to h_2$ R^R-ben, akkor minden $(a, b) \in E(G)$ esetén $r(a) \to r(b)$, mert r homomorfizmus, és így $h_1r(a) \to h_2r(b)$, amiből G^G-ben $\psi(h_1) \to \psi(h_2)$.
3, Az előző pont szerint ϕ és ψ homomorfizmusok, így (G^G-, illetve R^R-beli) hurokéleket hurokélekbe, vagyis G-, illetve R-beli homomorfizmusokat homomorfizmusokba visznek. A $\phi(Hom(G)) \supseteq Hom(R)$ tartalmazás ezután abból következik, hogy az első pont szerint $\phi\psi(Hom(R)) = Hom(R)$.

4, Ez közvetlen következik az első két pontból az előzőhöz hasonlóan (homomorfizmus egy irányított gráf sima részét sima részbe kell, hogy vigyen).
5, Legyen s egy teszőleges $(m+1)$-változós polimorfizmus R-en. Ekkor $t(x_0, \ldots, x_m) = s(r(x_0), \ldots, r(x_n))$ könnyen ellenőrizhetően egy $(m+1)$-változós polimorfizmus G-n. Ha p egy s-ből adódó $p(x) = s(x, a_1, \ldots, a_n)$ polinom $Pol(R)$-ben (ahol minden i-re $a_i \in R$), akkor $(\psi(p))(x) = p(r(x)) = s(r(x), a_1, \ldots, a_n) = s(r(x), r(a_1), \ldots, r(a_n)) = t(x, a_1, \ldots, a_n)$ miatt $\psi(p)$ egy t-ből adódó polinom: $\psi(p) \in Pol(G)$. $\square$

A lemma alapján ha G^G, $Sm(G)$, illetve $Hom(G)$ összefüggőek, akkor rendre R^R, $Sm(R)$, illetve $Hom(R)$ is összefüggő: két tetszőleges R^R-beli (vagy $Sm(R)$-beli, vagy $Hom(R)$-beli) elem ψ melletti képei között van út G^G-ben ($Sm(G)$-ben, $Hom(G)$-ben), ezen út elemeinek ϕ melletti képei a két elem közti utat fognak alkotni R^R-ben ($Sm(R)$-ben, $Hom(R)$-ben). $Pol(G)$, $Aut(G)$, és $Sym(G)$ esetében ilyen következtetést nem tudunk levonni.

Most nézzük a fordított irányt: implikálja-e R^R, illetve valamelyik vizsgált részfélcsoportjának összefüggősége G^G, illetve megfelelő részfélcsoportja összefüggőségét? Általában nem: ha G tartalmaz hurokélt, akkor az abba képező konstans leképezés retrakció lesz, a retrakt pedig egyelemű, tehát rajta az összes részfélcsoport összefüggő - ellenben hurokél létezése nem összefüggőségi feltétel egyetlen vizsgált részfélcsoportra sem (ez nagyon könnyen meggondolható). Más a helyzet, ha megkötjük, hogy r-nek az identitás (megfelelő részfélcsoporthoz tartozó) komponensébe esik. Ez persze $Aut(G)$ és $Sym(G)$ esetében nem fordulhat elő. $Hom(G)$ esetében azonban megkapjuk a kívánt fordított irányú impikációt, de csak egy feltétellel.

4.13. Tétel. *[] Tegyük fel, hogy G tartalmaz hurokélt, r pedig egy retrakció az identitás $Hom(G)$-beli komponensében. Ekkor az $R = r(G)$ jelöléssel, $Hom(G)$ akkor és csak akkor összefüggő, ha $Hom(R)$ összefüggő.*

Bizonyítás. Csak az egyik irányt kell belátni: már láttuk, hogy $Hom(G)$ összefüggőségéből következik $Hom(R)$-é is. Tegyük tehát fel, hogy $Hom(R)$ összefüggő. Egy hurokéllel rendelkező csúcs homomorfizmus melletti képénél is van hurokél, vagyis R is tartalmaz hurokélt. Egy irányított gráfnak egy hurokéllel rendelkező csúcsába menő konstans leképezés homomorfizmus, tehát $Hom(R)$-ben van út az (R^R-beli) identitás és egy konstans c_a leképezés között. Ezen út elemeinek ψ melletti képei egy $Hom(G)$-beli utat fognak alkotni (hiszen ψ homomorfizmus, és homomorfizmusokat homomorfizmusokba visz) r és c_a között. Eszerint, mivel r a (G^G-beli) identitás komponensében van, van $Hom(G)$-beli út id és c_a között. Tetszőleges $f \in Hom(G)$ esetén, ennek az útnak az elmeit f-fel szorozva ($Hom(G)$-ben az élreláció szorzással kompatibilis) egy f és c_a közötti sétát kapunk. Tehát $Hom(G)$-ben minden csúcs úttal összeköthető c_a-val, vagyis $Hom(G)$ összefüggő. $\square$

Megjegyezzük, hogy a tétel feltétele erős: ha $Hom(G)$-ben van retrakció az identitás komponensében, akkor az oda az identitásból vezető út idempotens felhatványozottában csak retrakciók és az identitás szerepelnek, ami azt jelenti, hogy kell, hogy legyen retrakció $Be(id)$-ben vagy $Ki(id)$-ben is.

A tételnek van megfelelője másik két részfélcsoporton:

4.14. Tétel. *[] Ha r retrakció az identitás komponensében G^G-ben, $R = r(G)$ és $Sm(G)$-nek van konstans eleme, akkor $Sm(G)$ akkor és csak akkor összefüggő, ha $Sm(R)$ is az.*

Bizonyítás. A $Hom(G)$ esetére adott bizonyítás megismételhető azzal a változtatással, hogy az id_G és a c_a közti utat egy $f \in Sm(G)$ esetén nem tudjuk elemenként megszorozni f-fel, helyette összeszorozzuk egy f-ből induló (mindegy, hova menő) azonos típusú sétával ($Sm(G)$-ben ilyen van), ami az f és c_a közti sétát fogja eredményezni. Szükségünk van arra is, hogy ha $Sm(G)$ tartalmaz konstanst, akkor $Sm(R)$ is: ez azért teljesül, mert konstans leképezés ϕ melletti képe konstans, és $\phi(Sm(G)) = Sm(R)$. □

4.15. Tétel. *[] Ha r retrakció az identitás $Pol(G)$-beli komponensében, $R = r(G)$ és G sima, akkor amennyiben $Pol(R)$ összefüggő, akkor $Pol(G)$ is az.*

Bizonyítás. A 4.5 tétel alapján az előző bizonyítás a tétellel azonos iránya most is működik. □

A 3.13 tétel közvetlenül alkalmazható arra, hogy $Sm(G)$ összefüggősége helyett a 4.14 tétel alapján elég legyen egy $Sm(R)$ összefüggőségét vizsgálni. Ez nem mondható el a $Pol(G)$ esetéről, erre a 3.13 tétel következő változata használható:

4.16. Tétel. *[] Tegyük fel, hogy $id^*_{\rightarrow} := \{f \in Pol(G) : \exists\, id = f_0, \ldots, f_k = f : \forall\, 0 \leq i < k : f_i \in Pol(G), f_i \rightarrow f_{i+1}\}$ nem csak bijekciókat tartalmaz, valamint hogy egy minimális rangú elemének van ki-éle. Ekkor $id^*_{\rightarrow}$-ban van retrakció.*

Bizonyítás. A 3.13 tétel bizonyítása átvihető (mindent megszorítva polinomokra), hiszen $Pol(G)$ részfélcsoport. Az egyetlen kivétel: az abban a bizonyításban adódó f^* nem kell, hogy polinom legyen. Ez azonban nem okoz problémát: f^* ugyanis csak egy segédleképezés, ami ahhoz kell, hogy belássuk, hogy egy olyan leképezés, aminek a definíciójában nem szerepelt f^*, homomorfizmus. □

Irodalomjegyzék

[1] Miklós Maróti, László Zádori: *Reflexive Digraphs With Near Unanimity Polymorphisms*, Discrete Mathematics **312**, Issue 15 (2012), pages 2316–2328.

Nyilatkozat

Alulírott Gyenizse Gergő kijelentem, hogy a diplomamunkában foglaltak saját munkám eredményei, és csak a hivatkozott forrásokat használtam fel. Tudomásul veszem, hogy diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem könyvtárában a kölcsönözhető könyvek között helyezik el, és az interneten is nyilvánosságra hozhatják.

Tartalomjegyzék