2018.05.29. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Oldjuk meg: $(x^2 - x)y' - 1 = y^2\,, \quad y(1) = 0.$ *20pt*
2. Laplace–transzformációval oldjuk meg: $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 1.$ *20pt*
3. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x$ függvény szélsőérték helyeit és értékeit is a $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(1, 4)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *25pt*
4. Határozzuk meg $\int\int_H (e^{-x^2} + xy)\,dxy$ értékét, ahol H a $(0, 0)$, $(1, 1)$ és $(1, -1)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$
$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x\sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$
$$L[x\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x\operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$

2018.06.05. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $f(x,y)=\sqrt{y^2-x}$ függvény $f'_x(-2,1)$ és $f'_y(5,-3)$ parciális deriváltjait. *20pt*
2. Oldjuk meg: $x^2y''+2xy'=\ln x$, $y(1)=0$ $y'(1)=2$. *20pt*
3. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_L \frac{2x+1}{y-3}\,\mathrm{d}x-(2x-y)\,\mathrm{d}y$ integrál értékét, ahol L a $(1,3)\to(2,5)$ pontokat összekötő szakasz. *25pt*
4. Határozzuk meg az $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$ függvény szélsőérték helyeit és értékeit is a $(-3,0)$, $(1,0)$, $(1,-4)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x\sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x\operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$

2018.06.12. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{2n^2-5n}(1-3x)^{n-2}$ sort. *20pt*
2. Laplace–transzformációval oldjuk meg: $y'' + 2y' = e^{-x}\sin x - 2y, \quad y(0)=1, \; y'(0)=2.$ *25pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (y^2 - x)\, dx - (2x+y)\, dy$ értékét, ahol L a $P(-1,1)$ középpontú, 2 sugarú körív $A(-1,3)$, $B(-1,-1)$ pontjait pozitív irányban köti össze $(A \to B)$. *25pt*
4. Ábrázoljuk az integrálási tartományt, majd cseréljük föl a határokat: $\int_1^3 \int_{-1-x}^{\ln x} f(x,y)\, dy dx.$ *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x f(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$
$$L[x \cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$
$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.06.19. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:......................................

A csoport KÓD:......................................

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $f(x,y) = \sqrt{3-xy}$ függvény $P(-1,2)$ pontban vett $u(1,-3)$ irány szerinti deriváltját. *20pt*
2. Oldjuk meg: $y' - \dfrac{y}{x} = x^3 \ln x - 2x\,, \quad y(1) = 2.$ *20pt*
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x^2 - 8y^2$ függvény helyi szélsőértékeit. *20pt*
4. Határozzuk meg $\displaystyle\int\!\!\int_H \frac{4xy}{1-y}\,dxy$ értékét, ahol H a $(0,-1)$, $(2,1)$ és $(0,2)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *30pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$
$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$
$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.06.26. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:....................................

A csoport KÓD:....................................

1. Laplace–transzformációval oldjuk meg: $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 1.$ *20pt*

2. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét: *20pt*

$$(a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n-5} - 4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n+1}}\,, \qquad (b) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{n^2 - n - 2}\,.$$

3. Határozzuk meg az $\int_L x(1-2y)dx + y^2 \mathrm{d}y$ integrál értékét, ahol L az $(1,-1)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, negatív irányítású körvonal $A(1,1)$ és $B(1,-3)$ pontjait összekötő körív $(A \to B)$. *30pt*

4. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_1^2 \frac{3e^{-x^2/2}}{x^3}\, dx$ értékét. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x f(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$
$$L[x \cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$
$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.07.03. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Oldjuk meg az $xe^{\frac{y}{x}} + y - xy' = 0\,,\quad y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát. *20pt*
2. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $f(x,y) = \sqrt{xy^2 - 2x}$ függvény $f'_x(1,-4)$ és $f'_y(8,2)$ parciális deriváltjait. *20pt*
3. Határozzuk meg az $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2\,5^n}(2x-1)^{n-3}$ függvénysor konvergenciatartományát. *25pt*
4. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ függvény szélsőérték helyeit és értékeit is az $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,4)$, $(1,4)$ pontok által kijelölt zárt négyszögön. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$
$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x\sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$
$$L[x\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x\operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$