2016.05.17. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ függvény deriváltját az $x = -1$ helyen. *8pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-3} - \sqrt{n^2 - \lambda n}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{2n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln^2 x$ függvényt. *17pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 x\cos(2x-1)\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_2^3 \frac{s-1}{s^2-2s+a^2+1}\,ds, \qquad \text{(iii)} \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2-2t}\,dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A 3 korlátja az $\{x_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(ii) $F(z)$ konvex $[\alpha, \beta]$–n. *5pt*

(iii) A korlátos E számhalmaz infimuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{y \to -\infty} g(y) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.05.24. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3, \quad a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{-|x|}$ függvényt. *17pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *38pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \sin^4(ax-1)\cos(ax-1)\ dx, \qquad \text{(ii)} \int_2^3 (s-1)\ln(2s+1)\ ds, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 \frac{t^3-1}{t^2+2t}\ dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az (y_n) sorozat korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(t)$ függvény monoton nő $[-2, 3]$–on. *5pt*

(iii) A $T(z)$ függvényneknek a $z = 2$ pont kritikus pontja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{y \to 1} g(y) = -\infty$. *5pt*

(v) Integrálfüggvény (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.05.31. Kalkulus I. NÉV:................................

A csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{2n-3}{8-3n}$ sorozatot. Adjuk meg a sorozat infimumát és supremumát is. *10pt*

2. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{3x}{(2-x)^2}$ függvényt. *17pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *38pt*

$$\text{(i)} \int_{-1/3}^{0} \ln(3t+1)\ dt, \qquad \text{(ii)} \int_{0}^{\pi/4} \sin^2 s\ ds, \qquad \text{(iii)} \int_{0}^{2} \frac{x^3}{x^2+3x+2}\ dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $\{b_n\}$ sorozat monoton növő. *5pt*

(ii) A $g(x)$ függvény differenciálható a -1 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos a $[c, d]$ intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{t \to -3} s(t) = 5$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.06.07. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(2-x)$ függvénynek az $a = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, Lagrange-féle maradéktagját, majd becsüljük meg $\ln 3/2$ értékét. *10pt*

2. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *17pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *38pt*

$$\text{(i)} \int_{-2}^{0} x\sqrt{x+2}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_{1}^{3} \frac{u+2}{u^3-3u^2}\,du, \qquad \text{(iii)} \int_{0}^{1} \frac{5t^2}{\sqrt{7-2t^3}}\,dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat konvergál 2–höz. *5pt*

(ii) A $h(t)$ függvénynek helyi maximuma van -3–ban. *5pt*

(iii) Az $f(t)$ függvény folytonos a 4 pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az integrálható $g(x)$ függvény integrálközepe a $[c, d]$–on. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.06.14. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n - 3\cdot 5^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2n^2+e}}{3-n}.$$

2. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = xe^{1/x^2}$ függvényt. *17pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *38pt*

$$\text{(i)} \int_1^2 \frac{z+2}{z^2-6z+9}\,dz, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty xe^{-5x}\,dx, \qquad \text{(iii)} \int_e^{e^2} \frac{\ln y\sqrt{\ln y}}{y}\,dy.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $\{c_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökken. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható az 1 pontban. *5pt*

(iii) A $\{b_n\}$ sorozat torlódási pontja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$. *5pt*

(v) A Lagrange–féle maradéktag. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.06.21. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{3-2x^2}$ függvénynek az $x_0 = -1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenesének egyenletét. *5pt*

2. Határozzuk meg $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ –nek a $[-3, 1]$ zárt intervallumon fölvett szélsőértékeit. *5pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{3x^2}{(1-x)^2}$ függvényt. *17pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *38pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty xe^{1-x^2}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_1^e \frac{\ln z}{\sqrt{z}}\,dz, \qquad \text{(iii)} \int_{-2}^1 \frac{1}{t^2+4t+5}\,dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A -5 fölső korlátja az $\{a_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(ii) A $h(t)$ függvénynek helyi maximuma van -3–ban. *5pt*

(iii) Az E halmaznak a 4 infimuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.06.30. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-2\pi}{\sqrt[3]{1-5n}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{9}-1}{2\sqrt[n]{3}-2}.$$

2. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-1/x}$ függvényt. *17pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

3. Határozzuk meg a következő integrálokat: *38pt*

$$\text{(i)} \int_{-3}^{-1} \frac{t^3}{t^2+3t}\, dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/4} (3x-1)\sin 2x\, dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^2 5v^2(2-8v^3)^{15}\, dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{b_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja van az $x = -2$ helyen. *5pt*

(iii) A $h(x)$ függvény folytonos a $(-3, 4]$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Az $[c, d]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**