2013.05.21. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n+2}{3n^2-1} = \frac{2}{3}$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n+3}-\sqrt{n^2+3n-1}\right), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+4}{4n-5}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x + e^{-1/x}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty \frac{u}{e^{3u}}du, \qquad \text{(ii)} \int_{-3}^{-2} \frac{2-3t}{1-t^2}dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat monoton növekvő. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenletesen folytonos I–n. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek x_0–ban helyi mininuma van. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to -2} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux-féle felső integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.05.28. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = (x+2)\cos x$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját és a Lagrange–féle maradéktagját. *10pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{8}-1}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n+2}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt{|x|}\ln|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^3 \frac{z-3}{z^2+z-6}dz.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény lineárisan approximálható a 3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény monoton csökkenő az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény integrálfüggvénye. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.06.04. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-4n+1}{5n-2} = \infty$. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n - 4^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} 3n \sin\frac{5}{n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+2)^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \frac{1-3u}{u^2+1}\, du.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat részsorozata. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konkáv az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$. *5pt*

(v) A korlátos E számhalmaz infimuma. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.06.11. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n^2-2}{2n^2+3}$ sorozatot. Továbbá adjuk meg az $\inf a_n$ és $\sup a_n$ értékeket. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 4^n-(-1)^n}{2\cdot 3^n-5^n}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-1}{3n+2}\right)^{2-n}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\cdot e^{-1/x^2}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^3 \frac{x+2}{x-3}dx, \qquad \text{(ii)}\ \int_0^{\pi/6} 2t\cos 3t dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a|+C,\ (x\neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C,\ (0<a\neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 2. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény felülről korlátos az I intervallumon. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény folytonos az $x = -4$ pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$. *5pt*

(v) Az $f(x)$ függvény Riemann-integrálható $[a, b]$–n. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.06.18. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x^2+2}$ deriváltját az $a = -1$ helyen. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{2n} - 5^n}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{5x}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x \ln^2|x|$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_0^\infty x e^{-x^2} dx, \qquad \text{(ii)} \int_2^5 \frac{v+1}{v^2 - 2v + 1} dv.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke ∞. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény folytonos az I intervallumon. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növő az $[a, b]$–n. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2013.06.25. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ függvénynek az $x_0 = 1$ koordinátájú pontjához húzott érintő egyenesének egyenletét. *10pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^2+2n-1} - \sqrt[3]{n^2+n+3}), \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-5}{3n+2}\right)^{2n+3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$ függvényt. *20pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *25pt*

$$\text{(i)} \int_e^{e^2} \frac{1}{u\ln^3 u}du, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty \frac{1}{t^2+3t+2}dt.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény differenciálható az $a = 2$ pontban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ intervallum egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**