| | | |
|---|---|---|
| 2015.12.08. | Kalkulus I. | NÉV:................................ |
| | A csoport | EHA:................................ |

`FELADATOK:`

1. Lineáris transzformációk segítségével ábrázoljuk az $f(x) = \ln(2-3x)$ függvényt. *7pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ függvény szélsőértékeit a $[-2, 2]$ halmazon. *8pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 - 3\sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \sin^2 3t \; dt, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty 3e^{-s/2} \; ds, \qquad \text{(iii)} \int_0^2 \frac{3}{x^2-4} \; dx.$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \; (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \; .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $\{b_n\}$ sorozat monoton nő. *5pt*

(ii) A $g(x)$ függvény differenciálható a $-1$ pontban. *5pt*

(iii) A korlátos $E$ számhalmaz supremuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{t \to -3} s(t) = 5$. *5pt*

(v) Riemann–féle integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.12.15. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 2, \quad a_n = \sqrt{5a_{n-1} - 4}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5}{3+2n} = \infty$. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)} \int_0^2 x\cos(1+2x)\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^\infty ue^{1-u^2}\,du, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{t^3+1}{2-t}\,dt.$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $(c_n)$ sorozat korlátos. *5pt*

(ii) A $g(t)$ függvény monoton nő $[a, b]$–n. *5pt*

(iii) Az $f(x)$–nek az $x = 3$ pont kritikus pontja. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{p \to -2} L(p) = -\infty$. *5pt*

(v) Integrálfüggvény. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2015.12.22. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 3,\ a_n = \dfrac{3a_{n-1}+2}{a_{n-1}+2}$ $(n > 1)$ rekurzív sorozatot. *10pt*

2. Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt[7]{2-x}$ függvénynek az $a = 1$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, majd ennek segítségével becsüljük meg $\sqrt[7]{2}$ értékét. *10pt*

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *30pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^\infty (\lambda + x)e^{-\lambda x}\, dx \quad (\lambda \geq 0), \qquad \text{(ii)}\ \int_0^1 \frac{2}{y^2+6y+9}\, dy, \qquad \text{(iii)}\ \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\, dt.$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{x_n\}$ sorozat felülről korlátos. *5pt*

(ii) Az $\{a_n\}$ sorozat Cauchy-sorozat. *5pt*

(iii) A $h(x)$ függvény konvex az $[1, 4]$ intervallumon. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrál. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.01.05. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg az $f(x) = x^2(x-5)^3$ szélsőértékeit a $[-1, 3]$ halmazon. *7pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n - 3 \cdot n^5}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{2n-3}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \ln x$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *33pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{2t}}{\sqrt{t}}\, dt\ , \qquad \text{(ii)} \int_1^\infty \frac{dz}{z^2+3z+2}\ , \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{2t-1}{t-t^2+2}\, dt\ .$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos. *5pt*

(ii) Az $E$ számhalmaznak a $-1$ supremuma. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvény konkáv a $[1,5]$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle alsó integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.01.12. Kalkulus I. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+1}{3+2n^2} = \infty$. *7pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3}-1}{1-\sqrt[n]{3}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{e^x(1-x)}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_2^3 \frac{u^3+2u}{u^2-1}\, du, \qquad \text{(ii)} \int_{-\infty}^{-2} \frac{v}{\sqrt[3]{3-v^2}}\, dv, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{1}{z^2+4}\, dz\ .$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{y_n\}$ sorozat határértéke 1. *5pt*

(ii) Az $R(x)$ szigorúan monoton csökkenő a $[0, 3]$–on. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ függvénynek inflexiós pontja van az $x = -1$ helyen. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{t \to 2^+} f(t) = \infty$. *5pt*

(v) Az integrálható $f(x)$ függvény integrálközepe a $[c, d]$–on. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.01.12. Kalkulus I. NÉV:................................

B csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. Határozzuk meg a $b_n = \dfrac{2n-3}{3n-11}$ sorozat infimumat, supremumat. *7pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3}+2}{1-\sqrt[3]{n^4+3}}, \qquad \text{(ii)} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{2n-3}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 (3p+1)\sin p \; dp, \qquad \text{(ii)} \int_{-1}^0 2t^2(t^3+1)^5 \; dt, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{2y+1-\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \; dy \; .$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \; (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \; .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ . *5pt*

(ii) A $-1$ alsó korlátja $g(x)$–nek. *5pt*

(iii) Az $E$ halmaz megszámlálhatóan végtelen. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{z\to\infty} h(z) = -\infty$. *5pt*

(v) Darboux-féle alsó integrál (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.01.19. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 3x$ függvény deriváltját az $x = -2$ helyen. *5pt*

2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *10pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^3-1}-\sqrt{n^2+2n}\right), \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^{n-1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^\infty \frac{ds}{s^2-2s+2}, \qquad \text{(ii)}\ \int_{-1}^0 \frac{1}{t^2-3t}dt, \qquad \text{(iii)}\ \int_0^1 e^{-xy}\ dy\ .$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $c$ szám korlátja az $\{x_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(ii) $s(t)$ konvex $[-1, 2]$–on. *5pt*

(iii) A korlátos $H$ számhalmaz infimuma. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) Darboux–féle felső integrálközelítő összeg (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.01.19. Kalkulus I. NÉV:.................................

B csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Definíció alapján és formálisan is igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-5}{n^2+3} = 2.$ *6pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = \arcsin x$ függvénynek az $a = 0$ pont körüli harmadrendű Taylor–féle polinomját, továbbá becsüljük meg $\arcsin 1/2$ értékét. *9pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{v^2}{(1+2v^3)^{11}}\, dv, \qquad \text{(ii)} \int_1^\infty \frac{du}{u^3+u^2}, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 y\ln(2+3y)\, dy\ .$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. *5pt*

(ii) A $h(x)$ függvény lineárisan approximálható a 2 pontban. *5pt*

(iii) A $\{c_n\}$ sorozat részsorozata a $\{b_n\}$ sorozatnak. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{t \to 2^-} g(t) = 3$. *5pt*

(v) A Lagrange–féle maradéktag (részletesen). *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.01.26. Kalkulus I. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

`FELADATOK:`

1. Monotonitás és korlátosság szempontjából vizsgáljuk az $a_n = \dfrac{n+1}{5-2n}$ sorozatot, majd adjuk meg az $infimum$ és a *supremum* értékét. *10pt*
2. Határozzuk meg az $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ függvény szélsőértékeit a $[-1, 2]$ halmazon. *5pt*
3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *35pt*

$$\text{(i)} \int_0^2 \frac{1}{2t^2+3t+1}\, dt, \qquad \text{(ii)} \int_e^\infty \frac{1}{u \ln^2 u}\, du, \qquad \text{(iii)} \int_0^1 \frac{v^2+3v-2}{\sqrt{v}}\, dv.$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) A $-2$ szám felső korlátja az $(y_n)$ sorozatnak. *5pt*

(ii) A 2 szám torlódási pontja a $(c_n)$ sorozatnak. *5pt*

(iii) $g$ folytonos a $[-2,3)$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. *5pt*

(v) A $[c,d]$ egy beosztása, a beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

2016.01.26. Kalkulus I. NÉV:................................

B csoport EHA:................................

`FELADATOK:`

1. A tanult módon vizsgáljuk az $a_1 = 4,\ a_n = \sqrt{2a_{n-1}+3}\ \ (n > 1)$ rekurzív sorozatot. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3\cdot n^2 + 2\cdot 3^n}, \qquad \text{(ii)}\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-3}{3n+1}\right)^{n+1}.$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \sqrt[3]{x}\ln x$ függvényt. *15pt*

(i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexió. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.

4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)}\ \int_0^1 t\cos 2\pi t\ dt, \qquad \text{(ii)}\ \int_2^3 \frac{s-2}{(s^2-4s+3)^3}\ ds, \qquad \text{(iii)}\ \int_1^\infty \frac{2y^2+y}{y^3+2y^2}\ dy.$$

---

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -1$ . *5pt*

(ii) A $h(y)$ függvény folytonos a 2 pontban. *5pt*

(iii) $G(t)$ lineárisan approximálható $t_0$–ban. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim\limits_{x\to-\infty} U(x) = 1$. *5pt*

(v) Az $E$ számhalmaz felsőhatár–tulajdonságú. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**