2016.05.17. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg a $\int_H\int \frac{xy}{y+3}\,dA$ integrált, ahol H az $A(1,-1)$, $B(0,0)$ és $C(1,2)$ pontok által meghatározott háromszög. *20pt*
2. Oldjuk meg: $y'' - 2y' + 5y = e^{-2x}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$. *20pt*
3. Határozzuk meg $\int_\gamma \frac{2}{x^2}\,dx + 2xy\,dy$ értéket, ahol γ

   a) az $O(0,0)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, negatív irányítású körvonal $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{2},\sqrt{2})$ pontjait összekötő körív.

   b) az $A(-1,1)$, $B(0,2)$ és $C(1,1)$ pontokat összekötő tört szakasz ($A \to B \to C$). *30pt*
4. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ függvény szélsőértékeit a $(0,0)$, $(0,3)$, és $(3,0)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\ dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n (z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i\omega x}\ dx$$

2016.05.24. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Határozzuk meg a $\int_H\int \frac{2xy}{y+3}\, dA$ integrált, ahol H az $A(1,1)$, $B(3,0)$ és $C(3,2)$ pontok által meghatározott háromszög. *20pt*

2. Oldjuk meg: $xy' + y^2 + y = 0$, $y(2) = 3$.. *20pt*

3. Határozzuk meg $\int_\gamma \frac{2}{x^2}\, dx + 2xy\, dy$ értéket, ahol γ

   a) az $O(0,0)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, negatív irányítasú körvonal $P(1,\sqrt{3})$, $Q(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ pontjait összekötő körív ($P \to Q$).

   b) az $A(1,1)$, $B(2,3)$ és $C(2,1)$ pontokat összekötő tört szakasz ($A \to B \to C$). *30pt*

4. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$ függvény szélsőértékeit a $(0,0)$, $(0,-3)$, és $(-3,0)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\ dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x)e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\ dx$$

2016.05.31. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Ábrázoljuk az $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2 (x-1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-3}{2^n} (x-1)^n$ függvény értelmezési tartományát. *30pt*
2. Oldjuk meg: $y'' - 2y' = 3e^{2x} - 5x + 1, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$. *20pt*
3. Oldjuk meg: $xy' - y = x^4 - 2x^3 \sin x$. *20pt*
4. Határozzuk meg $\lim\limits_{(x,y)\to A} \frac{x^3 - 2xy + 1}{x^2 y - xy^2}$ határértéket, ahol

   a) $A = (0,0)$, b) $A = (\infty, -3)$, c) $A = (1, -\infty)$, d) $A = (\infty, \infty)$. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\ dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n (z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i\omega x}\ dx$$

2016.06.07. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. a) Határozzuk meg a $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n^2+n-2}$ sor összegét.

   b) Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3-2n}{n^2-n+5}$. *25pt*

2. Oldjuk meg: $(x+1)y' - \frac{y}{x} - xe^x = 0, \quad y(1) = e$. *20pt*

3. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x, y) = \sqrt{2x^2y - y}$ függvény $f'_x(-2, 3)$, $f'_y(1/2, -5)$ parciális deriváltjait. *20pt*

4. Határozzuk meg $\int_\gamma 3yx\, dx + (2x - y)\, dy$ értéket, ahol γ az $O(2, -1)$ középpontú, $r = 2$ sugarú pozitív irányítású körvonal $A(2, -3)$ és $B(0, -1)$ pontjait összekötő körív. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x) dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) \sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y, \ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n (z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} [(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x) e^{-ikx}\, dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

2016.06.14. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. a) Határozzuk meg a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n-1} - 3 \cdot 5^{n-5}}{3^{3n+2}}$ sor összegét.

   b) A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \sqrt{n+1}}{2n^2-5}(x+3)^{n-2}$ sort. *25pt*

2. Oldjuk meg: $\ln(y^2+1) + \frac{2y(x-1)}{y^2+1} y' = 0$. *20pt*

3. Definíció alapján és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = \sqrt{yx - y}$ függvény iránymenti deriváltját a $P(2,5)$ pontban, az $U(2,-3)$ irányban. *20pt*

4. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x$ függvény szélsőértékeit a $(0,0)$, $(2,4)$, és $(3,0)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$
$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$
$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\ dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\ dx$$

2016.06.21. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK

1. Legyen $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$. Határozzuk meg f szélsőértékeit. *20pt*

2. Oldjuk meg: $x^2y'' + 2xy' = \ln x, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 2$. *20pt*

3. A megfelelő sorfejtés első 5 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_0^1 x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}\,dx$ értékét. *20pt*

4. Határozzuk meg $\int\int_H \frac{x+2y}{x+3}\,dxdy$ értékét, ahol H a $(-2,0)$, $(-1,2)$ és $(0,0)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *30pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^\infty a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\ dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)\ dz, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^\infty c_n(z-z_0)^n.$$

$$Res(f,a) = \frac{h(a)}{g'(a)}, \quad Res(f,a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^\infty c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}\ dx$$