FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = x\sqrt{1-yx}$ függvénynek az $f'_y(2,-1)$, $f'_x(0,1)$ deriváltjait. *18pt*
2. Oldjuk meg : $\sin x \cos x - y \cos x = 6y',\ y(0) = 2$. *18pt*
3. Határozzuk meg:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1} - 5^n}{3^{2n+1}}$ illetve

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$ sorok összegét. *18pt*
4. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_0^1 \sin x^2 \ dx$ értékét. *14pt*
5. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$ szélsőértékeit a $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(-1,2)$, és $(1,2)$ pontok által kijelölt zárt négyszögön. *22pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx$$

2014.05.27. Kalkulus II. NÉV:..................................

A csoport EHA:..................................

`FELADATOK:`

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = x\sqrt{1+xy}$ függvénynek a $(0,2)$ pontban, a $(-3,4)$ irányban vett iránymenti deriváltját. *18pt*
2. Oldjuk meg : $y' \sin x - y \cos x = 0$, $y(1) = 0$. *18pt*
3. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^2}\, dx$ értékét. *14pt*
4. Határozzuk meg $\displaystyle\int_\gamma (x+y)\, dx - x^2\, dy$ értékét, ahol γ az origó középpontú, 2 sugarú, negatív irányítású körvonal $(2,0) \to (0,2)$ pontjait köti össze. *20pt*
5. Határozzuk meg $\displaystyle\int\int_H (x-y)\, dxdy$ értékét, ahol H a $(0,4)$, $(2,0)$ és $(5,4)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ dx$$

2014.06.03. Kalkulus II. NÉV:..................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Oldjuk meg : $(x \ln x)y'' - y' = 0, \quad y(1) = 2, \;\; y'(e) = 1.$ *18pt*
2. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2 2^n}(x-1)^{n+1}$ függvénysor konvergencia tartományát. *18pt*
3. Határozzuk meg az $f(x,y) = \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ határértékét a $(0,0)$, $(\infty,-2)$ és a (∞,∞) helyeken. *18pt*
4. A megfelelő sorfejtés első 5 tagjának segítségével becsüljük meg $\arcsin 1/2$ értékét. *18pt*
5. $\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+3} f(x,y)dydx$ esetén ábrázoljuk az integrálási tartományt, majd cseréljük föl az integrálási sorrendet. *18pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ dx$$

2014.06.10. Kalkulus II. NÉV:.................................

A csoport EHA:.................................

FELADATOK:

1. Oldjuk meg : $(x+1)\ dy = (2y + (x+1)^3)\ dx$. *18pt*
2. Ábrázoljuk az $f(x) = \ln \dfrac{2 - x + 2y}{1 - x + y^2}$ függvény értelmezési tartományát. *14pt*
3. Határozzuk meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-3}{n^2 2^n}(2x-5)^n$ függvénysor konvergencia–tartományát. *18pt*
4. Legyen $f(x, y) = x^2 + xy - y^3$. Határozzuk meg f szélsőértékeit az $(1, 0)$, $(3, 0)$ és $(1, 2)$ pontok által meghatározott zárt háromszögön. *20pt*
5. Határozzuk meg $\displaystyle\int_\gamma (x-y)\ dx + \frac{x}{y+1}\ dy$ értékét, ahol γ a $(0, 2)$ és $(-1, 0)$ pontokat összekötő tört szakasz. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z) dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x) dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ dx$$

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y)=\sqrt{1-xy}$ függvénynek a $(-1,2)$ pontban, a $(-3,4)$ irányban vett iránymenti deriváltját. *16pt*
2. Oldjuk meg : $(\cos x - x\sin x + y)\ dx = (\cos y - x)\ dy$. *18pt*
3. Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n}{n^2+1}(3x-1)^{n+1}$ függvénysor konvergencia–tartományát. *18pt*
4. Legyen $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$. Határozzuk meg f szélsőértékeit. *18pt*
5. Határozzuk meg $\int\int_H \frac{x+y}{x+1}\ dxdy$ értékét, ahol H a $(2,0)$, $(1,2)$ és $(0,0)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx$$

A csoport EHA:................................

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = \sqrt{1-yx}$ függvénynek az $f'_y(2,-2)$, $f'_x(-2,1)$ deriváltjait. *18pt*
2. Oldjuk meg : $y'' - 6y' + 9y - 4e^{3x} = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 4.$ *18pt*
3. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{6}$ és $\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\,dx$ értékét. *20pt*
4. Legyen $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$. Határozzuk meg f szélsőértékeit a $(-1,-1)$, $(2,2)$ pontokat összekötő szakaszon. *14pt*
5. Határozzuk meg $\int_\gamma \ln(x-y)\,dx - x\,dy$ értékét, ahol γ az $A(0,2)$ és $B(2,-1)$ pontokat összekötő tört szakasz $(A \to B)$. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx$$

FELADATOK:

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg az $f(x,y) = \sqrt{1-yx}$ függvénynek az $f'_y(2,-2)$, $f'_x(-2,1)$ deriváltjait. *18pt*
2. Oldjuk meg : $y'' - 6y' + 9y - 4e^{3x} = 0, \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 4.$ *18pt*
3. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\sqrt[3]{6}$ és $\int_0^1 x^3 e^{-x^2}\, dx$ értékét. *20pt*
4. Legyen $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^3$. Határozzuk meg f szélsőértékeit a $(-1,-1)$, $(2,2)$ pontokat összekötő szakaszon. *14pt*
5. Határozzuk meg $\int_\gamma (x-y)\, dx + \dfrac{x}{y+1}\, dy$ értékét, ahol γ a $(0,2)$ és $(-1,0)$ pontokat összekötő tört szakasz. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C,\ (x \neq a), \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C, \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x)e^{-px} dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$z = x + iy, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad u'_x = v'_y,\ -u'_y = v'_x, \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\int_k^\infty f(x)dx < \sum_{n=k}^{\infty} a_n < a_k + \int_k^\infty f(x)dx.$$

$$c_k := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\ dx, \quad \hat{f}(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad \hat{F}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\ dx$$