2017.12.12. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x,y) = x^2\sqrt{1-2y}$ függvény parciális deriváltjait a $P(-1,-3)$ pontban. *20pt*
2. Oldjuk meg: $2y'' + (y')^3 y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 4.$ *20pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (2x-y)\ dx + x\cos y\ dy$ értékét, ahol L a $(3,2) \to (1,-2)$ pontokat összekötő szakasz. *20pt*
4. Határozzuk meg
$$\int_H\int \frac{1-2y}{x+2}\ dxy$$
értékét, ahol H a $(-1,0)$, $(1,-4)$ és $(1,6)$ pontok által kijelölt háromszög. *30pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2017.12.19. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x,y) = 2x^2 - 3xy$ függvény $P(-1,2)$ pontbeli, $u(3,-4)$ irányban vett deriváltját. *20pt*
2. Oldjuk meg: $x^2\ dy + [(1-2x)y - x^2]\ dx = 0$. *20pt*
3. Oldjuk meg: $xy'' = (\ln y' - \ln x)y'$. *25pt*
4. Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2 + 4y$ függvény szélsőérték helyeit és értékeit is a $(0,0)$, $(1,3)$, $(2,0)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1}(-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^{\infty} f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

2018.01.02. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Határozzuk meg a $\lim\limits_{(x,y)\to A} \dfrac{x^2y+3xy^2}{x^2+y^2}$ határértéket, ahol

   a) $A=(0,0)$, b) $A=(-\infty,2)$, c) $A=(-1,-\infty)$, d) $A=(\infty,-\infty)$. *20pt*

2. Oldjuk meg: $(x+1)y'=\dfrac{y}{x}$, $y(2)=1$. *20pt*

3. Határozzuk meg $\displaystyle\int_L (2x+y)\,dx-(x-y^2)\,dy$ értékét, ahol L a $P(2,0)$ középpontú, 3 sugarú körív $A(2,3)$, $B(-1,0)$ pontjait negatív irányban köti össze. *25pt*

4. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\displaystyle\int_1^2 \frac{3e^{-x^2/2}}{x^3}\,dx$ értékét. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.01.09. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3}{5^n n^2}(2x-3)^{n-2}$ sort. *20pt*
2. Oldjuk meg: $\left(2xe^y - \frac{1}{x}\right) dx = (2y - x^2 e^y) dy\,, \quad y(1) = 0.$ *20pt*
3. Határozzuk meg az $f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ függvény szélsőértékeit. *25pt*
4. Határozzuk meg $\int\int_H (e^{-x^2} + xy)\, dxdy$ értékét, ahol H a $(0, 0)$, $(3, 3)$ és $(3, -3)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^{\infty} f(x)e^{-px}dx, \quad L[e^{ax}f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2}a_k + \int_k^{\infty} f(x)dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

2018.01.16. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet: $(1-x^2)y''+3x^2y'=0$. *20pt*
2. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét: *20pt*

$$(a)\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^{2n-1}-4\cdot 5^{n+1}}{4^{3n+1}}\ ,\qquad (b)\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{9}{n^2-n-2}\ .$$

3. Határozzuk meg az $\int_L x(1-y)dx+y^2\mathrm{d}y$ integrál értékét, ahol L a $(0,1)$ középpontú, $r=2$ sugarú, negatív irányítású körvonal $A(0,3)$ és $B(0,-1)$ pontjait összekötő körív. *25pt*
4. Határozzuk meg az $f(x)=x^3+2xy+y^3$ függvény szélsőértékeit a $(0,-1)$, $(2,3)$ és $(0,3)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.01.23. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Oldjuk meg az $xe^{\frac{y}{x}} + y - xy' = 0\,,\quad y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát. *20pt*
2. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $f(x,y) = 3x + \sqrt{xy} - 1/y$ függvény $f'_x(1,4)$ és $f'_y(8,2)$ parciális deriváltjait. *20pt*
3. Határozzuk meg az $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\, 3^n}(2x-1)^{n-3}$ függvénysor konvergenciatartományát. *20pt*
4. Határozzuk meg $\displaystyle\int_H\!\!\int \frac{xy}{y+2}\,\mathrm{d}xy$ értékét, ahol H az $(0,-1)$, $(-2,2)$ és $(0,3)$ pontok által kijelölt háromszög. *30pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.01.30. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Oldjuk meg az $y'' - y' - 2y = e^{2x} + 3x + 2$ differenciálegyenletet. *20pt*
2. Határozzuk meg az $f(x, y) = xy + 2x - \ln(x^2 y)$ függvény szélsőértékeit. *25pt*
3. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_L \ln(x+3)\,\mathrm{d}x - \frac{x}{y+1}\,\mathrm{d}y$ integrál értékét, ahol L a $(2,3) \to (6,5)$ pontokat összekötő szakasz. *25pt*
4. Konvergensek-e a következő számsorok:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 2}{3^n - 2n - 2}\,, \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(n+3)}{(2n+1)!}\,.$$

20pt

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2},$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.05.29. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:....................................

A csoport KÓD:....................................

1. Oldjuk meg: $(x^2 - x)y' - 1 = y^2\,, \quad y(1) = 0.$ *20pt*
2. Laplace–transzformációval oldjuk meg: $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 1.$ *20pt*
3. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x$ függvény szélsőérték helyeit és értékeit is a $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(1, 4)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *25pt*
4. Határozzuk meg $\int\int_H (e^{-x^2} + xy)\, dxy$ értékét, ahol H a $(0, 0)$, $(1, 1)$ és $(1, -1)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$
$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x\sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$
$$L[x\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x\operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.06.05. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $f(x,y)=\sqrt{y^2-x}$ függvény $f'_x(-2,1)$ és $f'_y(5,-3)$ parciális deriváltjait. *20pt*
2. Oldjuk meg: $x^2y''+2xy'=\ln x\ ,\ y(1)=0\ \ y'(1)=2.$ *20pt*
3. Határozzuk meg az $\displaystyle\int_L \frac{2x+1}{y-3}\,\mathrm{d}x-(2x-y)\,\mathrm{d}y$ integrál értékét, ahol L a $(1,3)\to(2,5)$ pontokat összekötő szakasz. *25pt*
4. Határozzuk meg az $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$ függvény szélsőérték helyeit és értékeit is a $(-3,0)$, $(1,0)$, $(1,-4)$ pontok által kijelölt zárt háromszögön. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x \sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x \operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x \operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.06.12. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:......................................

A csoport KÓD:......................................

1. A tanult módon vizsgáljuk a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{2n^2-5n}(1-3x)^{n-2}$ sort. *20pt*
2. Laplace–transzformációval oldjuk meg: $y'' + 2y' = e^{-x}\sin x - 2y, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 2.$ *25pt*
3. Határozzuk meg $\int_L (y^2 - x)\, dx - (2x + y)\, dy$ értékét, ahol L a $P(-1, 1)$ középpontú, 2 sugarú körív $A(-1, 3)$, $B(-1, -1)$ pontjait pozitív irányban köti össze ($A \to B$). *25pt*
4. Ábrázoljuk az integrálási tartományt, majd cseréljük föl a határokat: $\int_1^3 \int_{-1-x}^{\ln x} f(x, y)\, dydx.$ *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$
$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x\sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$
$$L[x\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x\operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.06.19. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $f(x, y) = \sqrt{3 - xy}$ függvény $P(-1, 2)$ pontban vett $u(1, -3)$ irány szerinti deriváltját. *20pt*
2. Oldjuk meg: $y' - \dfrac{y}{x} = x^3 \ln x - 2x\,, \quad y(1) = 2.$ *20pt*
3. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x^2 - 8y^2$ függvény helyi szélsőértékeit. *20pt*
4. Határozzuk meg $\displaystyle\int\int_H \frac{4xy}{1-y}\,dxy$ értékét, ahol H a $(0, -1)$, $(2, 1)$ és $(0, 2)$ pontok által meghatározott zárt háromszög. *30pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x\sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x\operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.06.26. Műszaki matematika I. / Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:.....................................

A csoport KÓD:.....................................

1. Laplace–transzformációval oldjuk meg: $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$. *20pt*

2. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét: *20pt*

$$(a) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n-5} - 4 \cdot 5^{n+1}}{3^{2n+1}}, \qquad (b) \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{n^2 - n - 2}.$$

3. Határozzuk meg az $\int_L x(1-2y)dx + y^2 \mathrm{d}y$ integrál értékét, ahol L az $(1,-1)$ középpontú, $r = 2$ sugarú, negatív irányítású körvonal $A(1,1)$ és $B(1,-3)$ pontjait összekötő körív $(A \to B)$. *30pt*

4. A megfelelő sorfejtés első 4 tagjának segítségével becsüljük meg $\int_1^2 \frac{3e^{-x^2/2}}{x^3}\, dx$ értékét. *20pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$
$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$
$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$
$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x\sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$
$$L[x\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x\operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$
$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

2018.07.03. Kalkulus II. / Matematika 2. NÉV:....................................

A csoport KÓD:....................................

1. Oldjuk meg az $xe^{\frac{y}{x}} + y - xy' = 0\,,\quad y(1) = 0$ kezdetiérték-problémát. *20pt*
2. Definíció szerint és formálisan is határozzuk meg a $f(x, y) = \sqrt{xy^2 - 2x}$ függvény $f'_x(1, -4)$ és $f'_y(8, 2)$ parciális deriváltjait. *20pt*
3. Határozzuk meg az $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2\,5^n}(2x-1)^{n-3}$ függvénysor konvergenciatartományát. *25pt*
4. Határozzuk meg az $f(x, y) = x^2 + xy + y^3$ függvény szélsőérték helyeit és értékeit is az $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 4)$, $(1, 4)$ pontok által kijelölt zárt négyszögön. *25pt*

Az elégséges érdemjegyhez legalább 40 pontot el kell érni. **Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!**

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \int \frac{1}{x^2+1} dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

$$L[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx, \quad L[e^{ax} f(x)](p) = L[f(x)](p-a), \quad L[xf(x)](p) = -L'[f(x)](p),$$

$$L[1](p) = \frac{1}{p}, \quad L[x^n](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad L[e^{ax}](p) = \frac{1}{p-a},$$

$$L[\cos ax](p) = \frac{p}{p^2+a^2}, \quad L[\sin ax](p) = \frac{a}{p^2+a^2}, \quad L[\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p}{p^2-a^2}, \quad L[\operatorname{sh} ax](p) = \frac{a}{p^2-a^2},$$

$$L[x\cos ax](p) = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2} = \frac{1}{p^2+a^2} + \frac{-2a^2}{(p^2+a^2)^2}, \quad L[x\sin ax](p) = \frac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$$

$$L[x\operatorname{ch} ax](p) = \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2} = \frac{1}{p^2-a^2} + \frac{2a^2}{(p^2-a^2)^2}, \quad L[x\operatorname{sh} ax](p) = \frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$$

$$L[y'] = pL[y] - y(0), \quad L[y''] = p^2 L[y] - py(0) - y'(0),$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} < \infty \iff p > 1, \quad \sum_{n=0}^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \iff |x| < 1, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n \iff |x| < 1,$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} (-1)^n a_n\ , \qquad \sum_{n=1}^\infty a_n \approx \sum_{n=1}^{k-1} a_n + \frac{1}{2} a_k + \int_k^\infty f(x) dx.$$

$$\tilde{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$