2019.01.29. Kalkulus I. / Matematika 1. NÉV:....................................

A csoport KÓD:....................................

1. Definíció alapján és formálisan is adjuk meg az $f(x) = \sqrt{6-x^2}$ függvény deriváltját az $x_0 = 1$ helyen. *8pt*
2. Határozzuk meg a következő határértékeket: *8pt*

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3}\right)\ , \qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^4-3n^2-2^{2n+1}}{3^{n-1}-n^4}\ .$$

3. A tanult módon ábrázoljuk az $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$ függvényt. *15pt*

   (i) Értelmezési tartomány, tengelymetszetek, paritás. (ii) Határérték. (iii) Első derivált, monotonitás, szélsőérték. (iv) Második derivált, konvexitás, inflexiós pont. (v) Függvényábrázolás, értékkészlet.
4. Határozzuk meg a következő integrálokat: *34pt*

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{y}{\sqrt[3]{5-y^2}}\,dy, \qquad \text{(ii)} \int_0^{\pi/2}(2x+1)\sin 3x\ dx, \qquad \text{(iii)} \int_1^2 \frac{x+1}{x^2-4}\ dx.$$

Segédlet:

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ (\alpha\neq -1), \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ .$$

Definiáljuk a következő fogalmakat:

(i) Az $\{a_n\}$ sorozat határértéke 2019. *5pt*

(ii) Az $f(x)$ függvény egyenessel közelíthető a 3 pontban. *5pt*

(iii) Az $f(x)$ monoton csökkenő $[2, 6]$–on. *5pt*

(iv) A környezetes definíció alapján $\lim_{x \to 0} z(x) = \infty$. *5pt*

(v) Az $[a, b]$ intervallum beosztása, beosztás finomsága. *5pt*

Az elégséges érdemjegyhez a feladat részből legalább 30, a definíció részből legalább 10 pontot el kell érni.

Tiltott eszközök használata esetén az érdemjegy elégtelen és ezt követően a hallgató már csak szóban vizsgázhat!