

KANDIDÁTUSI ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

UNIVERZÁLIS ALGEBRÁK JELLEMZÉSE HÁLÓAZONOSSÁGOKKAL

Gzédli Gábor

Szeged

1983

Algebrák egy $\mathcal{V}$ osztályára legyen $\text{Con}(\mathcal{V}) = \{\text{Con}(A) : A \in \mathcal{V}\}$ a $\mathcal{V}$ -beli algebrák kongruenciahálóinak osztálya, s jelöljük $\text{Con}(\mathcal{V})$ -vel a $\text{Con}(\mathcal{V})$ által generált hálóvarietást. Egy A algebráról a $\text{Con}(A)$ -ban teljesülő hálóazonosságok általában nem sokat mondanak. Ezzel szemben, ha $\mathcal{V}$ egy varietás, akkor a $\text{Con}(\mathcal{V})$ -ben (avagy $\text{Con}(\mathcal{V})$ -ben) teljesülő egyes hálóazonosságok alapján gyakran további hálóazonosságok $\text{Con}(\mathcal{V})$ -beli teljesülésére (pl. NATION [52]) vagy $\mathcal{V}$ fontos tulajdonságaira következtethetünk. Ha például $\text{Con}(\mathcal{V})$ disztributív, akkor $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ -re $\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{P}\mathcal{U} = \mathcal{P}_g\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{P}_u\mathcal{U}$ (JÓNSSON [45]), és (amennyiben $\mathcal{V}$ típusa véges) minden $\mathcal{V}$ -beli véges algebra véges sok azonossággal definiálható részvarietást generál (BAKER [1]). Az ilyen jellegű eredmények a kongruenciavarietások elméletéhez sorolhatók, melyről JÓNSSON [47] ad jó áttekintést; JÓNSSON [46] szerint egy $\mathcal{U}$ hálóvarietást kongruenciavarietásnak nevezünk, ha valamely $\mathcal{V}$ varietásra $\mathcal{U} = \text{Con}(\mathcal{V})$ teljesül.

Véleményünk szerint a disztributív hálók varietását leszámítva a kongruenciavarietások közül (ezideig) a $\text{Con}(\mathcal{R}\text{-Mod})$ alakúak ($\mathcal{R}$ gyűrű¹⁾, $\mathcal{R}\text{-Mod}$ az $\mathcal{R}$ feletti modulusok²⁾ varietása) a legfontosabbak. Ugyanis egyrészt nélkülük csak véges sok kongruenciavarietást ismernénk, másrészt – amint ez hamarosan kitűnik – jól kezelhetőek, s harmadrészt FREESE [24] eredménye szerint minden moduláris, nem disztributív kongruenciavarietás a $\text{Con}(\mathcal{K}\text{-Mod})$ ($\mathcal{K}$ primest) alakúak egyikét részként tartalmazza.

Adott m, n egészekre az egységelemes gyűrűk elsőrendű nyelvén felírt $(\exists x)(mx = n1)$ feltételt (ahol $mx = x+x+\dots+x$, stb.) $D(m, n)$ -nel jelöljük és oszthatósági feltételnek nevezzük. HUHNS ANDRÁS és HERRMANN vette észre [34], hogy $\mathcal{R} \models D(0, n)$ (illetve $\mathcal{R} \models D(m, 1)$) egy bizonyos hálóazonosság $\text{Con}(\mathcal{R}\text{-Mod})$ -beli teljesülésével ekvivalens. Később kiderült, hogy

(3.7) Következmény. A gyűrűk hálóazonosságokkal jel-

1) Gyűrűn mindvégig egységelemes gyűrűt értünk.

2) Moduluson mindvégig unitér balmodulust értünk.

lemezhető tulajdonságai éppen az oszthatósági tulajdonságok. Azaz minden λ hálózatonossághoz, illetve $m \geq 0$, $n \geq 1$ egészekhez léteznek (és algoritmussal meg is adhatók) olyan $m_\lambda \geq 0$, $n_\lambda \geq 1$ egészek, ill. egy $\lambda(m, n)$ hálózatonosság úgy, hogy tetszőleges R gyűrű esetén $\text{Con}(R\text{-Mod}) \models \lambda \iff R \models D(m_\lambda, n_\lambda)$, illetve $\text{Con}(R\text{-Mod}) \models \lambda(m, n) \iff R \models D(m, n)$.

Bár a fenti, HUTCHINSONnal egyidőben, ám függetlenül elért, majd közösen publikált [42] eredményünk az értekezésben következményként szerepel, mégis inkább kiindulópontnak tekinthető. Értekezésünk célja ugyanis az, hogy (3.7)-et az alábbi három irányba általánosítsuk:

- (A) Abel-csoportok és modulusok jellemzése hálózatonossággal;
- (B) Gyűrűk jellemzése végtelen hálózatonossággal;
- (C) Gyűrűk jellemzése feltételes hálózatonossággal.

Az (A) célkitűzés azon az észrevételen alapul, hogy $D(m, n) \iff (\forall y)(\exists x)(mx = ny)$ folytán $D(m, n)$ R -beli teljesülése csakis R additív csoportjától függ. Először arra kell választ adnunk, hogy mit tekintünk „ $A\text{-Mod}$ ” helyett, ha A nem gyűrű, hanem pl. Abel-csoport. Az alkalmas fogalmat HU adta meg [36]-ban. egy V algebraosztályt lokális varietásnak nevezünk, ha a $\mathcal{D}$ (irányított egyesítések), $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}_f$ (véges sok tényezősz direkt szorzatok) operátorok mindegyikére zárt. Nevezzünk egy $\mathcal{U}$ hálózarietást $\mathcal{U}$ -kongruenciavarietásnak [5], ha valamely V lokális varietásra $\mathcal{U} = \text{Con}(V)$. Mármint tekintsük „ $A\text{-Mod}$ ” helyett $\mathcal{D}\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{P}_f\{A\}$ -t, az A által generált lokális varietást! Véleményünk szerint ez szerencsés választás, mert míg $\text{Con}(\mathcal{D}\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{P}_f\{A\}) = \text{Con}(\mathcal{P}_f\{A\})$, addig $\text{Con}(\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{P}\{A\})$ A -nak túl kevés tulajdonságát (csak az exponensét) jellemzi, $\text{Con}(\{A\})$ pedig – a kongruenciavarietások elméletétől távolálló lévén – csak másfajta (pl. HUHN [37]) vizsgálatok tárgya lehet. Mivel az Abel-csoportokat $\mathcal{U}$ -kongruenciavarietásokon keresztül óhajtjuk jellemezni, célul tűzzük ki az utóbbiak vizsgálatát is.

(B)-vel kapcsolatban itt csak annyit jegyzünk meg,

hogy a végtelen hálózatonosságok -durván szólva- abban különböznek a végesektől, hogy a nem feltétlenül véges aritásu $\wedge$ és $\vee$ műveletjelek felléptét is megengedjük.

Ami (C)-t illeti, feltételes hálózatonosságon (más szóval Horn formulán) egy $(p_0 \leq q_0 \& \dots \& p_t \leq q_t) \Rightarrow p \leq q$ alaku nyílt formulát értünk, ahol p_i, q_i, p, q hálótérmekek. Ha $\mathcal{V}$ egy kongruenciafelcserélhető varietás, akkor HERRMANN és POGUNTKE [35] szerint $\text{IS Con}(\mathcal{V})$, a $\mathcal{V}$ -beli algebraik kongruenciahálóiba beágyazható hálóok osztálya kvázivarietás, azaz feltételes hálózatonosságokkal definiálható hálóosztály. Érdeemes hangsúlyozni, hogy $\text{IS Con}(\mathcal{V})$ elemei lényegesen egyszerűbb algebrai konstrukcióval (beágyazással) adódnak, mint a $\text{Con}(\mathcal{V}) = \text{HS P Con}(\mathcal{V})$ -beli hálóok; így a feltételes hálózatonosságok vizsgálata a hálózatonosságoknál bonyolultabb voltuk ellenére is indokolt. Az $\text{IS Con}(\mathbf{R}\text{-Mod})$ alaku kvázivarietások vizsgálatát HUTCHINSON kezdte meg [40]-ben; elméletének fő tétele:

(1.1) $\text{IS Con}(\mathbf{R}_1\text{-Mod}) \subseteq \text{IS Con}(\mathbf{R}_2\text{-Mod})$ pontosan akkor teljesül, ha bármely végtelen $\mathcal{K}$ számosság esetén a legfeljebb $\mathcal{K}$ számosságú $\mathbf{R}_1$ -modulusok kategóriája egzaktul beágyazható $\mathbf{R}_2\text{-Mod}$ -ba.

E nem éppen könnyen kezelhető kritériummal sikerült a (célul kitűzött) $\text{IS Con}(\mathbf{R}_1\text{-Mod}) \stackrel{?}{\subseteq} \text{IS Con}(\mathbf{R}_2\text{-Mod})$ tartalmazás igazságértékét bizonyos (de nem az összes) $\mathbf{R}_1$ és $\mathbf{R}_2$ esetén meghatározni, illetve gyűrűelméleti feltételekkel helyettesítenie. Eme tartalmazás viszont nyilván pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{R}_2$ mindazon tulajdonságai, melyek feltételes hálózatonosságokkal jellemezhetők, egyuttal $\mathbf{R}_1$ -nek is tulajdonságai.

Végül a feltételes hálózatonosságok tervezett vizsgálata reményteljes, hiszen, amint ezt TAYLOR [58]-beli eredményét felhasználva JÓNSSON [47]-ben kimutatta, léteznek olyan Malcev-feltételek, melyek (amennyiben ezeket meg is találjuk) segítségül hívhatók.

2.

Az értekezésben univerzális algebrai és hálóelméleti

módszerekkel dolgozunk, de felhasználjuk az Abel-csoportok és gyűrűk elemi tulajdonságait és a lineáris diofantoszi egyenletrendszerek FROBENIUSTól eredő elméletét is. Legfontosabb módszerként a Malcev-típusú és Malcev-szerű feltételek használatát jelölhetjük meg. (Nevezzük Malcev-szerűeknek a Malcev-típusú feltételek bizonyítása során adódó és velük ekvivalens, szabad algebrákra vonatkozó feltételeket. Pl. a $\bar{Y}$ varietásra vonatkoztatott „létezik egy háromváltozós f term, melyre az $f(x,y,y) = f(y,y,x) = x$ azonosságok teljesülnek $\bar{Y}$ -ben” Malcev-típusú feltétel az „ $(x,z) \in \bigoplus_{yz} \circ \bigoplus_{xy}$ $F_{\bar{Y}}(x,y,z)$ -ben” Malcev-szerű feltétellel ekvivalens.) A felhasználásra kerülő Malcev-típusú vagy Malcev-szerű feltételek részben általunk kidolgozottak [6,11,13] -s enniben eredmények is- , részben pedig ismertek WILLE [60], PIXLEY [55]). A kérdéses Malcev-típusú feltételek technikai bonyolultságán kétféleképpen is igyekeztünk enyhíteni. Egyrészt értekezésünk során a [6,11,13]-ban elért általánosságot mellőzve csak Malcev-szerű feltételeket igazolunk, és csak modulusvarietásokra. Másrészt eme feltételeket gráfok segítségével definiáljuk, bizonyítjuk és alkalmazzuk. Gráfok, illetve azonos szerepű ábrák használata az irodalomban nem újkeletű. A gráfok nemcsak eredményeink ismertetését teszik kényelmesebbé, hanem az eredmények egy részét is segítségükkel értük el. Jelentőségüket az áramköri kapcsolási rajzokéhoz hasonlíthatjuk; ezen analógiának jó hasznát vettük az egyes gyűrűtulajdonságokat jellemző (véges, végtelen, feltételes) hálózatonosságok (gráfjainak) „megtervezésekor” (a $\wedge, \vee$ és a premisszabeli $\leq$ az analógia során rendre a párhuzamos kapcsolásnak, a soros kapcsolásnak és a visszacsatolásnak felelt meg).

3.

Eredményeinket fejezetenként haladva foglaljuk össze.

II. 1-kongruenciavarietások. Rámutatunk arra, hogy

az ℓ -kongruenciavarietások a kongruenciavarietások számos tulajdonságával rendelkeznek, ezért vizsgálatuk éppoly indokolt.

(2.9) Tétel. Az ℓ -kongruenciavarietások a tartalmazásra nézve teljes hálót alkotnak, amely a hálóvarietyások hálójának teljes $\vee$ -részfélhálója.

Évtizedes probléma ezzel szemben az, hogy a kongruenciavarietások hálót alkotnak-e; továbbá az sem ismert, hogy az ℓ -kongruenciavarietások és a kongruenciavarietások fogalma azonos-e.

Megmutatjuk, hogy $\text{SP}_F V \subseteq V$ esetén $\text{Con}(V)$ ℓ -kongruenciavarietás.

III. Modulusok jellemzése hálózatonosságokkal. Ebben a fejezetben [42]-beli eredményeinket és HUTCHINSON [42]-beli eredményeit általánosítjuk modulusokra és Abel-csoportokra. Az általánosítás csak új eszközöket (ℓ -kongruenciavarietás és PIXLEY [55]) igényel, melyekre a korábbi megfontolások többnyire könnyen vihetők át. Tetszőleges λ hálózatonosságra és $m \geq 0$, $n \geq 1$ egészekre algoritmussal olyan $m_\lambda \geq 0$, $n_\lambda \geq 1$ egészeket és $\lambda(m, n)$ hálózatonosságot adunk meg, hogy

(3.4) Tétel. Tetszőleges $A \in R\text{-Mod}$ esetén λ (illetve $\lambda(m, n)$) pontosan akkor teljesül $\text{Con}(\text{DHS } \text{SP}_F\{A\})$ -ban - vagy ami ezzel ekvivalens, $\text{Con}(\text{P}_F\{A\})$ -ban - ha az A bármely véges F részhalmazához létezik olyan $x = x_F \in R$, melyre $m_\lambda x - n_\lambda 1_R$ (illetve $m_\lambda x - n_\lambda 1_R$) benne van F R -beli annullátorában.

Az említett (3.7) következményen kívül kiderül, hogy $\text{Con}(\text{P}_F\{A\})$ is $\text{Con}(T\text{-Mod})$ alakú (T gyűrű), és lehetővé válik a $\text{Con}(\text{P}_F\{B\})$ (B Abel-csoport) alakú (ℓ -)kongruenciavarietások meghatározása.

Legyen $\mathbb{K}$ egy Abel-csoportokból vagy modulusokból vagy gyűrűkből álló osztály, és jelöljük „ $\mathbb{K} = D(m, n)$ ”-nel a $(\forall A \in \mathbb{K})(\forall y \in A)(\exists x \in A)(mx = ny)$ formulát. Az $S_{\mathbb{K}}: \{0\} \cup \mathbb{P} \rightarrow \omega + 1$, $S_{\mathbb{K}}(0) = \min\{n: 1 \leq n \text{ és } \mathbb{K} = D(0, n)\}$ (itt $\min \emptyset = 0$), $p \in \mathbb{P}$ -re (azaz p prímszámra) $S_{\mathbb{K}}(p) = \min\{i: 0 \leq i \text{ és } \mathbb{K} = D(p^{i+1}, p^i)\}$ (itt viszont $\min \emptyset = \omega$) függvényt a $\mathbb{K}$ spektrumának nevezve önmagában is érdekes

HUTCHINSON gyűrűkre vonatkozó, [42]-beli eredményének az alábbi általánosítása.

(3.2) Állítás. Az, hogy $D(m, n)$ teljesül-e $\mathbb{K}$ -ban, csakis a $\mathbb{K}$ spektrumától függ (itt nem részletezett módon).

IV. Gyűrűk jellemzése végtelen hálózatonosságokkal. Nevezünk egy λ (végtelen vagy feltételes) hálózatonosságot regulárisnak, ha $\text{Con}(\mathbb{R}\text{-Mod})$ -beli teljesülése csakis az R spektrumától függ. Az önkényes elnevezést az magyarázza, hogy többnyire csak reguláris λ -król tudunk érdemlegeset állítani. Minden véges hálózatonosság reguláris; ha egy $p \leq q$ végtelen hálózatonosság jobb oldalán végtelen tényezősz metszetek nem szerepelnek, akkor $p \leq q$ is reguláris. Példát adunk nem reguláris végtelen hálózatonosságra is. Legyen $(I, \leq)$ egy irányított indexhalmaz, és minden $i \in I$ -re legyen B_i oszthatósági feltételeknek egy halmaza. Tegyük fel, hogy valahányszor $i \leq j$ és B_i minden eleme teljesül egy R gyűrűben, mindannyiszor B_j elemei is teljesülnek R -ben. Ez esetben a $(\exists i \in I)(\forall D(m, n) \in B_i)(D(m, n) \text{ teljesül})$ feltételt gyengülő oszthatósági feltételrendszernek nevezzük. A (4.16) állítás szerint pontosan ezek lesznek a gyűrűk reguláris végtelen hálózatonosságokkal jellemezhető tulajdonságai (a bizonyítás konstruktív).

V. Gyűrűk jellemzése feltételes hálózatonosságokkal. Legyen $m, n, k \geq 0$, és az $\{x, y, z, t, e\}$ változóhalmaz fölött definiáljuk a következő hálótermeket: $p = (x+y)(z+t)$, $w_{-1} = (x+z)(y+t)$, $w_0 = x$, $w_{k+1} = ((w_k+t)(y+z)+p)(x+z)$. Legyen $\chi(m, n, k)$ az $((e+w_{n-1})w_{-1}+x)z \leq e \Rightarrow p \leq ((w_k+y)(z+t) + w_{mn})(x+y+e)+x+z$ feltételes hálózatonosság.

(5.2) Tétel. (A) Tetszőleges R gyűrűre: $\chi(m, n, k)$ reguláris, és pontosan akkor teljesül $\text{Con}(\mathbb{R}\text{-Mod})$ -ban, ha valamely $i < \omega$ -ra $R \models D(mn^{i+1}, kn^i)$. (B) Tegyük fel, hogy χ egy reguláris feltételes hálózatonosság, és van olyan T 0-karakterisztikájú gyűrű, hogy $\text{Con}(T\text{-Mod}) \models \chi$. Ekkor vannak olyan $m_\chi > 0$, n_χ , k_χ egészek, hogy bármely R gyűrűre $\text{Con}(\mathbb{R}\text{-Mod}) \models \chi \iff (\exists i)(R \models D(m_\chi n_\chi^{i+1}, k_\chi n_\chi^i))$.

Nem reguláris χ -t is megadunk. Célkitűzésünknek megfelelően HUTCHINSON néhány [40]-beli eredményét is

igazoljuk; köztük a következőt is: Legyen R_1 és R_2 két, azonos karakterisztikájú gyűrű, és tegyük fel, hogy karakterisztikájuk négyzetmentes pozitív egész szám. Ekkor $\text{IS Con}(R_1\text{-Mod}) = \text{IS Con}(R_2\text{-Mod})$.

VI. Alkalmazások. E fejezetben először (3.7)-et alkalmazzuk a kongruenciavarietásokban tekintett következő ményrelációval kapcsolatban. Jelölje $\sum \stackrel{\text{cv}}{=} \lambda$ azt a tényt, hogy valahányszor minden $\sum$ -beli hálózazonosság teljesül egy $\bar{U}$ kongruenciavarietásban, mindannyiszor λ is teljesül $\bar{U}$ -ban. DAY és FREESE [21]-ben igazolta, hogy a modularitásnál $\stackrel{\text{cv}}{=}$ kompakt, azaz $\sum \stackrel{\text{cv}}{=}$ modularitás esetén $\sum' \stackrel{\text{cv}}{=}$ modularitás is teljesül valamely véges (sőt, egyelemű) $\sum' \subseteq \sum$ -ra. A (6.1) tételben megmutatjuk, hogy $\stackrel{\text{cv}}{=}$ a disztributivitásnál is kompakt. FREESE [16]-beli eredménye szerint algoritmussal eldönthető, hogy $\{\lambda\} \stackrel{\text{cv}}{=}$ modularitás teljesül-e. A disztributivitással kapcsolatban is ugyanez a helyzet:

(6.3) Tétel [16]. $\{\lambda\} \stackrel{\text{cv}}{=}$ disztributivitás pontosan akkor teljesül, ha $m_\lambda = 0$, $n_\lambda = 1$ és $\{\lambda\} \stackrel{\text{cv}}{=}$ modularitás.

Számos $\{\lambda\} \stackrel{\text{cv}}{=}$ disztributivitás és $\{\lambda\} \stackrel{\text{cv}}{=}$ modularitás alakú eredmény ismeretes, ezek közül NATION egyik [52]-beli eredményét (6.3) segítségével is igazoljuk. Az (5.2) tételt felhasználva negatív választ adunk JÓNSSON egyik [47]-beli problémájára:

(6.5) Következmény. Feltételes hálózazonosságokra általában még kongruenciafelcserélhetőség mellett sincs erős Malcev-feltétel (pl. $\chi(0, n, 1)$ -re sincs, ha $n > 1$).

Meglepő módon a [13]-beli Malcev-feltételünk Malcev-szerű változatát a halmazok variálására is érdemes alkalmazni! Ilymódon új megoldást nyerünk a hálók szóproblémájára, mely az ismert (és más problémákra is alkalmazható) EVANS [23] és McKINSEY [51] algoritmusoknál egyszerűbbnek tűnik. Legyen - az általánosság megszorítása nélkül - χ egy $(\bigwedge M_0 \leq \bigvee U_0 \& \dots \& \bigwedge M_t \leq \bigvee U_t) \Rightarrow \bigwedge M \leq q$ alakú feltételes hálózazonosság, ahol M_i , U_i és M változók nem üres halmazai, q változó, és legyen

X a λ -beli változók halmaza. Legyen $T_0: P(X) \rightarrow P(X)$ az X hatványhalmazának identikus leképezése önmagára, és $j \geq 1$ -re, $A \subseteq X$ -re legyen $T_{j+1}(A) = T_j(A) \cup \bigcup (\bigcap (T_j(\{x\})): x \in U_1): i \leq t \text{ és } M_1 \subseteq T_j(A))$. Ekkor valamely n -re $T_0 < T_1 < \dots < T_n = T_{n+1} = T_{n+2} = \dots$, és

(6.6) Tétel. λ akkor és csak akkor teljesül valamennyi hálóban, ha $q \in T_n(M)$.

Ezuton is szeretném kifejezni köszönetemet

– HUHN ANDRÁS egyetemi docensnek, a matematikai tudományok kandidátusának azért, hogy az algebrai kutatásokba még egyetemi hallgató koromban bevezetett, sok, az értekezésben is érintett témakörrel megismertetett, s hogy munkámat igen nagy számú önzetlen problémafelvetéssel és ötlettel, valamint sok más módon is segítette és segíti.

– CSÁKÁNY BÉLA egyetemi tanárnak, a matematikai tudományok doktorának, aki munkámat az algebraiban tett első lépéseim óta figyelemmel kíséri, szakmailag és emberileg mindig sokat segített. Tanácsai, ötletei és problémafelvetései nemcsak az értekezés témájában bizonyultak igen hasznosaknak.

– SCHMIDT TAMÁS aspiránsvezetőnek, a matematikai tudományok doktorának, aki értekezésem elkészítése és aspiranturám során, és ezt megelőzően is sok értékes tanáccsal, észrevétellel és utmutatással volt segítségemre, valamint sok új vagy vizsgálataimmal kapcsolatos eredményre hívta fel figyelmem.

– SZÓKEFALVI-NAGY BÉLA professzor urnak, az MTA rendes tagjának támogatásáért; továbbá azért, hogy lehetővé tette számomra az algebrai kutatásokban való részvételt.

A feltételes hálózatonosságok vizsgálatát kísérő értékes megjegyzéseiért ALAN DAY professzornak is köszönettel tartozom.

4.

Irodalom

- 1 K.A. BAKER, Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class, *Advances in Math.*, 24 (1977), 207-243.
- 5 G. CZÉDLI, on the lattice of congruence varieties of locally equational classes, *Acta Sci. Math.*, 41 (1979), 39-45.
- 6 –, Kongruenciavarietások, egyetemi doktori értekezés, Szeged, 1979.
- 9 –, A note on the compactness of the consequence relation for congruence varieties, *Algebra*

Universalis, 15 (1982), 142-143.

- 10 -, A Mal'cev type condition for the semi-distributivity of congruence lattices, Acta Sci. Math., 43 (1981), 267-272.
- 11 -, On properties of rings that can be characterized by infinite lattice identities, Studia Sci. Math. Hungar., 16 (1981), 45-60 (megjelenés alatt).
- 12 -, A characterization for congruence semi-distributivity, Proc. Conf. Universal Algebra and Lattice Theory, Puebla (Mexico 1982), megjelenés alatt.
- 13 -, Mal'cev conditions for Horn sentences with congruence permutability, Acta Math. Acad. Sci. Hung., közlésre benyújtva.
- 14 -, On lattice word problem with the help of graphs, Czech. Math. J., közlésre benyújtva.
- 15 - and A. DAY, Horn sentences with (W) and weak Mal'cev conditions, Algebra Univ., közl. benyújtva.
- 16 - and R. FREESE, On congruence distributivity and modularity, Algebra Univ., közlésre benyújtva.
- 19 - and J.D.H. SMITH, On the uniqueness of Mal'cev polynomials, Colloq. Bolyai 28. Finite Algebra and Multiple-valued Logic (Szeged, 1979), 127-145.
- 21 A. DAY and R. FREESE, A characterization of identities implying congruence modularity. I, Canad. J. Math., 32 (1980), 1140-1167.
- 23 T. EVANS, The word problem for abstract algebras, J. London Math. Soc., 26((1951), 64-71.
- 24 R. FREESE, Minimal modular congruence varieties, Amer. Math. Soc. Notices, 23 (1976) 1, 76T-A14.
- 32 G. GRÄTZER and E.T. SCHMIDT, Characterizations of congruence lattices of abstract algebras, Acta Sci. Math, 24 (1963), 34-59.
- 34 C. HERRMANN und A.P. HUHN, Zum Begriff der Charakteristik modularer Verbände, Math. Zeitschrift, 144 (1975), 195-194.
- 35 C. HERRMANN and W. POGUNTKE, Axiomatic classes of lattices of normal subgroups, Technische Hochschule Darmstadt preprint 12, 1972.
- 36 T.K. HU, Locally equational classes of universal algebras, Chinese J. Math., 1 (1973), 143-165.
- 37 A.P. HUHN, n-distributivity and some questions of the equational theory of lattices, Colloq. Bolyai 17. Contributions to Universal Algebra (Szeged, 1975), 167-178.
- 40 G. HUTCHINSON, On classes of lattices representable by modules, Proc. Univ. Houston Lattice Theory Conf., Houston, 1973, 69-94.

- 42 G. HUTCHINSON and G. CZÉDLI, A test for identities satisfied in lattices of submodules, *Algebra Universalis*, 8 (1978), 269-309.
- 45 B. JÓNSSON, Algebras whose congruence lattices are distributive, *Math. Scand.*, 21 (1967), 110-121.
- 46 B. JÓNSSON, Varieties of algebras and their congruence varieties, *Proc. Inter. Congress of Math. I* (1974), 315-320.
- 47 B. JÓNSSON, Congruence varieties, *Algebra Univ.*, 10 (1980), 355-394; vgl. Appendix GRÄTZER [30]-hoz.
- 51 J.C.C. MCKINSEY, The decision problem for some classes of sentences without quantifiers, *J. Symbolic Logic*, 8 (1943), 61-76.
- 52 J.B. NATION, Varieties whose congruences satisfy certain lattice identities, *Algebra Univ.*, 4 (1974), 77-88.
- 55 A.F. PIXLEY, Local Mal'cev conditions, *Canad. Math. Bull.*, 15 (1972), 559-568.
- 58 W. TAYLOR, Characterizing Mal'cev conditions, *Algebra Univ.*, 3 (1973), 351-395.
- 60 R. WILLE, *Kongruenzklassengeometrien*, Springer-Verlag Lecture Notes in Math., 113, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.

5.

Az értekezés eredményeinek és módszereinek az algebrán belüli hasznosítására az alábbi javaslataim vannak.

(1) (6.3)-at használva újabb „ $\{\lambda\} \models^{\text{cv}}$ disztributivitás” alakú összefüggéseket lenne érdemes felkutatni.

(2) Meg kellene vizsgálni, hogy célkitűzésünk (A), (E) és (C) irányai közül melyek vonhatók össze.

Az alkalmazások a VI. fejezetben már megkezdődtek. Számítani lehet Malcev-típusú vagy Malcev-szerű feltételeink további alkalmazásaira. A jellemzett gyűrűtulajdonságok a moduláris hálók elméletében is szerephez juthatnak, és (6.6) hálóelméletbeli alkalmazhatósága is erősen remélhető.