

UNIVERZÁLIS ALGEBRÁK
JELLEMZÉSE
HÁLÓAZONOSSÁGOKKAL

CZÉDLI GÁBOR

KANDIDÁTUSI ÉRTEKEZÉS

ASPIRÁNSVEZETŐ: SCHMIDT TAMÁS
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK DOKTORA

SZEGED

1983

T A R T A L O M

I. Bevezetés

1.§. A téma áttekintése	3
2.§. Fogalmak, jelölések	5
3.§. Eredmények áttekintése	15

II. ℓ -kongruenciavarietások

1.§. A három definíció és ezek ekvivalenciája	17
2.§. Wille - Pixley algoritmus	18
3.§. Az ℓ -kongruenciavarietások hálót alkotnak	23
4.§. ℓ -kongruenciavarietások és kongruenciavarietások kapcsolata	27

III. Modulusok jellemzése hálózazonosságokkal

1.§. Abel-csoportok spektruma és Steinitz-száma	29
2.§. Modulusok jellemzése hálózazonosságokkal .	33
3.§. Gyűrűk jellemzése hálózazonosságokkal . .	37
4.§. Abel-csoportok jellemzése hálózazonosságokkal	38

IV. Gyűrűk jellemzése végtelen hálózazonosságokkal

1.§. $\mathfrak{m}$ -termek és $\mathfrak{m}$ -azonosságok	42
2.§. Malcev-szerű feltételek	44
3.§. A $h_{m,n}$ termekből nyerhető azonosságokról	47
4.§. A reguláris hálózazonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságok	52

V. Gyűrűk jellemzése feltételes hálózazonosságokkal

1.§. Malcev-szerű feltételek	61
2.§. Gyűrűk reguláris tulajdonságai, I.	64
3.§. Példa nem reguláris feltételes hálózazonosságra	66
4.§. Formális egyenletrendszerekkel történő jellemzés	69
5.§. Hutchinson néhány eredménye	70
6.§. Két elegendő feltétel a regularitásra . .	73
7.§. Gyűrűk reguláris tulajdonságai, II. . .	75

VI. Alkalmazások

1.§. A hálózazonosságok közti, kongruenciavarietásokban tekintett következmény-relációra	79
2.§. Felcserélhetőség mellett sincs χ -re erős Malcev-feltétel	84
3.§. Egy megoldás a hálók szóproblémájára . .	84

Köszönetnyilvánítás	99
-------------------------------	----

Irodalom	100
--------------------	-----

I. BEVEZETÉS

1.§. A téma áttekintése. Értekezésünk témája az univerzális algebra és a hálóelmélet határterületéhez tartozik. A hálók igen gyakran univerzális algebrák vagy más matematikai strukturák kísézőstruktúráiként lépnek fel. A kíséző hálók és a kísért strukturák közötti összefüggések feltárására a hálóelmélet kialakulásával egyidős törekvés irányul. Ezen belül foglalnak helyet azon vizsgálatok, melyek során bizonyos univerzális algebrákat és algebraosztályokat, illetve ezek egyes tulajdonságait (kisézőhálóikban teljesülő) hálóaazonosságokkal jellemznek. Például Ore [54] klasszikus tétele szerint egy A Abel-csoport pontosan akkor lokálisan ciklikus, ha részcsoporthálója disztributív. A disztributivitás helyett n -disztributivitást (tehát egy másik hálóaazonosság teljesülését) mondva pedig A azon tulajdonságát jellemzhetjük, hogy A minden végesen generálható részcsoportha generálható legfeljebb n eleme által (Huhn [37]). Az egyes algebrák hálóaazonosságokkal történő hasonló jellemzése még akkor sem érdektelen, ha magukat a hálókat jellemezzük ily módon ([7,8]).

Ha A egy tetszőleges típusu algebra, akkor $\text{Con}(A)$ -nak, azaz A kongruenciahálójának mondjuk az n -disztributivitása alapján általában nem sokat tudhatunk az A strukturájáról. Lehet, hogy A -nak sok számunkra érdekes „jó” tulajdonsága van, de ok lehet a véletlen (azaz érdektelen tulajdonságok) vagy A kis elemszáma is. Más azonban a helyzet, ha A helyett bizonyos algebraosztályokat, például varietásokat tekintünk. Ha rögzített n -re egy $\mathcal{V}$ varietás valamennyi algebrájának kongruenciahálója n -disztributív, akkor ebből $\mathcal{V}$ -nek számos fontos jó tulajdonsága következik (Nation [52] alapján pl. Jónsson [45] és Baker [1] emlithető).

Értekezésünkben is algebraosztályokat (modulusok varietásait és lokális varietásait) próbálunk hálóazonosságokkal, ezek végtelen általánosításaival és feltételes hálóazonosságokkal jellemezni. Az egyes algebrák (esetünkben gyűrűk) jellemzése is hozzájuk rendelt (modulus)osztályokon keresztül történik.

Kiindulópontként [42] és Hutchinson [42] szolgált, ahol teljesen meghatároztuk a gyűrűk azon tulajdonságait, amelyek a gyűrű feletti valamennyi modulus kongruenciahálójában teljesülő hálóazonosságokkal jellemezhetők. A rövidség kedvéért nevezzük ezeket a gyűrűk hálóazonosságokkal jellemezhető tulajdonságainak. Vizsgálataink innen három irányba indulnak.

Először, észrevéve hogy a hálóazonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságok csakis a kérdéses gyűrű additív csoportjától függenek, Abel-csoportokra és modulusokra is kiterjesztjük a gyűrűkre ismert eredményeket. A legelső felmerülő kérdés az, hogy mit tekintsünk az „A feletti modulusok osztálya” helyett, ha A nem gyűrű, hanem Abel-csoport. Az A által generált lokális varietás lesz a megfelelő fogalom. (Ha itt varietást vennénk, akkor csak az exponense lenne A egyetlen jellemezhető tulajdonsága.) Így természetesen lép fel az $\{$ -kongruenciavarietás fogalma, melyet mint lokális varietás algebráinak kongruenciahálói által generált hálóvarietást definiálunk ([5]). Az $\{$ -kongruenciavarietásokat külön is tanulmányozzuk.

Másodszor gyűrűk végtelen hálóazonosságokkal (melyekben a végtelen tényező $\wedge$ és $\vee$ is megengedett) jellemezhető tulajdonságait vizsgáljuk. Bár ezek is csak a gyűrű additív csoportjától függenek, vizsgálati módszerünk itt már nem vezetett el az Abel-csoportokig.

Harmadszor pedig a gyűrűk feltételes hálóazonosságokkal, vagy más szóval univerzális Horn-ítéletekkel jellemezhető tulajdonságait keressük.

Mindhárom esetben Malcev (tipusu) feltételeket használva közelítjük meg a problémát. E feltételek részben ismertek (Pixley [55], Wille [60]), részben általunk kidolgozottak ([6] vagy [11], [13]). A felhasználandó Malcev feltételeket többnyire nem teljes általánosságukban, hanem csak a vizsgált kérdésre vonatkozóan (pl. modulusvarietásokra) fogalmazzuk meg.

Az értekezés végén a gyűrűk hálóazonosságokkal jelle-

mezhető tulajdonságaira támaszkodva két alkalmazást adunk a kongruenciavarietások elméletében. A feltételes hálózatonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságok a Malcev-feltételek vonatkozásában nyernek alkalmazást. A feltételes hálózatonosságokra [13]-ban nyert Malcev-feltételeket felhasználva pedig új megoldást adunk a hálók szóproblémájára.

2.§. Fogalmak, jelölések. E paragrafusban nemcsak jelölésekkel és fogalmakkal, hanem esetenként az utóbbiak eredetével és vizsgálataink motivációival is foglalkozunk.

Először az értekezésben gyakran előforduló Malcev (tipusu) feltétel fogalmát ismertetjük. A Grätzertől [30/B, 172-173. o.] eredő elnevezést Malcev [49] klasszikus tétele indokolja, amely szerint egy $\mathcal{V}$ varietás pontosan akkor kongruencia-felcserélhető (azaz algebráinak kongruenciahálói a relációsorzásra nézve félhálót alkotnak), ha létezik egy olyan háromváltozós, a $\mathcal{V}$ típusának megfelelő f term, hogy az $f(x,y,y) = x$ és az $f(x,x,y) = y$ azonosságok teljesülnek $\mathcal{V}$ -ben. Ennek mintájára egy, a függvényváltozóiban egzisztenciálisan kvantifikált és végeesszámu egyenletből álló egyenletrendszer, melyben az egyes egyenletek függvényváltozók-ból és individuumváltozókból épülnek fel, erős Malcev-feltételnek nevezünk. Akkor mondjuk, hogy egy erős Malcev-feltétel teljesül egy $\mathcal{V}$ varietásban, ha léteznek a $\mathcal{V}$ nyelvében olyan termek, melyeket a kérdéses függvényváltozók helyére írva valamennyi egyenlet $\mathcal{V}$ -ben teljesülő azonossággá válik. Például az említett névadó tételben a $(\exists f)(f(x,y,y) = x \text{ és } f(x,x,y) = y)$ erős Malcev-feltétel szerepel. Legyen adva erős Malcev-feltételeknek egy $U_2, U_3, U_4, \dots$ megszámlálható sorozata úgy, hogy tetszőleges $\mathcal{V}$ varietás és $n \geq 2$ esetén, ha U_n teljesül $\mathcal{V}$ -ben, akkor U_{n+1} is teljesül $\mathcal{V}$ -ben. (Ezt úgy is fogjuk mondani, hogy az U_n sorozat n -ben gyengülő.)

Ekkor a $(\exists n)(U_n)$ feltételt Malcev-feltételnek hívjuk. Ha κ egy számosság, akkor κ számú Malcev-feltétel konjunkcióját κ -gyenge Malcev-feltételnek fogjuk nevezni. Megjegyzendő, hogy egyszerű számossági okok folytán bármely κ -gyenge Malcev feltétel egy alkalmas $2^{\aleph_0}$ -gyenge Malcev-feltétellel ekvivalens. Az irodalomban viszont többnyire a $\kappa = \aleph_0$ eset szerepel gyenge Malcev-feltétel néven. A fenti kategóriákba nem szükségképpen besorolható, de hasonló feltételeket pedig Malcev-típusú feltételeknek nevezzük. A hatvanas évektől kezdve a varietások igen sok Malcev-feltétellel jellemezhető tulajdonsága vált ismeretessé. Mivel Csákány [4] és Taylor [58] művei remélhetőleg felmentenek a témakörnek és irodalmának részletes ismertetése alól, példaként csak [19]-et és a [17,18]-ban szereplő Malcev-típusú feltételeket említjük.

Az erős Malcev-feltételek – bizonyításuk következtében – gyakran egy „az n -rangu szabad algebrában ... teljesül” alakú feltétellel is ekvivalensek. Nevezzük az ilyen alakú feltételeket, vagy az ilyenekből összetett feltételeket Malcev-szerű feltételeknek. Az eredeti Malcev tételnél például az „ $\{x, y, z\}$ által generált szabad algebrában az (x, y) , illetve az (y, z) által generált Θ_{xy} és Θ_{yz} kongruenciákra $(x, z) \in \Theta_{yz} \circ \Theta_{xy}$ teljesül” Malcev-szerű feltétel az, amely γ kongruencia-felcserélhetőségét jellemzi.

A kongruenciavarietások fogalmára (Jónsson [46,47]) szintén szükségünk lesz. Vezessük be a következő jelöléseket: $\text{Con}(A)$ az A algebra kongruenciáinak hálójá, s ha γ algebrak egy osztálya, akkor $\text{Con}(\gamma) = \{\text{Con}(A) : A \in \gamma\}$. Továbbá $\text{Con}(\gamma) = \bigcup \bigcap \text{Con}(\gamma)$, a $\text{Con}(\gamma)$ által generált hálóvarietás. Egy γ hálóvarietást kongruenciavarietásnak nevezünk, ha $\gamma = \text{Con}(\gamma)$ teljesül algebrak valamely γ varietására (s ez esetben $\text{Con}(\gamma)$ -t a γ kongruenciavarietásának mondjuk). A hálóazonosságok közötti, kongruenciavarietásokban tekintett

(*útlagos javítás*)

következményrelációt az alábbi módon értelmezzük. Legyen Γ hálóaazonosságoknak egy halmaza (de egyelemű $\Gamma = \{\gamma\}$ esetén csak γ -t fogunk írni) és legyen λ egy további hálóaazonosság. Ekkor a „valahányszor Γ minden eleme teljesül egy kongruenciavarietásban (illetve egy hálóban), mindannyiszor λ is teljesül ugyanott” állítást $\Gamma \stackrel{cv}{=} \lambda$ -val (illetve $\Gamma \models \lambda$ -val) jelöljük.

Míg (mint az előző paragrafusban említettük) általános esetben az egyes A algebrákat a $\text{Con}(A)$ -ban teljesülő hálóaazonosságok nem jól jellemzik, addig varietásoknál más a helyzet. Ezt, a kongruenciavarietások fogalmának bevezetését is indokolva, az alábbiakban a teljesség igénye nélkül (ehelyett Jónsson [47]-re utalva) öt érveléssel illusztráljuk.

(A) A $\text{Con}(\underline{V})$ -ben teljesülő azonosságok már tükrözhetik a $\underline{V}$ varietás lényeges tulajdonságait. Például ha egy $\underline{V}$ varietásra $\text{Con}(\underline{V})$ disztributív, akkor a Jónsson lemma [45] szerint minden $\underline{W} \subseteq \underline{V}$ osztályra $\underline{H} \underline{S} \underline{P} \underline{W} = \underline{P}_s \underline{H} \underline{S} \underline{P}_u \underline{W}$, ahol $\underline{P}_u$, ill. $\underline{P}_s$ az ultra-, ill. szubdirekt szorzatok képzésének operátorát jelöli. Baker [1] tétele szerint pedig, ha egy véges A algebrára $\text{Con}(\underline{H} \underline{S} \underline{P}\{A\})$ disztributív (ahol $\underline{P}$ a direkt szorzatok képzésének operátora, és $\underline{H} \underline{S} \underline{P}\{A\}$ az A által generált varietás), akkor A véges bázisu, azaz $\underline{H} \underline{S} \underline{P}\{A\}$ véges sok azonossággal definiálható. A moduláris kongruenciavarietással rendelkező varietásoknak is több fontos tulajdonsága vált ismeretessé, melyekről Freese és McKenzie [26] ad egy több mint száz oldalas áttekintést.

Egy hálót n -disztributívnak ($1 \leq n < \omega$) nevezünk (Huhn [37, 38]), ha az alábbi

$$x \wedge \bigvee (y_i : 0 \leq i \leq n) \leq \bigvee (x \wedge \bigvee (y_i : 0 \leq i \leq n, i \neq j) : 0 \leq j \leq n),$$

n -disztributivitásnak nevezett és dist_n -nel jelölt hálóaazonosság teljesül benne. Az 1-disztributivitás éppen a szokásos (és dist -tel jelölt) disztributivitás. S ezzel vissza-

*) Utólagos javítás

térünk érveink felsorakoztatásához.

(B) Számos olyan eredmény született, amely szerint $\gamma \models^{\text{cv}} \lambda$ teljesül bizonyos γ és λ hálózatonosságokra, melyekre $\gamma \not\models \lambda$. Ezekről (és a kongruenciavarietásokról) Jónsson [47] jó áttekintést ad, így csak $\text{dist}_n \not\models \text{dist}$ és $\text{dist}_n \models^{\text{cv}} \text{dist}$ kerül most itt említésre.

(C) A (B) szerint nem minden hálóvarietás kongruenciavarietás, pl. az n -disztributív hálók varietása nem az ($n \geq 2$).

(D) A (B)-beli eredmények egy része az (A)-ban felsorolt eredményeket is erősíti, hiszen a „disztributív” helyett a gyengébb „ n -disztributív” feltevés is elegendő.

(E) Pixley [55] és Wille [60] tétele szerint minden λ hálózatonosság esetén varietások azon tulajdonsága, hogy kongruenciavarietásukban λ teljesül, gyenge Malcev-feltétellel jellemezhető. E gyenge Malcev-feltétel „erős” alkotórészei pedig egy algoritmussal fel is sorolhatók. Egyes hálózatonosságok (pl. dist vagy modularitás) esetén Malcev-feltétel is ismeretes (Jónsson [45], Day [20]). Ezen (gyenge) Malcev-feltételek jól használhatók kongruenciavarietásokkal kapcsolatos vizsgálatoknál.

Megemlítjük, hogy (A), ..., (E) egyike sem állna fenn, ha kongruenciavarietások helyett $\text{Con}(A)$ -t (A tetszőleges algebra) vagy $\text{Con}(\mathcal{V})$ -t ($\mathcal{V}$ tetszőleges algebraosztály) mondanánk. Például a négyelemű, nem ciklikus csoport kongruenciahálója 2-disztributív, de nem disztributív. Továbbá (amint ez a Grätzer-Schmidt tétellel ([32]) könnyen belátható) minden hálóvarietás $\text{Con}(\{A\})$ alakú alkalmas A algebrára. (E)-vel kapcsolatban pedig Gumm [33]-ra utalunk.

Hasonló algebraik egy $\mathcal{U}$ osztályát Hu [36] nyomán lokális varietásnak nevezzük, ha $\mathcal{U}$ zárt az $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}_f$ (véges sok tényező direkt szorzatok képzése) és $\mathcal{D}$ (irányított egyesítések, azaz injektív morfizmusokkal képzett direkt limesek képzé-

se) operátorok mindegyikére. A $\underline{V}$ osztály által generált lokális varietást (amely éppen $\underline{D} \underline{H} \underline{S} \underline{P}_f \underline{V}$) a későbbiekben más, ekvivalens módon definiált $\underline{\text{Loc}} \underline{V}$ -vel is jelöljük majd.

Egy $\underline{U}$ hálóvarietást ℓ -kongruenciavarietásnak nevezünk [5], ha valamely $\underline{V}$ lokális varietásra $\underline{U} = \underline{\text{Con}}(\underline{V})$. Minden kongruenciavarietás egyuttal ℓ -kongruenciavarietás, de nem ismeretes, hogy igaz-e ez fordítva.

Egy $\underline{V}$ (ℓ -) kongruenciavarietást minimális/moduláris (ℓ -) kongruenciavarietásnak nevezünk, ha tetszőleges $\underline{U}$ (ℓ -) kongruenciavarietás esetében $\underline{U} \subseteq \underline{V}$ esetén $\underline{U}$ disztributív vagy $\underline{U} = \underline{V}$.

Gyűrűn mindig (nemcsak ezután, hanem ezelőtt is) egységelemes gyűrűt, moduluson pedig unitér balmodulust értünk. Egy R gyűrű feletti modulusok osztályát (mely varietás) $R\text{-Mod}$ jelöli. Ismeretes, hogy tetszőleges M modulusra $\underline{\text{Con}}(M)$ és $\underline{\text{Sub}}(M)$ (ahol az utóbbi az M részmodulusainak hálója) izomorf (Birkhoff [2, Thm. 1, 159. o.]). A $\underline{\text{Sub}}(R\text{-Mod}) = \{ \underline{\text{Sub}}(M) : M \in R\text{-Mod} \}$ és $\underline{\text{Sub}}(R\text{-Mod}) = \underline{H} \underline{S} \underline{P} \underline{\text{Sub}}(R\text{-Mod})$ hálóosztályok izomorfia erejéig azonosak a $\underline{\text{Con}}(R\text{-Mod})$, ill. $\underline{\text{Con}}(R\text{-Mod})$ hálóosztályokkal. Így állításainkban az egyiket a megfelelő másikkal helyettesíthetjük, és viszont. Néhány gyűrűre az alábbi állandó jelölést vezetjük be: $\mathbb{Z}$ az egész számok gyűrűje, $\mathbb{Z}_m$ a $\mathbb{Z}$ -nek $\text{mod}(m)$ szerinti faktorgyűrűje, $\mathbb{Q}_0$ a racionális számok gyűrűje, és p prímszámra $\mathbb{Q}_p$ a p -elemű test (tehát $\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Z}_p$). Gyűrűk, modulusok és Abel-csoportok esetén értelmezzük a $\mathbb{Z}$ elemeivel való szorzást is: $0 \cdot x = x$, $(n+1)x = nx + x$, $(-n)x = -nx$. Egy R gyűrű egységelemét 1_R , vagy esetleg 1 jelöli majd.

Legyen $m, n \in \mathbb{Z}$. Akkor mondjuk, hogy a $D(m, n)$ oszthatósági feltétel teljesül egy R gyűrűben (jelben $R \models D(m, n)$; a $\models$ jelet más esetekben is fogjuk a „...-ban teljesül ...” rövidítésére használni), ha valamely $x \in R$ -re $mx = n1_R$. Hogy

egy R gyűrűben mely oszthatósági feltételek teljesülnek, az csakis az R S_R -rel jelölt spektrumától függ (Hutchinson [42]). A definíció kedvéért legyen (az egész értekezés során) P a primszámok halmaza, ω pedig a legkisebb végtelen rendszám. Ekkor S_R a következő függvény: $S_R: P \cup \{0\} \rightarrow \omega+1$ ($:= \{0, 1, \dots, \omega\}$), $S_R(0) = \min \{n: 1 \leq n < \omega \text{ és } R \models D(0, n)\} = \exp(R)$, az R karakterisztikája (itt $\min \emptyset = 0$), és $p \in P$ -re $S_R(p) = \min \{n: 0 \leq n < \omega \text{ és } R \models D(p^{n+1}, p^n)\}$ (itt viszont $\min \emptyset = \omega$). Az is ismeretes, hogy $\text{Con}(R\text{-Mod})$ csak S_R -től függ, azaz $S_{R_1} = S_{R_2}$ esetén $\text{Con}(R_1\text{-Mod}) = \text{Con}(R_2\text{-Mod})$ (Hutchinson [42]); továbbá ismertek azon $P \cup \{0\} \rightarrow \omega+1$ függvények is (ezeket spektrumoknak fogjuk nevezni), melyek gyűrűk spektrumaként felléphetnek (Hutchinson [42]).

Legyen $\mathfrak{m}$ egy végtelen reguláris számosság. Egy hálót $\mathfrak{m}$ -teljesnek nevezünk, ha minden $\mathfrak{m}$ -nél kisebb számosságú nem üres részhalmazának van infimuma és szupremuma. Szinguláris $\mathfrak{m}$ -ekre nincs szükség, mert ha egy háló valamely szinguláris $\mathfrak{m}$ -re $\mathfrak{m}$ -teljes, akkor $\mathfrak{m}^+$ -teljes is (Crawley és Dean [3]). Az $\mathfrak{m}$ -teljes hálók elméletében természetes módon lépnek fel az $\mathfrak{m}$ -termek (melyekben, egyelőre csak durván szólva, bármely $\mathfrak{m}$ -nél kevesebb tényező $\wedge$ és $\vee$ is megengedett műveletjelként), és az $\mathfrak{m}$ -azonosságok ($p \leq q$ alakú jelsorozatok, ahol p és q $\mathfrak{m}$ -termek). Például Funayama [28] a (metszés)disztributív azonosság végtelen megfelelőjével (ez persze osztálynyi sok $\mathfrak{m}$ -re egy-egy $\mathfrak{m}$ -azonosság teljesülését jelenti) és dualisával jellemezte a teljes Boole-hálók teljes részhálói-val izomorf teljes hálókat (ld. még Grätzer [29, 92. o.]). Megjegyzendő, hogy az $\aleph_0$ -azonosságok és a hálóazonosságok fogalma egybeesik (modulo hálóelmélet). Ha $\mathfrak{m}$ értéke nem lényeges, $\mathfrak{m}$ -azonosság helyett végtelen (háló-) azonosságot is mondunk (amely lehet véges is).

Feltételes hálóazonosságon, vagy más szóval (univerzális)

háló Horn formulán egy $(p_0 \leq q_0 \& \dots \& p_t \leq q_t) \Rightarrow p \leq q$ alakú, rendszerint χ -vel jelölt és változóiban univerzálisan kvantifikált itéletet értünk, ahol $-1 \leq t < \omega$ és p_i, q_i, p, q hálótermek. (A $t = -1$ esetben χ a $p \leq q$ hálóaazonosság). A mondott alakokkal kapcsolatban érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy a „ $\leq$ ” jelek „ $=$ ” jelek helyetti használata nem sérti az általánosságot. Egyrészt pl. a fenti χ ekvivalens a $(p_0 \wedge q_0 = q_0 \& \dots \& p_t \wedge q_t = q_t) \Rightarrow p \wedge q = p$ alakúval. Másrészt legyen χ' egy $(p'_0 = q'_0 \& \dots \& p'_t = q'_t) \Rightarrow p' = q'$ alakú feltételes hálóaazonosság, melyben a fellépő változók halmaza X . Vegyünk egy azonos elemszámu, X -től diszjunkt Y halmazt, egy $\varphi: X \rightarrow Y$ bijekciót, és jelöljük rendre p'_i, q'_i, p'', q'' -vel azon termeket, melyek a p'_i, q'_i, p', q' termekből úgy keletkeznek, hogy minden $x \in X$ változót $x\varphi$ -re cserélünk ki. Ekkor χ' ekvivalens a $(p'_0 \leq q'_0 \& q'_0 \leq p'_0 \& p'_0 \leq q'_0 \& q'_0 \leq p'_0 \& \dots \& q'_t \leq p'_t) \Rightarrow p' \wedge q'' \leq q' \wedge p''$ feltételes hálóaazonossággal. Hasonló a helyzet a (végtelen) hálóaazonosságok vonatkozásában is.

Egy λ (végtelen) hálóaazonosságot vagy feltételes hálóaazonosságot regulárisnak nevezünk, ha $\text{Con}(\underline{R}\text{-Mod}) \models \lambda$ igazságértéke csak az R gyűrű spektrumától függ. Erre a megkülönböztetésre azért lesz szükség, mert többnyire csak reguláris λ -król tudunk majd érdemlegeset állítani.

Most áttekintjük a feltételes hálóaazonosságok Malcev (tipusu) feltételekkel való jellemezhetőségét. Először is nevezzünk egy $\underline{V}$ varietást n -felcserélhetőnek, ha bármely A algebrájában két tetszőleges, mondjuk Θ és Ψ kongruenciára $\Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \Psi \circ \dots = \Psi \circ \Theta \circ \Psi \circ \Theta \circ \dots$ (s ekkor $= \Theta \vee \Psi$) teljesül, ahol mindkét szorzat n -tényezős és $\circ$ a relációk szorzásának a jele ($n \geq 2$). Ismeretes (Herrmann és Poguntke [35], [13]), hogy ha $\underline{V}$ egy n -felcserélhető varietás, akkor a $\underline{V}$ -beli algebrák kongruenciahálóiba beágyazható hálók $\underline{I} \subseteq \text{Con}(\underline{V})$ osztálya

(ahol $\underline{I}$ az izomorf algebrák vételének operátora) kvázivarietás, azaz feltételes hálózatonosságokkal definiálható osztály. Ez a kvázivarietás egyszerűbb konstrukcióval ($\underline{I}$ és $\underline{S}$ alkalmazásával) adódik, mint a $\underline{H}$, $\underline{S}$ és $\underline{P}$ operátorok segítségével nyerhető kongruenciavarietás. Az $\underline{I} \underline{S} \text{Con}(\underline{R}\text{-Mod})$ (R gyűrű) alakú kvázivarietások vizsgálatát Hutchinson kezdte meg [40]-ben. Adott κ számosságra jelölje $\underline{R}\text{-Mod}(\kappa)$ a legfeljebb κ számosságú R -modulusok kategóriáját. Ekkor, Hutchinson [40]-beli elméletének főtétele szerint

(1.1) Az $\underline{I} \underline{S} \text{Con}(\underline{R}_1\text{-Mod}) \subseteq \underline{I} \underline{S} \text{Con}(\underline{R}_2\text{-Mod})$ tartalmazás pontosan akkor teljesül, ha bármely végtelen κ számosság esetén létezik egy $\underline{R}_1\text{-Mod}(\kappa) \rightarrow \underline{R}_2\text{-Mod}$ egzakt beágyazó funktor.

Hutchinson (1.1)-re adott, távolról sem könnyű bizonyítása komoly apparátust kíván (Abel-féle kategóriák és moduláris hálók elmélete), és egy helyen ([40, 79. o. és Prop. 8]) az erős kiválasztási axiómát (a halmazok osztályán létezik kiválasztási függvény) is igénybe veszi. A nem éppen könnyen kezelhető (1.1) feltétellel sikerült bizonyos (de nem az összes) $\underline{R}_1$ és $\underline{R}_2$ esetén a (célul kitűzött) $\underline{I} \underline{S} \text{Con}(\underline{R}_1\text{-Mod}) \stackrel{?}{\subseteq} \underline{I} \underline{S} \text{Con}(\underline{R}_2\text{-Mod})$ tartalmazás igazságértékét gyűrűelméleti feltételekkel jellemeznie, illetve meghatározni. E tartalmazás viszont pontosan akkor igaz, ha minden $\text{Con}(\underline{R}_2\text{-Mod})$ -ban teljesülő χ feltételes hálózatonosság $\text{Con}(\underline{R}_1\text{-Mod})$ -ban is teljesül. Ha $\chi \text{Con}(\underline{V})$ -beli teljesülését n -felcserélhető $\underline{V}$ varietások esetén Malcev-feltétellel jellemezni tudnánk, akkor az (1.1)-beli $\underline{I} \underline{S} \text{Con}(\underline{R}_1\text{-Mod}) \stackrel{?}{\subseteq} \underline{I} \underline{S} \text{Con}(\underline{R}_2\text{-Mod})$ kérdéshez egy új, és a kategóriaelméletet elkerülő uton közeledhetnénk. Ezen elképzelést a [42]-beli módszer mellett az is megalapozza, hogy Taylor [58] és Neumann [53] elegáns kritériummal jellemezték a varietások (erős) Malcev-feltétellel jellemezhető tulajdonságait, s

ezt felhasználva Jónsson [47] kimutatta a szóban forgó Malcev-feltételnek (legalábbis) a létezését. Jónsson [47] egyúttal néhány megoldatlan problémát is említ (χ feltételes hálózatonosságot jelöl):

(1.2) Tetszőleges (nem feltétlenül n -felcserélhető) $\mathcal{V}$ varietás esetén $\text{Con}(\mathcal{V}) \stackrel{?}{=} \chi$ jellemezhető-e gyenge Malcev-feltétellel?

(1.3) Ha $\mathcal{V}$ n -felcserélhető, $\text{Con}(\mathcal{V}) \stackrel{?}{=} \chi$ jellemezhető-e erős Malcev-feltétellel?

Míg az (1.3)-ra a VI. fejezetben negatív választ adunk, az (1.2) probléma csak részben megoldott. Annyit tudunk ([15]), hogy ha χ -re teljesül a Whitman-feltétel (ld. (5.13) előtt), akkor $\text{Con}(\mathcal{V}) \stackrel{?}{=} \chi$ 2^{χ_0} -gyenge Malcev-feltétellel jellemezhető (ld. még [10,12], ahol χ a VI/3. §-ban SD_χ -sel jelölt met-szés-félig-disztributivitás, vagy ennek duálisa). A [15]-be-li 2^{χ_0} -gyenge Malcev-feltétel „erős” összetevői algoritmus-sal nyerhetők.

Terminológiánkkal Grätzer [29] és [30] könyveit követ-jük az alábbi eltérésekkel. Algebrák és tartóhalmazaik kö-zött nem teszünk jelölésbeli különbséget. Félreérthetősége miatt a „polinom” szó használatát elkerüljük, és helyette termfüggvényt mondunk. Az $f(x_0, \dots, x_{n-1})$ ^{termet} az alábbi rövidebb módon is jelöljük: $f(x_i: i < n)$ vagy $f(x: x \in X)$, ahol $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$. Ez természetesen csak jelölés, és általá-ban korántsem jelenti azt, hogy az $f(x: x \in X)$ term, vagy az általa indukált termfüggvények a változók permutációival szemben invariánsak lennének. Ennél a jelölésnél mindig fel-tesszük, hogy X jólrendezett, s ha ilyen rendezést nem adunk meg, akkor tetszőlegesen rögzített jólrendezés vehető. (A $\wedge$ és $\vee$ műveleti jelek kivételt képeznek, ezek definíció sze-rint kommutatívak lesznek). Termek és általuk indukált term-

függvények között nem teszünk jelölésbeli különbséget. Az $f(x: x \in X)$ jelölést végtelen X halmaz esetén is megengedjük; ekkor az X feletti abszolút szabad kifejezésalgebra egy elemét jelöli, s az $f(x: x \in X)$ term által indukált $f(x: x \in X): A^X \rightarrow A$ termfüggvény csak véges sok változójától függ. Hálótermek felírásakor a $\wedge$ és $\vee$ helyett rendre a $\cdot$ és $+$ műveleti jeleket is használjuk, az utóbbiakkal zárójelet takarítunk meg (pl. $xy+z$ és $(x \wedge y) \vee z$ azonos termek). A „ $:=$ ” jelkombinációt olyankor használjuk, ha a bal oldalán álló jelölést akarjuk bevezetni a jobb oldalon álló kifejezés rövidítésére. Egyéb kitétel híján az „algebrák osztálya” hasonló algebrák osztályát jelenti. A pozitív egészek halmazát N fogja jelölni.

Ha hivatkozás során a szerző neve elmarad, akkor ennek az alábbi három oka lehet:

- a szerzőt ugyanabban vagy az előző mondatban már említettük;
- az értekezés szerzőjéről van szó;
- az értekezés szerzőjének társszerzőként része van a kérdéses eredményben.

Ha csak az egyik társszerző neve marad el, akkor az idézett eredmény (vagy bizonyítás) csakis a másik szerzőtől származik. Ez csak [16]-ra és [42]-re való hivatkozásnál fordul majd elő, melyekben függetlenül elért eredmények közös publikálásáról van szó (megemlítjük, hogy [42, 272. o.] leltárszerűen megadja az egyes szerzők hozzájárulását). A társszerzővel írott [17, 18, 19] az I/2 paragrafusban csak a témakör teljesebb áttekintése kedvéért szerepel, belőlük eredményeket idézni vagy felhasználni nem fogunk.

Az eddigi megállapodások, definíciók és jelölések az értekezés egészére vonatkoznak, többségüket ismétlés és utalás nélkül fogjuk alkalmazni.

3.§. Eredmények áttekintése. A teljesség igénye nélkül az értekezés eredményeit az alábbiakban tekintjük át.

A II. fejezetben összegyűjtjük az ℓ -kongruenciavarietások egyszerűbb tulajdonságait. Rámutatunk (gyakran mások eredményeire hivatkozva), hogy ezek tanulmányozása is indokolt az előző §-beli (A), ..., (E) alapján. Előkészületet teszünk a harmadik fejezetre, ahol az ℓ -kongruenciavarietások fontos szerepet játszanak. Észrevesszük, hogy a minimális moduláris ℓ -kongruenciavarietások ugyanazok, mint a Freese [24,25] által meghatározott minimális moduláris kongruenciavarietások. Az értekezés fejezetbeli fő eredménye a (2.9) tétel, mely szerint az ℓ -kongruenciavarietások hálót alkotnak.

A III. fejezetben a [42]-beli eredményeket és Hutchinson [42]-beli eredményeit általánosítjuk; az eredeti eredmények következményként szerepelnek. Kiderül, hogy Abel-csoportoknak és modulusoknak is pontosan az oszthatósági feltételekkel ekvivalens tulajdonságai jellemezhetők hálóazonosságokkal, s a spektrum itt is meghatározza az oszthatósági feltételeket. Az általánosítás csak új eszközöket (ℓ -kongruenciavarietás és Pixley-algoritmus) igényel, a korábbi megfontolások ezekre többnyire könnyen vihetők át. Így itteni fő eredménynek a már [42]-ben is szereplő (3.7) következményt tartjuk, mely szerint pontosan az oszthatósági feltételek a gyűrűk hálóazonosságokkal jellemezhető tulajdonságai.

A IV. fejezetben a hálóazonosságokhoz gyenge Malcev-feltételt rendelő algoritmusnak (Wille [60], Pixley [55]) egy kézenfekvő transzfinit általánosítását adjuk végtelen hálóazonosságokra, az egyszerűség kedvéért csak modulusvarietások esetére. Majd a kapott Malcev-szerű feltételekre támaszkodva gyűrűk végtelen hálóazonosságokkal jellemezhető tulajdonságaival foglalkozunk. Bár a véges esethez hasonló befe-

jezettséget nem tudtunk elérni, a reguláris végtelen hálóazonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságokat a fejezetbeli fő eredménynek számító (4.11) tételben meghatározzuk.

Az V. fejezetben, az (5.2) tételben gyűrűk $(\exists i)(D(mn^{i+1}, kn^i))$ alakú tulajdonságait konkrétan megadott reguláris feltételes hálóazonosságokkal jellemezzük, és reguláris feltételes hálóazonosságok egy tag (az $m \neq 0$ esetnek megfelelő) osztályára mutatjuk meg, hogy velük másfajta gyűrűtulajdonságok nem jellemezhetők. Módszerként Malcev-szerű feltételeket dolgozunk ki az (5.1) tételben. Az előző paragrafusban megfogalmazott célnak megfelelően Hutchinson [40]-beli, bazi $\mathbb{I} \approx \mathbb{S} \text{Con}(R_1 - \text{Mod}) \subseteq \mathbb{I} \approx \mathbb{S} \text{Con}(R_2 - \text{Mod})$ problémára vonatkozó eredményeinek egy része következményként adódik. Fejezetbeli fő eredményeknek az (5.1) és (5.2) tételeket tartjuk.

A VI. fejezet az alkalmazásoké. A harmadik fejezet fő eredményének felhasználásával igazoljuk a $\models^{cv}$ következményreláció kompaktságát és algoritmikus eldönthetőségét abban a speciális esetben, amikor a jobb oldalon a disztributivitás szerepel. A „ $\lambda \models^{cv} \text{dist} ?$ ” eldöntésére a (6.3) tételben adott algoritmus ismert $\lambda \models^{cv} \text{dist}$ típusu eredmények igazolására is használható. Az (5.2) tétel segítségével negatív választ adunk Jónsson (1.3)-ban idézett problémájára ((6.5) következmény). Malcev-szerű feltételek használatával (!) nyerünk egy új és az eddigieknél hatékonyabb algoritmust a hálók szóproblémájára ((6.6) tétel). A fejezetbeli két fő eredmény a (6.3) és a (6.6) tétel.

II. ℓ -KONGRUENCIAVARIETÁSOK

1.§. A három definíció és ezek ekvivalenciája. A lokális varietások („locally equational class”) fogalmát Hu vezette be [36]-ban. A definíció kedvéért legyen F egy τ típusu algebra részhalmaza, p, q pedig n -változós τ -termek. Akkor mondjuk, hogy a $p = q$ azonosság teljesül F -ben (jelben: $p \stackrel{F}{=} q$), ha tetszőleges $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n$ esetén $p(a_1, \dots, a_n) = q(a_1, \dots, a_n)$. Algebrák, mondjuk τ típusuak, egy $\underline{V}$ osztályára jelöljük $\underline{\text{Loc}} \underline{V}$ -vel azon A τ -algebrák osztályát, melyekre teljesül az alábbi

„az A minden véges G részhalmazára létezik $\underline{V}$ -beli algebráknak egy véges $\{B_i : i < k\}$ családja és $i < k$ -ra B_i -nek egy véges F_i részhalmaza úgy, hogy valahányszor egy $p = q$ τ -azonosság minden $i < k$ -ra teljesül F_i -ben, mindannyiszor $p \stackrel{G}{=} q$ ”

feltétel.

Egy $\underline{V}$ algebraosztályt lokális varietásnak nevezünk, ha $\underline{V} = \underline{\text{Loc}} \underline{V}$. Tetszőleges $\underline{U}$ algebraosztályra $\underline{\text{Loc}} \underline{U}$ a legszűkebb $\underline{U}$ -t tartalmazó (azaz az $\underline{U}$ által generált) lokális varietás. A fogalom a varietások fogalmát általánosítja, sok hasonló vonást megtartva. Pl. tetszőleges $\underline{U}$ algebraosztályra $\underline{\text{Loc}} \underline{U} = \underline{D} \underline{H} \underline{S} \underline{P}_f \underline{U}$, és $\underline{U}$ pontosan akkor lokális varietás, ha a $\underline{H}$, $\underline{S}$, $\underline{P}_f$ és $\underline{D}$ operátorok mindegyikére zárt. Ha $\underline{V}$ varietás, akkor a lokálisan véges $\underline{V}$ -beli algebrák (tehát azok, melyeknek a végesen generált részalgebrái végesek) lokális varietást alkotnak. Ezek szerint pl. az Abel-féle torziócsoportok lokális varietást alkotnak, amely viszont nem varietás.

A lokális varietások fenti (és teljes egészében Hu [36]-ból kölcsönzött) ismertetése után az ℓ -kongruenciavarietásokat háromféle módon is definiáljuk. A három definíciót úgy nyerjük, hogy Φ helyére rendre az

- (a) lokális varietás
- (b) egyetlen algebra által generált lokális varietás
- (c) $\mathcal{S}$ -re és $\mathcal{P}_f$ -re zárt osztály

kifejezéseket helyettesítjük. Megjegyzendő, hogy bár algebraosztályok jelzőként (a), (b) és (c) közül semelyik kettő sem egyenértékű (Hu [36]), az alábbi definíció (a), (b) és (c) változatai ekvivalensek.

(2.1) Definíció. Egy $\mathcal{U}$ hálóvarietást ℓ -kongruenciavarietásnak nevezünk, ha $\mathcal{U} = \text{Con}(\mathcal{V}) = \mathcal{H} \mathcal{S} \mathcal{P} \text{Con}(\mathcal{V})$ teljesül valamely $\mathcal{V}$ Φ -re.

Mielőtt e három definíció ekvivalenciáját igazolnánk, nézzük meg, hogy hogyan alakulnak a bevezetésben felsorakoztatott érvek ℓ -kongruenciavarietások esetén. Míg az (A) során idézett Jónsson lemmának lokális varietások esetén is van megfelelője (Hu [36]), addig Baker véges bázisra vonatkozó eredményének megfelelője nem ad újat (mert véges A -ra $\text{Loc}\{A\}$ nyilván varietás [36]). (E)-vel kapcsolatban ismertetni fogjuk a Pixley-algoritmust. A (c) változat célja pedig eredményeink erősítése; már most érdemes hangsúlyozni, hogy későbbi (III. fejezetbeli) eredményeink többségében a Loc helyett az $\mathcal{S} \mathcal{P}_f$ (szintén lezárási operátor) is vehető.

2.§. Wille-Pixley algoritmus. Bár Wille [60]-beli és Pixley [55]-beli algoritmusai lényegében azonos, rendre Willére, illetve Pixleyre fogunk hivatkozni akkor, ha az algoritmus eredményeként adódó Malcev-típusú feltételt varietások, illetve lokális varietások esetében alkalmazzuk. Az algoritmust avval a formai eltéréssel ismertetjük, hogy gráfokat is szerepeltetünk. Minden fellépő gráf irányítatlan, két szögpontja bal és jobb végpont néven ki lesz tüntetve, s e végpontokat ábráink megfelelő szélein helyez-

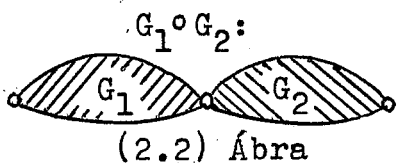
zük el. A gráfok éleit színezzük, párhuzamos élek fellep-
hetnek, hurokélek viszont nem. Ha G_1 és G_2 két ilyen gráf,
akkor belőlük soros kapcsolással egy újabb gráfot készíthe-
tünk. Soros kapcsoltjukat, $G_1 \circ G_2$ -t úgy kapjuk, hogy G_1
és G_2 diszjunkt uniójában G_1 jobb végpontját és G_2 bal vég-
pontját egymással azonosítjuk ((2.2) ábra). G_1 bal (ill.
 G_2 jobb) végpontja lesz az új gráf bal (ill. jobb) végpontja.
Adott G_i ($i \in I$) gráfokat pedig párhuzamosan is kapcsol-
hatunk. Párhuzamos kapcsoltjuk, $\bigwedge(G_i: i \in I)$ (de véges I
esetén értelemszerűen más jelölést is használunk) pedig
úgy keletkezik ((2.3) ábra), hogy a G_i -k diszjunkt egye-
sítettjében az egyes G_i -k bal, ill. jobb végpontjait azo-
nosítjuk egyetlen szögponttá, amely a $\bigwedge(G_i: i \in I)$ bal,
ill. jobb végpontja lesz. Tetszőleges G gráf esetén $V(G)$
és $E(G)$ a G szögpontjainak, illetve éleinek halmazát je-
lölí. Egy x -szel színezett, az a és b szögpontokat összekö-
tő élet (a, x, b) -vel fogunk jelölni; (a, x, b) és (b, x, a) azo-
nos élet jelöl. Abban is célszerű megállapodni, hogy ameny-
nyiben $V(G)$ elemeit rendszámokkal indexeljük, a 0 és 1 in-
dexet a bal, ill. a jobb végpont kapja. Érdemes hangsúlyozni,
hogy eddig (a későbbi hivatkozások kedvéért) végtelen grá-
fokat is megengedtünk.

Legyen X egy véges, nem üres változóhalmaz, és legyen $p =$
 $p(x: x \in X)$ egy, a $\wedge$, $\circ$ és $\vee$ műveleti jelekből felépülő
term. (Ilyen típusu termeknek—melyeket $\wedge \circ \vee$ -termeknek is
fogunk nevezni—a változóit csakis valamely A algebra kong-
ruenciáival fogjuk interpretálni, bár p kivezethet a kongru-
enciák köréből. Ha u és v egy A algebra reflexív relációi,
akkor az $u \wedge v$, $u \circ v$ és $u \vee v$ reflexív relációk jelentése
rendre $u \cap v$, $\{(x, y) \in A^2: (\exists z \in A)(xuz \text{ és } zvy)\}$ és
 $\bigcup(u \circ v \circ u \circ v \circ \dots \text{ (n tényező): } 2 \leq n < \omega).$) Tetszőleges
 $2 \leq k < \omega$ esetén p szerinti rekurzióval egy $G_k(p)$ gráfot de-

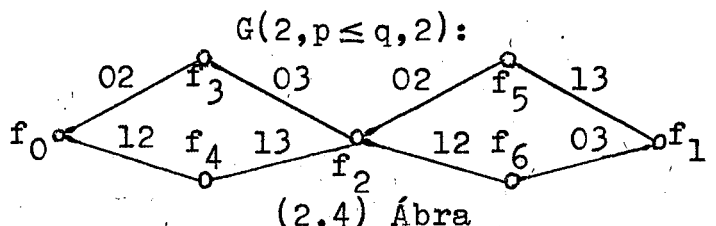
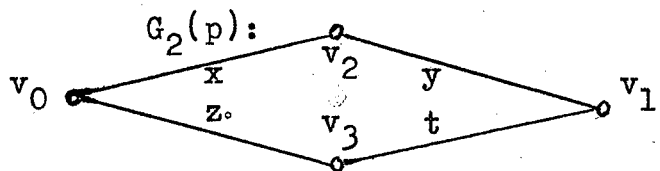
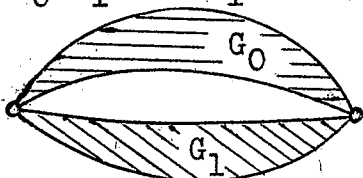
finiálunk. Ha $p \in X$ (azaz p változó), akkor $G_k(p)$ egyetlen p -vel színezett élből áll, amely a két végpontot köti össze: $\overset{p}{\text{---}}$, további élek és szögpon-
t nincsenek. A $p = p_1 \wedge p_2$, $p = p_1 \circ p_2$ és $p = p_1 \vee p_2$ ese-
tekben pedig $G(p)$ legyen rendre $G(p_1) \wedge G(p_2)$, $G(p_1) \circ G(p_2)$
és $G(p_1) \circ G(p_2) \circ G(p_1) \circ G(p_2) \circ \dots$ (k tényező, a soros
kapcsolási művelet asszociativitása miatt nem zárójelez-
tük).

Legyen $q = q(x: x \in X)$ egy másik $\wedge \vee$ -term, és m, n 1-nél
nagyobb egészek. Egy $G(m, p \leq q, n)$ gráfot fogunk most defi-
niálni. Először $x \in X$ -re legyen $e(x)$ a $G_m(p)$ szögponthalma-
za fölött a legszűkebb olyan ekvivalenciareláció, mely tar-
talmazza az $\{(a, b): (a, x, b) \in E(G_m(p))\}$ relációt. A
 $G(m, p \leq q, n)$ gráfot pedig úgy kapjuk a $G_n(q)$ -ből, hogy
minden $x \in X$ -re és a $G_n(q)$ minden x -szel színezett (a, x, b)
élére ezen él x színét az $e(x)$ színre cseréljük ki. (Azaz
minden $(a, x, b) \in E(G_n(q))$ élből $(a, e(x), b)$ lesz.) Abban is
állapodjunk meg, hogy $V(G_m(p))$ elemeit rendszámokkal in-
dexeljük, és $v \in V(G_m(p))$ esetén $v_e(x)$ jelöli a $V(G_m(p))$
legelső olyan u elemét, melyre $(u, v) \in e(x)$! (A legelső itt a
 $V(G_m(p))$ rögzített jólrendezésére vonatkozik, a
rendszámokkal indexelt $V(G_m(p))$ esetén legyen e jólrende-
zés az indexek szerinti.)

Például, ha $p = (x \vee y) \wedge (z \vee t)$ és $q = ((x \vee z) \wedge (y \vee t)) \vee$
 $\vee ((x \vee t) \wedge (y \vee z))$, akkor $G_2(p)$ és $G(2, p \leq q, 2)$ a (2.4) áb-



$G_0 \wedge G_1 = \bigwedge (G_i: i < 2)$:



rán látható. (Egy e ekvivalencia helyett a megfelelő osztályozást adjuk meg, $\{v_0, v_2\}$ helyett 02-t írunk, stb.)

Legyen $V = V(G_m(p))$ és $F := V(G(m, p \leq q, n))$. F elemeit V fölötti termszimbólumoknak (avagy függvényváltozóknak, hiszen e termék típusáról egyelőre nem mondtunk semmit) fogjuk tekinteni, és ez esetben az f_0 és f_1 végpontokhoz az $f_0(v: v \in V) = v_0$ és $f_1(v: v \in V) = v_1$ ún. végponti azonosságokat, a $G(m, p \leq q, n)$ tetszőleges $(f, e(x), g)$ éléhez pedig az $f(v e(x): v \in V) = g(v e(x): v \in V)$ azonosságot rendeljük. Az $U(m, p \leq q, n)$ erős Malcev-feltétel pedig legyen az alábbi:

„Léteznek $f(v: v \in V)$ ($f \in F$) termék, melyekre a két végponti azonosság és a $G(m, p \leq q, n)$ éleihez rendelt azonosságok teljesülnek”.

Más szóval (v.ö. bevezetés), $U(m, p \leq q, n)$ a két végponti egyenletből és a $G(m, p \leq q, n)$ éleihez rendelt egyenletekből álló egyenletrendszer, melyben V elemei individuumváltozók, F elemei pedig függvényváltozók.

Az említett példa esetén $U(2, p \leq q, 2)$ a következő: „léteznek $f_j(v_i: i \leq 3)$ ($j \leq 6$) termék, melyekre az

$$f_0(v_0, v_1, v_2, v_3) = v_0, \quad f_1(v_0, v_1, v_2, v_3) = v_1 \quad \boxed{\text{végponti azo-}}$$

$$\begin{aligned} \text{nosságok és az } f_0(v_0, v_1, v_0, v_3) &= f_3(v_0, v_1, v_0, v_3) \\ f_0(v_0, v_1, v_1, v_3) &= f_4(v_0, v_1, v_1, v_3) \\ f_2(v_0, v_1, v_2, v_0) &= f_3(v_0, v_1, v_2, v_0) \\ f_2(v_0, v_1, v_2, v_1) &= f_4(v_0, v_1, v_2, v_1) \\ f_2(v_0, v_1, v_0, v_3) &= f_5(v_0, v_1, v_0, v_3) \\ f_2(v_0, v_1, v_1, v_3) &= f_6(v_0, v_1, v_1, v_3) \\ f_1(v_0, v_1, v_2, v_1) &= f_5(v_0, v_1, v_2, v_1) \\ f_1(v_0, v_1, v_2, v_0) &= f_6(v_0, v_1, v_2, v_0) \end{aligned}$$

azonosságok teljesülnek”. (E feltétel némileg egyszerűbbé válik, ha a végponti azonosságokat elhagyjuk, és f_0, f_1 helyére a v_0, v_1 projekciókat írjuk.)

(2.5) Tétel (Pixley [55]). Legyen $p \leq q$ egy $\Lambda\mathcal{V}$ -azonosság, A pedig egy algebra. Ekkor az alábbi három feltétel ekvivalens:

(i) Minden $B \in \text{Loc}\{A\}$ -ra $p \leq q$ teljesül B tetszőleges kongruenciáira;

(ii) Minden $m \geq 2$ és az A minden F véges részhal-maza esetén létezik $n = n(m, F, A, p, q) \geq 2$, hogy $U(m, p \leq q, n)$ teljesül F -ben. (Azaz A típusának megfelelő és F -től is függő alkalmas termfüggvényekre az $U(m, p \leq q, n)$ -beli egyenletek F -ben azonosságként teljesülnek.);

(iii) Minden $m \geq 2$ -re és A minden véges F részhal-mazára létezik $n_0 = n_0(m, F, A, p, q) \geq 2$, hogy $n \geq n_0$ esetén $U(m, p \leq q, n)$ teljesül F -ben.

Megjegyzendő, hogy Pixley [55]-ben (iii) implicit. Definiciónk szerint $U(m, p \leq q, n)$ nem teljesen egyértelmű, pl. függ a $G_m(p)$ szögpontjainak rendezésétől. Bonyolultabb definíciókkal a teljes egyértelműség is elérhető lenne, de célszerű inkább abban megállapodni (együttal a későbbi fejezetek vonatkozásában is), hogy az egyébként egyenértékű lehetőségek közül egyet rögzítettnek gondolunk, és azt a kérdéses erős Malcev-feltételnek tekintjük. Speciális esetenként adódik a

(2.6) Tétel (Wille [60]). Az előző tételbeli $p \leq q$ akkor és csak akkor teljesül egy $\mathcal{V}$ varietás minden algebrájának kongruenciáira, ha bármely $m \geq 2$ -re létezik $n \geq 2$, hogy $U(m, p \leq q, n)$ teljesül $\mathcal{V}$ -ben.

A fenti két tételben szereplő $U(m, p \leq q, n)$ nyilván gráfok nélkül is definiálható (Pixley [55]). Az alábbi állítás (és a későbbi fejezetek) szerint a gráfok használata természetesnek tűnik. Legyen A egy algebra, $p = p(x: x \in X)$

egy $\Lambda\circ V$ -term, $k \geq 2$, φ pedig egy, az X -et A reflexív, szimmetrikus és kompatibilis relációinak halmazába képező leképezés. Egy $\psi: V(G_k(p)) \rightarrow A$ leképezést φ -re vonatkozó összekötő leképezésnek hívunk (és erre az esetre a $(\varphi, \psi): G_k(p) \rightarrow A$ jelölést használjuk), ha tetszőleges $(a, x, b) \in E(G_k(p))$ esetén $(a\psi, b\psi) \in x\varphi$. Ha valamely $c, d \in A$ -ra létezik $(\varphi, \psi): G_k(p) \rightarrow A$, hogy $(\text{bal végpont})\psi = c$ és $(\text{jobb végpont})\psi = d$, akkor c -t és d -t (φ -re vonatkozóan) $G_k(p)$ -vel összeköthetőnek nevezzük. Az alábbi állítás a definíciók egyszerű következménye, így nem igazoljuk.

(2.7) Gráflemma ([12]). Az előbbi jelölések mellett $u, v \in A$ -ra $(u, v) \in p(x\varphi: x \in X)$ pontosan akkor teljesül, ha valamely $k \geq 2$ -re u és v φ -re vonatkozóan $G_k(p)$ -vel összeköthető.

3.§. Az ℓ -kongruenciavarietások hálót alkotnak. A § címében szereplő állítás mellett a (2.1) (a), (b) és (c) definíciók ekvivalenciáját is igazoljuk – érdemes e két bizonyítást egyszerre végezni. A bizonyítás több lépésre tagolható.

(2.8) Segéd-tétel. Tetszőleges A γ -tipusu algebrához létezik olyan $\mathcal{G}$ típus és $\mathcal{G}$ -tipusu B algebra, hogy $\text{Con}(\text{Loc}\{A\}) = \text{Con}(\text{Loc}\{B\})$, $\mathcal{G}$ -ban nincs 0-változós műveleti jel, és B -nek van egyelemű részalgebrája.

Bizonyítás. A egy alkalmas reduktját fogjuk megadni B -ként. Rögzítsünk egy $b \in A$ elemet, legyen $H := \{F: F \subseteq A, b \in F \text{ és } F \text{ véges}\}$, és legyen Σ a $\text{Con}(\text{Loc}\{A\})$ -ban teljesülő hálózazonosságok halmaza! (Bár Σ tetszőleges elemét λ -val fogjuk jelölni, $\lambda: p \leq q$ feltehető.) A Pixley (2.5) tétel szerint minden $m \geq 2$, $F \in H$ és $\lambda \in \Sigma$ esetén létezik egy $n = n(m, F, A, \lambda) \geq 2$ úgy, hogy $U(m, \lambda, n)$ teljesül F -ben. Így létezik γ -termeknek egy olyan $T(m, \lambda, F)$ halmaza,

hogy ezen termekre F -ben teljesülnek az $U(m, \lambda, n)$ -ben kirótt azonosságok. Legyen B tartóhalmaza A , alapl műveletei pedig az $\bigcup (T(m, \lambda, F) : m \geq 2, \lambda \in \Sigma, F \in H)$ -beli termfüggvények legyenek. A Pixley-tétel szerint $\text{Con}(\text{Loc}\{A\}) = \text{Con}(\text{Loc}\{B\})$. O -változós műveletek B -ben nincsenek. Az $U(m, \lambda, n)$ -ben megkövetelt azonosságokból a $G(m, \lambda, n)$ összefüggősége folytán a kérdéses termék idempotenciája is következik. Így $T(n, \lambda, F)$ elemei F -ben idempotensek, tehát $\{b\}$ részalgebrája B -nek. Q.e.d.

(2.9) Tétel ([5]). Az ℓ -kongruenciavarietások a tartalmazásra nézve teljes hálót alkotnak. Ebben a hálóban ℓ -kongruenciavarietások tetszőleges halmazának az egyesítettje megegyezik a hálóvariетások hálójában vett egyesítettjükkel.

Megjegyzés. Megoldatlan probléma (Jónsson [47]) ezzel szemben az, hogy a kongruenciavarietások hálót alkotnak-e a tartalmazásra nézve.

Bizonyítás. Csak a (2.1)(b) definíciót alapul véve igazoljuk az állítást, de az alábbi (2.10) a definíciók ekvivalenciájának igazolásakor is hasznos lesz. Ha egy O -elemes parciálisan rendezett halmaz minden nem üres részhalmozának van szupremuma, akkor ez a halmaz teljes háló (Grätzer [29, 24. o.]). Ezért elegendő megmutatni, hogy

(2.10) Segéd-tétel. Tetszőleges nem üres I indexhalmazra és A_i τ_i -típusu algebrákra létezik olyan A algebra, hogy $\text{Con}(\text{Loc}\{A\}) = \bigvee (\text{Con}(\text{Loc}\{A_i\}) : i \in I)$ teljesül a hálóvariетások hálójában.

Bizonyítás. (2.8) szerint feltehető, hogy $\{a_i\}$ részalgebrája A_i -nek és τ_i -ben nincs O -változós műveleti jel. A Pixley-tétel szerint azt is feltehetjük, hogy A_i minden termfüggvénye alapl művelet. Ezen felül még azt is feltéte-

lezhethjük, hogy $\tau = \tau_i$ minden $i \in I$ -re. (Ellenkező esetben legyen $\tau := \bigcup (\tau_i : i \in I)$ és egy eddig nem definiált műveletet A_j -n első projekcióként definiálunk.)

Legyen $\tau = \bigcup (\tau_k : 1 \leq k < \omega)$, ahol most már τ_k a k -változós műveletjelek halmazát jelöli, és a $\tau'_k := \tau_k^I$ halmaz elemeit is tekintsük k -változós műveletjeleknek! Ekkor $\tau' := \bigcup (\tau'_k : 1 \leq k < \omega)$ is egy típus. Valamennyi A_i -t ($i \in I$) egy τ' típusu A'_i algebrának is tekinthetünk azáltal, hogy $f \in \tau'_k$ -re az f műveletjelhez ugyanazt az $A_i^k \rightarrow A_i$ műveletet rendeljük, mint $f(i) \in \tau_k$ -hoz. Mivel a termfüggvények A_i és A'_i esetében azonosak, a Pixley-tétel szerint

$\text{Con}(\text{Loc}\{A_i\}) = \text{Con}(\text{Loc}\{A'_i\})$. Legyen végül A a

$\prod (A'_i : i \in I)$ direkt szorzatnak a következő részalgebrája:

$A := \{d \in \prod (A'_i : i \in I) : \text{véges sok } i \in I \text{ kivételével } d(i) = a_i\}$.

A $\text{Con}(\text{Loc}\{A\})$ -ban, illetve $\text{Con}(\text{Loc}\{A'_i\})$ -ben teljesülő hálózatonosságok halmazát Σ -val, illetve Σ_i -vel jelölve

$\Sigma = \bigcap (\Sigma_i : i \in I)$ -t kell csak igazolnunk. Mivel A'_i részalgebrája A -nak, a Pixley-tétel szerint $\Sigma \subseteq \Sigma_i$, s így $\Sigma \subseteq \bigcap (\Sigma_i : i \in I)$.

A fordított irányú tartalmazás igazolásához legyen $\lambda \in \bigcap (\Sigma_i : i \in I)$, $m \geq 2$, és F egy véges részhalmaza A -nak. Ekkor $F_i := \{d(i) : d \in F\}$ majdnem minden i -re az egyelemű $\{a_i\}$ -vel egyezik meg. A Pixley-tétel szerint minden $i \in I$ -re létezik olyan i -től függő n_0 , hogy $n \geq n_0$ esetén $U(m, \lambda, n)$ teljesül F_i -ben. Minthogy egy egyelemű algebrában minden azonosság teljesül, $|F_i| = 1$ esetén $n_0 = 2$ -nek is választható. Így létezik egy közös, i -től független n , hogy $U(m, \lambda, n)$ valamennyi F_i -ben teljesül. Legyen $\{f_0, f_1, \dots, f_s\}$ az $U(m, \lambda, n)$ -ben szereplő függvényváltozók halmaza; $f_0^i, f_1^i, \dots, f_s^i$ pedig legyenek olyan τ - (hiszen τ' helyett τ is vehető) termek, hogy az általuk indukált termfüggvényekkel $U(m, \lambda, n)$ teljesül F_i -ben. Megállapodásunk szerint f_j^i együt-

tal γ -beli műveletjelnek is választható. Tekintsük most az $f'_j(i) := f_j^i$ ($j \leq s$) által definiált γ' -beli műveletjeleket! Ezek egyuttal γ' -termek is. Az $f'_0, \dots, f'_s$ termek révén pedig $U(m, \lambda, n)$ teljesül F-ben (mert a megkövetelt azonosságok az i -ik komponensekben, F_i -kben teljesülnek). A Pixley tétel szerint így $\lambda \in \Sigma$. Q.e.d.

A három definíció ekvivalenciájával kapcsolatban szükség lesz az alábbi állításra.

(2.11) Segéd-tétel. Tetszőleges U algebraosztály esetén $\text{Con}(U) = \text{Con}(H U)$ és $\text{Con}(U) = \text{Con}(D U)$.

Bizonyítás. Mivel egy algebra kongruenciahálójája rész-hálóként (sőt, duális ideálként) tartalmazza bármely faktoralgebrájának kongruenciahálóját, az első egyenlőség nyilvánvaló. A második igazolásához tegyük fel, hogy S az A részalgebráinak egy irányított és az A -t lefedő rendszere, s hogy egy $p(x: x \in X) \leq q(x: x \in X)$ hálóaazonosság valamennyi $\text{Con}(B)$ -ben ($B \in S$) teljesül. Legyen

$\text{con}: X \rightarrow \text{Con}(A)$ egy leképezés, és $(a_0, a_1) \in p(\text{con}(x): x \in X)$. A (2.7) gráflemma szerint valamely k -ra a_0 és a_1 $G_k(p)$ -vel összeköthető A -ban. Legyen (con, ψ) egy alkalmas összekötő leképezés és B pedig egy olyan S -beli részalgebra, amely tartalmazza a $V(G_k(p))\psi$ véges halmazt. A $\text{con}'(x) := \text{con}(x) \cap B^2$ jelöléssel élve $(\text{con}', \psi): G_k(p) \rightarrow B$, tehát $(a_0, a_1) \in p(\text{con}'(x): x \in X) \subseteq q(\text{con}'(x): x \in X) \subseteq q(\text{con}(x): x \in X)$. (Az utóbbi tartalmazás a gráflemmából, vagy indukcióval adódik.) Q.e.d.

Mármost a (2.1) (a), (b) és (c) definíciók ekvivalenciájához, és (2.10) folytán (2.9)-hez is elegendő belátni, hogy tetszőleges $\underline{V} \subseteq \underline{S} \underline{P}_f$ -zárt osztályhoz létezik olyan A algebra, melyre $\text{Con}(\underline{V}) = \text{Con}(\text{Loc}\{\underline{A}\})$ teljesül. Először is

legyen $\underline{U} := \underline{D} \underline{H} \underline{V} = \underline{D} \underline{H} \underline{S} \underline{P}_f \underline{V}$. Ekkor $\underline{U}$ lokális varietás, és (2.11) szerint $\underline{\text{Con}}(\underline{U}) = \underline{\text{Con}}(\underline{V})$. Legyen Σ a $\underline{\text{Con}}(\underline{U})$ -ban nem teljesülő hálózazonosságok halmaza, és minden $\lambda \in \Sigma$ -ra válasszunk egy olyan $A_\lambda \in \underline{U}$ algebrát, melyre λ nem teljesül $\underline{\text{Con}}(A_\lambda)$ -ban! Mivel $\underline{\text{Loc}}\{A_\lambda\} \subseteq \underline{U}$, a megfelelő hálózazonosságok halmazaira áttérve $\underline{\text{Con}}(\underline{U}) = \bigvee (\underline{\text{Con}}(\underline{\text{Loc}}\{A_\lambda\}) : \lambda \in \Sigma)$ könnyen adódik. Ekkor viszont (2.10) szerint alkalmas A algebrára $\underline{\text{Con}}(\underline{U}) = \underline{\text{Con}}(\underline{\text{Loc}}\{A\})$. Q.e.d.

4.§. ℓ -kongruenciavarietások és kongruenciavarietások kapcsolata. Eddig még az is elképzelhető lenne, hogy (2.9) csak azon egyszerű oknál fogva teljesül, hogy minden hálóvarietás ℓ -kongruenciavarietás. A helyzet nem ez; az alábbi két állítás bármelyike szerint például a  háló által generált hálóvarietás nem lehet ℓ -kongruenciavarietás.

(2.12) Állítás ([5]). Legyen $\underline{U}$ egy moduláris, de nem disztributív ℓ -kongruenciavarietás. Ekkor valamely $p \in \text{Pu}\{0\}$ -ra $\underline{\text{Con}}(\underline{Q}_p\text{-Mod}) \subseteq \underline{U}$.

Tehát a $\underline{\text{Con}}(\underline{Q}_p\text{-Mod})$ -ok ($p \in \text{Pu}\{0\}$) éppen a minimális moduláris ℓ -kongruenciavarietások. Innen az is következik, hogy az ℓ -kongruenciavarietások hálójában nem metszésfél-hálójában a hálóvarietások hálójának, hiszen az utóbbiban $p \neq q$ -ra $\underline{\text{Con}}(\underline{Q}_p\text{-Mod}) \wedge \underline{\text{Con}}(\underline{Q}_q\text{-Mod})$ tartalmazza az előbbi, nem disztributív hálót. Jegyezzük meg azt is, hogy fenti állításunk Freese [24,25] hasonló eredményét általánosítja, amely szerint a $\underline{\text{Con}}(\underline{Q}_p\text{-Mod})$ -ok ($p \in \text{Pu}\{0\}$) éppen a minimális moduláris kongruenciavarietások, és minden nem disztributív, moduláris kongruenciavarietás ezek egyikét tartalmazza. A (2.12) bizonyítása ([5]) mindössze annyiban tér el Freese, Herrmann és Huhn [25]-beli bizonyításától, hogy a $\text{dist}_n \stackrel{\text{cv}}{=} \text{dist}$ (Nation [52]) összefüggés helyett

az alábbi állítást használjuk. Jelöljük a $\underline{\text{cv}}$ -vel analóg módon definiált, ℓ -kongruenciavarietásokban tekintett következmény-relációt $\underline{\ell\text{cv}}$ -vel!

(2.13) Állítás. Bármely $n \in \mathbb{N}$ -re $\text{dist}_n \underline{\ell\text{cv}} \text{ dist}$.

Ezt az állítást nem igazoljuk. Ehelyett megjegyezzük, hogy ha egy $\lambda \underline{\text{cv}} \mu$ alakú állítást (gyenge) Malcev-feltételek használatával igazolunk, akkor ez a megfontolás csekély változtatásokkal (v.ö. (2.6) és (2.5) hasonlósága) gyakran $\lambda \underline{\ell\text{cv}} \mu$ igazolására is alkalmas. Így történik pl. (2.13) igazolása [5]-ben. (2.12) szerint (6.3) -ha benne $\underline{\text{cv}}$ helyett mindenütt $\underline{\ell\text{cv}}$ -t írunk- ℓ -kongruenciavarietásokra is érvényes. Ennél több érdemlegeset az $\underline{\ell\text{cv}}$ relációról nem nagyon tudunk. Még az sem ismeretes, hogy a kongruencia- és ℓ -kongruenciavarietások fogalma azonos-e, az alábbi állítás csak speciális esetet érint.

(2.14) Állítás ([6]). Legyen $\underline{V}$ egy lokálisan véges (azaz végesen generált tagjai végesek) lokális varietás. Ekkor $\underline{\text{Con}}(\underline{V}) = \bigvee (\underline{\text{Con}}(\underline{U}) : \underline{U} \subseteq \underline{V} \text{ és } \underline{U} \text{ varietás})$ teljesül a hálóvarietások hálójában. Ha emellett valamely n -re $\underline{V}$ n -felcserélhető, akkor $\underline{\text{Con}}(\underline{V})$ kongruenciavarietás.

Bizonyítás. Teljesüljön egy λ hálóazonosság $\underline{\text{Con}}(\underline{U})$ -ban minden $\underline{U}$ részvarietás esetén! Ha $F \subseteq A \in \underline{V}$ és F véges, akkor $\underline{\text{Con}}(\underline{\text{Loc}}\{[F]\}) \models \lambda$. (2.6) szerint tetszőleges $m \geq 2$ -re létezik n , hogy $\underline{\text{Loc}}\{[F]\} \models U(m, \lambda, n)$, s méginkább $F \models U(m, \lambda, n)$. Ennélfogva $\underline{\text{Con}}(\underline{\text{Loc}}\{A\}) \models \lambda$, így $\underline{\text{Con}}(\underline{V}) \models \lambda$. Ezzel $\underline{\text{Con}}(\underline{V}) \subseteq \bigvee (\underline{\text{Con}}(\underline{U}) : \underline{U} \subseteq \underline{V} \text{ és } \underline{U} \text{ varietás})$ igazolást nyert; a fordított tartalmazás triviális. Végül hivatkozzunk Freese [24]-beli eredményére, mely szerint ha egy fix n -re I -re W_i egy n -felcserélhető varietás minden $i \in I$ -re, akkor $\bigvee (\underline{\text{Con}}(W_i) : i \in I)$ kongruenciavarietás. Q.e.d.

Modulusvarietásokkal kapcsolatban hasonló állítást ((3.11)) fogunk igazolni.

III. MODULUSOK JELLEMZÉSE HÁLÓAZONOSSÁGOKKAL

1.§. Abel-csoportok spektruma és Steinitz-száma. Steinitz-számon egy $T = \prod (p^{T(p)} : p \in P)$ formális szorzatot értünk, ahol $T: P \rightarrow \omega+1$. E fogalom lép fel a prim karakterisztikájú és primtestük fölött algebrai, kommutatív testek leírásakor Jacobson [43, 147. o.] -ben. Az Abel-csoportok lokális varietásainak áttekintésénél is lényeges szerephez jut (Hu [36]). Egy $T = \prod (p^{T(p)} : p \in P)$ Steinitz-szám azonosítható a T függvénnyel (a jelölés is ezt tükrözi). N elemei is Steinitz-számként kezelhetők, s az oszthatóság is természetes módon értelmezhető (egy T_1 Steinitz-szám pontosan akkor oszt egy T_2 Steinitz-számot, ha minden $p \in P$ -re $T_1(p) \leq T_2(p)$). Az oszthatóságra nézve a Steinitz-számok teljes hálót alkotnak, melyet LT -vel jelölünk majd. Egy Abel-csoportokból álló, nem üres $\underline{K}$ osztály Steinitz-számán azt a $T_{\underline{K}}$ Steinitz-számot értjük, melyre $T_{\underline{K}}(p) := \sup \{n: 0 \leq n < \omega \text{ és létezik } x \in A \in \underline{K}, \text{ melyre } x \text{ rendje } p^n\}$. Ha $\underline{K} = \{A\}$, akkor $T_{\{A\}}$ helyett természetesen csak T_A -t írunk. Tetszőleges T Steinitz-számhoz a $\underline{K}_T := \{A: A \text{ Abel-féle torziócsoport és } T_A \text{ osztja } T\}$ osztály lokális varietás, és a $T \rightarrow \underline{K}_T$ leképezés izomorfizmust létesít a Steinitz-számok oszthatósági hálója és az Abel-féle torziócsoportokból álló lokális varietások hálója között (Hu [36]).

Vizsgálatainkhoz többnyire a Steinitz-szám következő általánosítására lesz szükség. Egy $S: \{0\} \cup P \rightarrow \omega+1$ függvényt spektrumnak nevezünk, ha

$$(1) S(0) < \omega, \text{ és}$$

(2) $S(0) > 0$ esetén bármely $p \in P$ -re $S(p) = S(0)(p)$ teljesül. (Itt $S(0)(p) = \sup \{i: 0 \leq i \text{ és } p^i \text{ osztja } S(0) - t\}$ annak megfelelően, hogy az $S(0)$ természetes számot is Steinitz-számnak tekintjük.) Egy S spektrum P -re való meg-

szorítottját -melyet S/P jelöl- szintén Steinitz-szám-
nak (is) fogjuk tekinteni. Legyen $\underline{K}$ egy Abel-csoportokból
álló, nem üres osztály, m, n pedig egész számok. Akkor mond-
juk, hogy a $D(m, n)$ oszthatósági feltétel teljesül $\underline{K}$ -ban,
ha bármely $A \in \underline{K}$ esetén $(\forall a \in A)(\exists y \in A)(my = na)$. A $\underline{K}$
spektrumán, $S_{\underline{K}}$ -n pedig az $S_{\underline{K}}(0) := \min\{n: n \in \mathbb{N} \text{ és } \underline{K} \models D(0, n)\}$
 $=: \exp(\underline{K})$ (a $\underline{K}$ exponense, itt $\min \emptyset := 0$) és $p \in P$ -re
 $S_{\underline{K}}(p) := \min\{n: 0 \leq n < \omega \text{ és } \underline{K} \models D(p^{n+1}, p^n)\}$ (itt viszont
 $\min \emptyset := \omega$) által definiált függvényt értjük. Ha $\underline{K} = \{A\}$
(egyelemű), akkor az S_A jelölést használjuk. Ha $\underline{K}$ modulusok-
ból, vagy gyűrűkből áll, akkor legyen $\underline{K}^+ := \{A^+: A \in \underline{K} \text{ és } A^+ \text{ az } A \text{ additív csoportja}\}$, és a $T_{\underline{K}}, \underline{K} \models D(m, n)$, illetve
 $S_{\underline{K}}$ fogalmakat rendre $T_{\underline{K}^+}$ -szal, $\underline{K}^+ \models D(m, n)$ -nel és $S_{\underline{K}^+}$ -szal
definiáljuk. Könnyen látható, hogy R gyűrűk esetén S_R -nek
és $R \models D(m, n)$ -nek az itteni és a bevezetésbeli definíciója
egyenértékű. Továbbá:

(3.1) Állítás. Az $S_{\underline{K}}: \{0\} \cup P \rightarrow \omega + 1$ függvény valóban spektrum.

Bizonyítás. Legyen $n := S_{\underline{K}}(0) > 0$! Csak azt kell belát-
nunk, hogy $p \in P$ -re $n(p) = S_{\underline{K}}(p)$. Léteznek $m \in \mathbb{N}$, $k, u, v \in \mathbb{Z}$
ugy, hogy $n(p) = k$, $n = p^k m$, $(m, p) = 1 = mu + pv$. Így tetszőle-
ges $a \in A \in \underline{K}$ esetén $p^k a = p^k(mu + pv)a = una + p^{k+1}va = u0 + p^{k+1}va =$
 $= p^{k+1}(va)$, azaz $S_{\underline{K}}(p) \leq k$. Másfelől, ha $w := S_{\underline{K}}(p) < k$ tel-
jesülne, akkor $\underline{K} \models D(p^{w+1}, p^w)$ -ből $\underline{K} \models D(p^k, p^{k-1})$ következ-
ne. Innen pedig bármely $a \in A \in \underline{K}$ esetén $(p^{k-1}m)a = m(p^{k-1}a) =$
 $m(p^k y) = ny = 0$ adódna, ami $S_{\underline{K}}(0) \leq p^{k-1}m < n = S_{\underline{K}}(0)$ miatt
ellentmondás. Q.e.d.

A spektrum „absztrakt” definícióját (3.1) mellett az is
indokolja, hogy minden S spektrumhoz létezik olyan $\underline{K}$, hogy
 $S = S_{\underline{K}}$. Sőt olyan R gyűrű is létezik, amelyre $S = S_R$ (Hutchin-
son [42, Prop. 4]). Bár $S_{\underline{K}}$ és $T_{\underline{K}}$ nem teljesen független

egymástól, $S_{\tilde{K}} \upharpoonright P = T_{\tilde{K}}$ általában nem teljesül. (Ha $\tilde{K} = \{Z^+ \times Z_p^+\}$, akkor $S_{\tilde{K}}(p) = \omega$ és $T_{\tilde{K}}(p) = 1$, míg $\tilde{K} = \{C(p^\infty)\}$ -re $S_{\tilde{K}}(p) = 0$ és $T_{\tilde{K}}(p) = \omega$.) Definíciónk szerint $S_{\tilde{K}}$ csak a $\tilde{K}$ -ban teljesülő oszthatósági feltételektől függ. Ennek a fordítottja is igaz:

(3.2) Állítás. Csak $\tilde{K}$ spektrumától függ az, hogy mely oszthatósági feltételek teljesülnek $\tilde{K}$ -ban. Részletesen: legyen $\tilde{K}$ egy Abel-csoportokból, gyűrűkből vagy modulusokból álló, nem üres osztály, és legyen $0 \leq m$, $1 \leq n$. Ekkor $D(m, n)$ pontosan akkor teljesül $\tilde{K}$ -ban, ha vagy

(1) $k := S_{\tilde{K}}(0) > 0$ és az m, k legnagyobb közös osztója osztja n -et, vagy

(2) $S_{\tilde{K}}(0) = 0 \neq m$ és az $m, S_{\tilde{K}} \upharpoonright P$ Steinitz-számok legnagyobb közös osztója osztja n -et.

Megjegyzések. (2) úgy is fogalmazható, hogy $S_{\tilde{K}}(p) = 0 \neq m$ és $(\forall p \in P)(m(p) > n(p) \Rightarrow n(p) \geq S_{\tilde{K}}(p))$. Esetenként (amikor nem $S_{\tilde{K}}$, hanem m, n rögzített) kényelmesebb (3.2) alábbi, átfogalmazott alakját használni: Ha $mn \neq 0$, akkor $\tilde{K} \models D(m, n)$ avval ekvivalens, hogy $(\forall p \in P)(m(p) > n(p) \Rightarrow n(p) \geq S_{\tilde{K}}(p))$. Ha pedig $m = 0$ és $n \neq 0$, akkor $\tilde{K} \models D(m, n)$ azzal egyenértékű, hogy $0 \neq S_{\tilde{K}}(0)$ és $S_{\tilde{K}}(0)$ osztja n -et. A (3.2) állítás Hutchinsontól [42] származik arra a speciális esetre, amikor $\tilde{K}$ egyetlen gyűrűből áll. Hutchinson bizonyítása a gyűrűbeli szorzást is használja, mi ezt nyilván nem tehetjük; egyebekben az ő gondolatmenetét [42] fogjuk követni.

Bizonyítás. Tekintsük az $S_{\tilde{K}}(0) = k > 0$ esetet! Ekkor tetszőleges $x \in A \in \tilde{K}$ -ra x rendje véges és k -nak osztója. Tegyük fel, hogy $(m, k) \mid n$, és vezessük be az alábbi jelöléseket: $0 < c := (m, k) = am + bk$, $m_1 := m/c$, $k_1 := k/c$, $n_1 := n/c$

(valamennyi új betű egész számot jelöl) ! Tetszőleges

$x \in A \in \tilde{K}$ -ra $nx = n_1 cx = n_1(am + bk)x = mn_1 ax + k(n_1 bx) =$
 $= m(n_1 ax)$, tehát $\tilde{K} \models D(m, n)$. Fordítva, teljesüljön $D(m, n)$
 $\tilde{K}$ -ban! A fenti jelöléseket n_1 kivételével megtartva le-
gyen $n = qc + r$ ($q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < c$). Ekkor tetszőleges $x \in A \in \tilde{K}$
esetén $rk_1 x = (n - qc)k_1 x = nk_1 x - qck_1 x = k_1 nx - k(qx) = k_1 nx =$
 $= k_1 my = k_1 m_1 cy = k(m_1 y) = 0$ alkalmas $y \in A$ -ra. Így $0 \leq rk_1 <$
 $< ck_1 = S_{\tilde{K}}(0)$ miatt $rk_1 = 0$, tehát $r = 0$ és $c \mid n$.

Tekintsük most az $S_{\tilde{K}}(0) = 0$ esetet! Teljesüljön $D(m, n)$
 $\tilde{K}$ -ban! Ekkor $m \neq 0$. Ha valamely $p \in P$ -re $a := m(p) > b := n(p)$,
akkor legyen $m = p^a m_1$, $n = p^b n_1$ ($p \nmid m_1 n_1$). Alkalmas c, d
egészekre $1 = cp + dn_1$. Bármely $x \in A \in \tilde{K}$ -ra $p^b x = p^b(cp + dn_1)x =$
 $cp^{b+1}x + dp^b n_1 x = p^{b+1}cx + n(dx) = p^{b+1}cx + my = p^{b+1}(cx + m_1 p^{a-b-1}y)$
alkalmas $y \in A$ -ra. Így $\tilde{K} \models D(p^{b+1}, p^b)$, tehát $b \geq S_{\tilde{K}}(p)$,
azaz (2) teljesül. Fordítva, most (2)-t tegyük fel! Elő-
ször vegyük észre, hogy ha $p \in P$ -re $S_{\tilde{K}}(p) \leq u < \omega$ vagy
 $0 \leq v \leq u < \omega$, akkor $\tilde{K} \models D(p^v, p^u)$. Valóban, $v \leq u$ esetén ez
triviális, $w := S_{\tilde{K}}(p) \leq u < v$ esetén pedig bármely $x \in A \in \tilde{K}$ -ra
 $p^u x = p^{u-w}(p^w x) = p^{u-w}(p^{w+1} y_1) = p^{u+1-w}(p^w y_1) = p^{u+1-w}(p^{w+1} y_2) =$
 $= p^{u+2-w}(p^w y_2) = \dots = p^{v-1-w}(p^{w+1} y_{v-u}) = p^v y_{v-u}$ alkalmas
 $y_1, \dots, y_{v-u} \in A$ elemekkel. Mármint, ha m és n primitív-
nyezős felbontása $p_1^{v_1} \dots p_t^{v_t}$, illetve $p_1^{u_1} \dots p_t^{u_t}$ ($v_i, u_i \geq 0$),
akkor az előző észrevétel és (2) szerint $1 \leq i \leq t$ -re
 $\tilde{K} \models D(p_i^{v_i}, p_i^{u_i})$. Így tetszőleges $x \in A \in \tilde{K}$ -ra
 $nx = p_1^{u_1} \dots p_{t-1}^{u_{t-1}} (p_t^{u_t} x) = p_1^{u_1} \dots p_{t-1}^{u_{t-1}} p_t^{v_t} y_1 =$
 $= p_1^{u_1} \dots p_{t-2}^{u_{t-2}} p_t^{v_t} (p_{t-1}^{u_{t-1}} y_1) = p_1^{u_1} \dots p_{t-2}^{u_{t-2}} p_t^{v_t} p_{t-1}^{v_{t-1}} y_2 = \dots =$
 $= m y_t$, tehát $\tilde{K} \models D(m, n)$. Q.e.d.

(3.3) Következmény ($\tilde{K} = \{R\}$ -re Hutchinson [42]). Tet-
szőleges, véges sok $(m_1, n_1), \dots, (m_t, n_t)$ párhoz ($m_i \geq 0$,
 $n_i \geq 1$) létezik egy olyan, algoritmussal nyerhető (m, n)

pár ($m \geq 0, n \geq 1$), amelyre tetszőleges, Abel-csoportokból, modulusokból vagy gyűrűkből álló $\mathcal{K}$ osztály esetén a " $\mathcal{K} \models D(m,n)$ " és az " $i = 1, \dots, t$ -re $\mathcal{K} \models D(m_i, n_i)$ " feltételek ekvivalensek.

A bizonyítást elhagyjuk, mert szó szerint (csak [42, Prop. 1] helyett kell (3.2)-re hivatkozni) megegyezik Hutchinson [42, Prop. 2] -re adott bizonyításával.

2.§. Modulusok jellemzése hálózatonosságokkal. Legyen A egy R gyűrű feletti modulus (unitér, mint mindig). Ekkor $F \subseteq A$ -ra $\text{Ann}(F) := \{r \in R : \text{bármely } u \in F \text{-re } ru = 0\}$ R -nek balideálja. Ezért $\text{Ann}(F)$ (és R is) R feletti modulusnak tekinthető a természetes módon (ha R -et önmaga feletti modulusként kezeljük, akkor az ${}_R R$ jelölést használjuk). Beszélhetünk az ${}_R R / \text{Ann}(F)$ faktormodulusról is. Bár $\lambda(m,n)$ -et csak a (4.8) előtt fogjuk definiálni, az alábbi tételt itt célszerű kimondani.

(3.4) Tétel. Legyen $m \geq 0, n \geq 1$, A egy R gyűrű feletti modulus, λ pedig egy hálózatonosság. Ekkor

(a) Létezik - és algoritmussal meghatározható - olyan (m_λ, n_λ) számpár ($m_\lambda \geq 0, n_\lambda \geq 1$), hogy λ pontosan akkor $\text{Con}(\text{Loc}\{A\})$ -ban (vagy, ami ezzel ekvivalens, $\text{Con}(\text{P}_f\{A\})$ -ban), ha az A minden véges F részhalmazára a $D(m_\lambda, n_\lambda)$ oszthatósági feltétel teljesül az ${}_R R / \text{Ann}(F)$ modulusban;

(b) $\lambda(m,n)$ pontosan akkor teljesül $\text{Con}(\text{Loc}\{A\})$ -ban (avagy $\text{Con}(\text{P}_f\{A\})$ -ban), ha az A minden véges F részhalmazára ${}_R R / \text{Ann}(F) \models D(m,n)$.

Továbbá az ${}_R R / \text{Ann}(F)$ -ben akkor és csak akkor teljesül $D(m,n)$, ha valamely $x \in R$ esetén $mx - n1_R \in \text{Ann}(F)$. $\uparrow$ teljesül

Bizonyítás. Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a tétel utolsó mondatában szereplő állítás könnyen adódik abból, hogy $1_R + \text{Ann}(F)$ generálja az ${}_R R / \text{Ann}(F)$ modulust. (2.11)-ből pedig az adódik, hogy $\text{Con}(\text{Loc}\{A\})$ -ban és $\text{Con}(\underline{P}_f\{A\}) = \text{Sub}(\underline{P}_f\{A\}) = \text{Sub}(\underline{S} \underline{P}_f\{A\}) = \text{Con}(\underline{S} \underline{P}_f\{A\})$ -ban egyazon azonosságok teljesülnek.

Legyen λ egy hálóazonosság, és tekintsük azt a λ' azonosságot, amely λ -ból úgy keletkezik, hogy minden egyes v műveletjelet o -re cserélünk ki! Ekkor λ' v -mentes, és az $U := U(m, \lambda', n)$ erős Malcev-feltétel nem függ (m, n) -től. Az U

$$(\alpha) \quad f_i(x_j: j < t) = x_i \quad (i = 0, 1) \quad \text{és}$$

$(\beta) \quad f_i(x_{je}: j < t) = f_k(x_{je}: j < t) \quad (e: \{0, \dots, t-1\} \rightarrow \{0, \dots, t-1\}, \text{ de csak bizonyos ilyen leképezések lépnek fel})$ alakú egyenletekből áll. A Pixley (2.5) tétel szerint, figyelembe véve a kongruencia-felcserélhetőséget is,

$\text{Con}(\text{Loc}\{A\}) \models \lambda$ pontosan akkor teljesül, ha A minden, a 0 -t tartalmazó véges F részhalmazára U teljesül F -ben.

($A \neq \emptyset$ nyilván feltehető, hiszen ekkor $F \setminus \{0\}$ -ban még inkább teljesül U). Minden $A^t \rightarrow A$ termfüggvény egy alkalmas $\sum(r_j x_j: j < t)$ termfüggvénnyel egyezik meg. Ennélfogva U pontosan akkor teljesül F -ben, ha léteznek $r_{ij} \in R$ elemek olymódon, hogy az $f_i(x_j: j < t) := \sum(r_{ij} x_j: j < t)$ termekkel F -ben azonosságként teljesülnek az U -beli egyenletek. Mármint az (α) , illetve (β) alakú azonosságok F -beli teljesülése ekvivalens az

$$(\alpha') \quad r_{ii} - 1 \in \text{Ann}(F) \text{ és } j \neq i \text{ -re } r_{ij} \in \text{Ann}(F), \text{ illetve a}$$

$$(\beta') \quad A \text{ Kere ekvivalencia minden } C \text{ osztályára}$$

$$\sum(r_{ij} - r_{kj}: j \in C) \in \text{Ann}(F)$$

feltételekkel. (E feltételek nyilván elegendők; a szükségesség, pl. (β') -é pedig az $x_j := 0 \in F \quad (j \notin C) \quad x_j := x \in F \quad (j \in C)$ helyettesítéssel látható be.) Az $\bar{r}_{ij} := r_{ij} + \text{Ann}(F)$

jelölést bevezetve (α') és (β') úgy is írható, hogy
 $(\alpha'') \bar{r}_{ii} = \bar{1}$ és $j \neq i$ -re $\bar{r}_{ij} = \bar{0}$ $R_F := R/\text{Ann}(F)$ -ben,

(β'') A Kere minden C osztályára

$$\sum (\bar{r}_{ij} - \bar{r}_{kj} : j \in C) = \bar{0} \quad R_F \text{ -ben.}$$

Az alábbiakban „egységelemes” $M \in R\text{-Mod}$ modulusokat is tekinteni fogunk. Ez annyit jelent, hogy M -et egy l_M -mel jelölt kitüntetett eleme (mint R -modulust) generálja. Ha $M = R_F$, akkor $l_M := \bar{1} = l_R + \text{Ann}(F)$. Ha pedig $M = R$, akkor $l_M := l_R$ (az R gyűrű egységeleme). Jegyezzük meg, hogy egy $D(k_1, k_2)$ oszthatósági feltétel pontosan akkor teljesül egy egységelemes M modulusban, ha valamely $y \in M$ -re $k_1 y = k_2 l_M$. Ha $\underline{b}$ egy k -dimenziós egész vektor, M egy egységelemes modulus, akkor legyen $\underline{b}_M \in M^k$ a $(\underline{b}_M)_i = b_i \cdot l_M$ ($1 \leq i \leq k$) feltételek által meghatározott vektor.

Mármost az összes (α'') és (β'') alakú egyenletet egy $E(\lambda)$: $\underline{B}\underline{y} = \underline{b}$ alakú formális lineáris egyenletrendszerbe foglalhatjuk össze, ahol B egy $k \times l$ -es egész mátrix, $\underline{y}$ és $\underline{b}$ egy-egy l -, ill. k -dimenziós oszlopvektor, $\underline{y}$ az R_F -beli ismeretlenekből (az $\bar{r}_{ij}$ -kből), $\underline{b}$ 0 és 1 egész számokból áll. A formális jelző itt és a későbbiekben is arra utal, hogy az egyenletrendszer alakja R_F -től független. Ha M egy egységelemes modulus és $\underline{r} \in M^l$, akkor $\underline{r}$ -et $\underline{B}\underline{y} = \underline{b}$ M -beli megoldásának mondjuk, ha $\underline{B}\underline{r} = \underline{b}_M$. Az alábbi segédtevélt az $E = E(\lambda)$, $M = R_F$ szereposztásban használjuk majd.

(3.5) Segédtevélt (Frobenius [27]). Legyen E : $\underline{B}\underline{y} = \underline{b}$ egy formális lineáris egyenletrendszer (B , $\underline{b}$ és $\underline{y}$ dimenziója a fenti). Ekkor létezik olyan H $l \times l$ -es és B' $k \times l$ -es egész mátrix, valamint egy $\underline{b}'$ egész oszlopvektor, hogy az E' : $B'\underline{y}' = \underline{b}'$ egyenletrendszert tekintve érvényesek az alábbiak: H^{-1} létezik és egész mátrix, B' diagonális, azaz $i \neq j$ -re $(B')_{ij} = 0$, továbbá tetszőleges M egységelemes modulus (vagy gyűrű) esetén az $\underline{r}' \mapsto H\underline{r}'$ leképezés az E' M -beli megoldásvektorainak halmazát kölcsönösen egyértelműen ráképezi az E M -beli megoldásvektorainak halmazára.

Bizonyítás. Frobenius eredménye tulajdonképpen azt állítja, hogy bármely B egész mátrixhoz létezik olyan C és H négyzetes egész mátrix, melyek inverze is egész, és CBH diagonális. Könnyen látható, hogy $B' := CBH$, $\underline{b}' := C\underline{b}$ és $H := H$ eleget tesz a kívánalmaknak. Q.e.d.

A segédtevéltből most csupán annyit fogunk használni, hogy

E pontosan akkor oldható meg M -ben, amikor E' . Azonban E' M -beli megoldhatósága a diagonalitás folytán a $D((B')_{ii}, (\underline{b}')_i) \quad (1 \leq i \leq \min\{k, \ell\})$ és a $D(0, (\underline{b}')_i) \quad (\ell < i \leq k)$ oszthatósági feltételek egyidejű M -beli teljesülésével ekvivalens. Mivel a (3.5)-beli B' és $\underline{b}'$ algoritmussal nyerhető, (3.3) szerint létezik olyan, algoritmus-sal nyerhető $m(E') \geq 0, n(E') \geq 1$ egész, hogy E' M -beli megoldhatósága $D(m(E'), n(E'))$ M -beli teljesülésével egyenértékű. Az $M = R_F, E = E(\lambda)$ szereposztásra visszatérve olyan $m_\lambda := m(E'(\lambda)), n_\lambda := n(E'(\lambda))$ adódik, melyekkel a tétel (a) része teljesül. Az eddigi megfontolásokból (3.2) segítségével az is adódik, hogy

(3.6) Segéd-tétel. Tetszőleges E véges, formális, lineáris egyenletrendszer reguláris, azaz egy R gyűrűben való megoldhatósága csakis az R spektrumától függ.

(A segéd-tétel használatára csak később kerül sor.)

Az eddigiek szerint létezik egy olyan (m', n') pár a (b) esetben is, hogy $\text{Con}(\text{Loc}\{A\}) \models \lambda(m, n)$ és $(\forall F \text{ véges } \subseteq A) (\exists x \in R) (m'x - n'l_R \in \text{Ann}(F))$ tetszőleges R gyűrű esetén ekvivalensek. Elég tehát $D(m', n')$ és $D(m, n)$ egyenértékűségét igazolnunk. Legyen S egy tetszőleges spektrum, R_S pedig egy S spektrumu gyűrű (Hutchinson [42] vagy (3.8)). (4.8) szerint $D(m, n)$ pontosan akkor teljesül R_S -ben, ha $\text{Con}(R_S\text{-Mod}) \models \lambda(m, n)$. Mivel minden szabad R_S -modulus $D \text{ } \mathbb{P}_{R_S} \{R_S\}$ -beli, $R_S\text{-Mod} = \text{Loc}\{R_S\}$. Ezért $\text{Con}(R_S\text{-Mod}) \models \lambda(m, n)$ azzal ekvivalens, hogy minden véges $F \subseteq R_S$ -re $(\exists x \in R_S) (m'x - n'l_{R_S} \in \text{Ann}(F))$. Viszont $F = \{1_{R_S}\}$ esetén $\text{Ann}(F) = 0$, így ezen utóbbi feltétel $R_S \models D(m', n')$ -vel egyenértékű. Minthogy $D(m, n)$ és $D(m', n')$ teljesülése csak a szóban forgó modulus spektrumától függ ((3.2)), és valamennyi S spektrumot (R_S -sel) tekintetbe vettünk,

a két oszthatósági feltétel valóban ekvivalens. Q.e.d.

3.§. Gyűrűk jellemzése hálózatonosságokkal. Most azt vizsgáljuk, hogy egy R gyűrű mely tulajdonságai tükröződnek a $\text{Con}(R\text{-Mod})$ -ban teljesülő azonosságokban. Az előző bizonyítás során láttuk, hogy $R\text{-Mod} = \text{Loc}\{R\}$, és azt is könnyű észrevenni ($\text{Ann}\{1_R\} = \{0_R\}$ alapján), hogy egy $D(m,n)$ oszthatósági feltétel pontosan akkor teljesül $R/\text{Ann}(F)$ -ben minden véges $F \subseteq_R R$ esetén, ha $R \models D(m,n)$. Így (3.4)-ből azonnal adódik a

(3.7) Következmény ([42]). Tetszőleges R gyűrűre

(a) $\text{Con}(R\text{-Mod}) \models \lambda$ és $R \models D(m_\lambda, n_\lambda)$ ekvivalensek;

(b) $\text{Con}(R\text{-Mod}) \models \lambda(m,n)$ és $R \models D(m,n)$ ekvivalensek.

Megjegyzés. $\lambda(m,n)$ helyett [42]-ben más, szintén alkalmas hálózatonosságokat adtunk meg. Speciális (m,n) párok (nevezetesen $(0,n)$ és $(m,1)$) esetén az első $D(m,n)$ -et jellemző azonosságokat Herrmann és Huhn [34] találta. Érdemes hangsúlyozni, hogy, pl. (4.3) következtében, $\text{Con}(R\text{-Mod}) = \text{Con}(\text{P}_f\{R\})$. utlag

Most adott S spektrumhoz egy R_S S -spektrumu gyűrűt definiálunk. $S(0) = m \neq 0$ esetén $R_S := Z_m$. Ha pedig $S(0) = 0$, akkor $\text{FR}(X)$ -szel jelölve az $X := \{x_p : p \in P\}$ által generált szabad kommutatív (és persze egységelemes) gyűrűt, (J_S) -sel pedig a $J_S := \{p^{S(p)}(px_p - 1) : p \in P \text{ és } S(p) < \omega\}$ által generált ideált, $R_S := \text{FR}(X)/(J_S)$. Szükség lesz még egy fogalomra. Akkor mondjuk, hogy $S_1 \leq S_2$ (S_1, S_2 spektrumok), ha $S_1(0) \mid S_2(0)$ és minden $p \in P$ -re $S_1(p) \leq S_2(p)$. Ezen rendezésre nézve – amint ez könnyen látható – a spektrumok egy teljes hálót alkotnak, melyet SL -lel fogunk jelölni. E hálóban az egyesítés a következő: $\bigvee (S_i : i \in I)$ a 0 helyen

az $\{S_i(0): i \in I\}$ halmaz $N\{0\}$ -beli legkisebb közös többszörösét, egy $p \in P$ helyen pedig az $\{S_i(p): i \in I\}$ halmaz szupremumát veszi fel értékként.

(3.8) Állítás (nagyreszt Hutchinson [42]). R_S spektruma S , és valahányszor $S_1 \leq S_2$, mindannyiszor R_{S_1} az R_{S_2} -nek homomorf képe (homomorfizmuson 1-tartó gyűrűhomomorfizmust értünk).

Bizonyítás. R_S spektrumát illetően Hutchinson [42]-re hivatkozunk. Az $S_1(0) \cdot S_2(0) \neq 0$ eset triviális. Ha $S_1(0) = S_2(0) = 0$, akkor $(J_{S_1}) \supseteq (J_{S_2})$, s a II. izomorfizmustétel alkalmazható. Ha pedig $S_1(0) = m \neq 0$ és $S_2(0) = 0$, akkor $p \in P$ -re $S_1(p) < \omega$. Válasszunk olyan $y_p \in Z_m$ elemeket, melyekre $\begin{matrix} S_1(p) \\ p \end{matrix} (py_p - 1) = 0$ (Z_m -ben). Ekkor annak az egyértelműen meghatározott $FR(X) \rightarrow Z_m$ 1-tartó gyűrűhomomorfizmusnak, melyre $x_p \mapsto y_p$, a magja tartalmazza (J_{S_2}) -t. Az izomorfizmustétel megint alkalmazható. Q.e.d.

A szóban forgó varietások helyett azonosságalmazokra áttérve az alábbi állítás könnyen adódik a (3.2), (3.7) és (3.8) állításokból is.

(3.9) Állítás (Hutchinson [42, Thm.5]). A $\text{Con}(\underline{R\text{-Mod}})$ (R gyűrű) alaku kongruenciavarietások a tartalmazásra nézve teljes hálót alkotnak. Ez a háló egyrészt izomorf a spektrumok SL hálójával (a $\text{Con}(\underline{R\text{-Mod}}) \mapsto S_R$ leképezés izomorfizmust létesít, melynek inverze $S \mapsto \text{Con}(\underline{R_S\text{-Mod}})$), másrészt az e hálóban tekintett egyesítés megegyezik a hálóvarietások hálójában tekintettel.

4.§. Abel-csoportok jellemzése hálóazonosságokkal. Most azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy egy A Abel-csoport mely tulajdonságai tükröződnek $\text{Con}(\underline{\text{Loc}\{A\}}) = \text{Con}(\underline{P_f\{A\}})$ -ban.

Az alábbi észrevétel szerint a helyzet a gyűrűkéhez hasonló. Egy T Steinitz-számra jelöljük $\hat{T}$ -pal azt a spektrumot, amelyre $\hat{T} \nmid P = T$, továbbá $\hat{T}(0) = T$, ha $T \in \mathbb{N}$, illetve $\hat{T}(0) = 0$, ha $T \notin \mathbb{N}$.

(3.10) Állítás (nagyrészt Huhn [39]). A $\text{Con}(\underline{K})$ ($\underline{K}$ Abel-csoportokból álló lokális varietás) alaku ℓ -kongruenciavarietások a tartalmazásra nézve teljes hálót alkotnak. Ez a háló egyrészt izomorf a Steinitz-számok LT hálójával, (a $\text{Con}(\underline{K}) \mapsto T_{\underline{K}}$ leképezés izomorfizmus, melynek inverze a $T \mapsto \text{Con}(\underline{K}_T)$ leképezés), másrészt pedig a hálóvarietások hálójának $\bigvee$ -részhálója. Továbbá bármely $T \in \text{LT}$ -re $\text{Con}(\underline{K}_T) = \text{Con}(\underline{R}_{\hat{T}}\text{-Mod})$.

Megjegyzés. Éppen az előbbi, Huhn Andrástól származó eredmény adta az ötletet az ℓ -kongruenciavarietások bevezetéséhez [5].

Bizonyítás. A $\text{Con}(\underline{K}_T) = \text{Con}(\underline{R}_{\hat{T}}\text{-Mod})$ igazolásához $\underline{K}_T$ $\mathbb{Z}$ -modulusok lokális varietásának is tekinthető (a természetes módon). $\underline{K}_T$ zárt a (diszkrét) direkt összegre (mert $\mathbb{D}_{P_f}$ -re is), így valamelyik, mondjuk A_T tagja generálja (Hu [36]). Tehát $\underline{K}_T = \text{Loc}\{A_T\}$. Az A_T Steinitz-száma szükségképpen T (mert bármely Abel-féle B torziócsoportra $T_B = T_{\text{Loc}\{B\}}$).

Az $(1) \{Z' / \text{Ann}(F) : F \subseteq A_T \text{ és } F \text{ véges}\} = \{Z'_k : k \in \mathbb{N} \text{ és } k \mid T\}$

egyenlőség ismert, elemi, Abel-csoportelméleti összefüggésekből (pl. $(m, n) = 1$ esetén egy m -edrendű és egy n -edrendű elem összege mn -edrendű) könnyen adódik. (A ' csak arra utal, hogy a jelzett strukturákat mint $\mathbb{Z}$ -modulusokat tekintjük.) Mármost (1) és (3.4)(a) szerint egy λ hálózatonosság pontosan akkor teljesül $\text{Con}(\underline{K}_T)$ -ben, ha bármely $k \mid T$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén $Z'_k \models D(m_\lambda, n_\lambda)$. Ezen utóbbi feltétel viszont $S_{Z'_k}(0) = k \neq 0$ és (3.2) szerint azzal ekvivalens,

hogy m_λ és T legnagyobb közös osztója (legyen ez T az $m_\lambda = 0$ esetben) osztja n_λ -t. Ez viszont (3.2) és (3.7) szerint pontosan akkor teljesül, ha $\text{Con}(\hat{R}_T\text{-Mod}) \models \lambda$.
Tehát $\text{Con}(\hat{K}_T) = \text{Con}(\hat{R}_T\text{-Mod})$.

Jelöljük T_0 -al a $\prod(p^\omega: p \in P)$ Steinitz-számot. Az egyetlen nem $\hat{K}_T$ alakú, Abel-csoportokból álló lokális varietás az összes Abel-csoportot tartalmazó $A_0 (= \text{Loc}\{Z^+\})$, de $\text{Con}(A_0) = \text{Con}(Z\text{-Mod}) = \text{Con}(\hat{R}_{T_0}\text{-Mod}) = \text{Con}(\hat{K}_{T_0})$. Így az $LT \rightarrow \{\text{Con}(\hat{K}): \hat{K} \text{ lokális Abel-csoportvarietás}\}$, $T \mapsto \text{Con}(\hat{K}_T)$ leképezés ráképezés. Mivel minden 0-elemes V -félháló háló (Grätzer [29, 24. o.]), az állítás (3.9)-ből és a $\text{Con}(\hat{K}_T) = \text{Con}(\hat{R}_T\text{-Mod})$ összefüggésből már adódik. Q.e.d.

A most igazolt állítás szerint Abel-csoportokból kiindulva nem kaphatunk olyan ℓ -kongruenciavarietást, amely nem kongruenciavarietás (ez egyébként (2.14)-ből is következik, hiszen $\hat{K}_T$ lokálisan véges). Modulussok esetén is hasonló a helyzet (s ez már nem speciális esete (2.14)-nek).

(3.11) Állítás. Legyen $\underline{V}$ egy R gyűrű feletti modulusokból álló osztály. (Itt – és csak itt – R nem feltétlenül egységelemes, és nem unitér modulusokat is megengedünk.) Tegyük fel, hogy minden $A \in \underline{V}$ -re létezik olyan egynél nagyobb (akár végtelen) k kitevő, hogy $A^k \in \underline{I}\underline{V}$. Ekkor $\text{Con}(\underline{V})$ kongruenciavarietás, és alkalmas B gyűrűre $\text{Con}(\underline{V}) = \text{Con}(B\text{-Mod})$. (B már újból a szokásos, egységelemes).

Bizonyítás. Feltehető, hogy R egységelemes, és $\underline{V}$ unitér modulusokból áll. Ellenkező esetben ugyanis tekintjük a $Z \times R$ halmazon az $(m, a) + (n, b) := (m+n, a+b)$, $(m, a) \cdot (n, b) := (mn, mb+na+ab)$ műveleteket. Egy R^* gyűrűt kapunk (az R úgynevezett Dorroh-bővítését). (R^* elemei formális $m+a$ alakú összegeknek képzelhetők el). R^* már egységelemes, és $A \in \underline{V}$ –

re A -t az $(m,a)x := mx+ax$ ($x \in A$, $(m,a) \in R^*$) definíció R^* fölötti unitér modulussá teszi. Mivel a termfüggvények (s ezért a direkt hatványok és részmodulushálók) nem változtak, $\underline{V}$ helyett $\underline{V}^* := \{A^* : A \in \underline{V}\}$ is vehető.

Tehát feltettük, hogy R egységelemes és $\underline{V}$ unitér modulusokból áll. $A \in \underline{V}$ -re legyen $\underline{N}(A) := \{C : C \in \underline{V} \text{ és } A \text{ valamely direkt hatvány izomorf } C\text{-vel}\}$. A megfelelő azonosság-halmazokra áttérve világos, hogy a hálóvarietások hálójában $\underline{\text{Con}}(\underline{V}) = \bigvee (\underline{\text{Con}}(\underline{N}(A)) : A \in \underline{V})$. (A jobb oldal a precízebb $\bigvee (\underline{U} : \underline{U} \text{ hálóvarietás és valamely } A \in \underline{V}\text{-re } \underline{U} = \underline{\text{Con}}(\underline{N}(A)))$ rövidítése.) (3.9) szerint így elég az állítást $\underline{V}$ helyett $\underline{N}(A)$ -ra igazolnunk. Könnyen látható, hogy $\underline{\text{Con}}(\underline{N}(A)) = \underline{\text{Sub}}(\underline{N}(A)) = \underline{\text{Sub}}(\underline{P}_f \underline{N}(A)) = \underline{\text{Sub}}(\underline{S} \underline{P}_f \underline{N}(A)) = \underline{\text{Con}}(\underline{S} \underline{P}_f \underline{N}(A)) = \underline{\text{Con}}(\underline{D} \underline{H} \underline{S} \underline{P}_f \underline{N}(A)) = \underline{\text{Con}}(\underline{\text{Loc}} \underline{N}(A))$. (Itt felhasználtuk (2.11) mellett azt is, hogy részmodulus részmodulushálója rész-hálója az eredeti modulus részmodulushálójának, s hogy A bármely direkt hatványa A nagyobb kitevős direkt hatványaiba beágyazható.) Éppugy, mint a (3.10) bizonyítása-kor is, látható, hogy $\underline{\text{Loc}} \underline{N}(A) = \underline{\text{Loc}} \{U\}$ teljesül valamely U R feletti modulusra. Ujból (3.9)-re hivatkozva elegendő azt belátnunk, hogy $\underline{\text{Con}}(\underline{\text{Loc}} \{U\}) = \bigvee (\underline{\text{Con}}(\underline{R}_S\text{-Mod}) : F \subseteq U, F \text{ véges, } S = S_{R/\text{Ann}(F)})$, mert a jobb oldal egy, a kívánt alakú kongruenciavarietás. Varietások helyett a megfelelő hálóazonosság-halmazokra áttérve ezen utóbbi egyenlőség (3.2), (3.4), (3.7) és (3.8) alkalmazásával adódik. Q.e.d.

Megjegyzés. Tetszőleges, modulusokból álló $\underline{V}$ -re az előző állítás már nem érvényes, mint azt a $\underline{V} = \{Z_2 \times Z_2\}$ (Z -modulusnak tekintve) példa is mutatja. (Ekkor $\underline{\text{Con}}(\underline{V})$ 2-disztributív, de nem disztributív, tehát, (2.13) szerint, $\underline{\text{Con}}(\underline{V})$ még ℓ -kongruenciavarietás sem lehet.)

IV. GYÜRÜK JELLEMZÉSE VÉGTELEN HÁLÓAZONOSSÁGOKKAL

1.§. $\underline{m}$ -termek és $\underline{m}$ -azonosságok. Hogy a bevezetésben mondottakat pontosítsuk, az $\underline{m}$ -termeket az alábbi módon definiáljuk (Grätzer – Kelly [31] és [6,11]). Legyen $\underline{m}$ egy végtelen, reguláris (azaz, ha $|I| < \underline{m}$ és $i \in I$ -re $\underline{m}_i < \underline{m}$, akkor $\sum(\underline{m}_i : i \in I) < \underline{m}$) számosság, X pedig egy nem üres halmaz. Ekkor $T_{\underline{m}}(X)$ -et, az X (változóhalmaz) feletti $\underline{m}$ -termek halmazát az alábbi rekurzióval definiáljuk. Legyen $X_0 = X$. Egy $\alpha > 0$ rendszámra pedig legyen $X_\alpha := \{ \bigvee S : 2 \leq |S| < \underline{m} \text{ és } S \subseteq \bigcup (X_\beta : \beta < \alpha) \} \cup \{ \bigwedge S : 2 \leq |S| < \underline{m} \text{ és } S \subseteq \bigcup (X_\beta : \beta < \alpha) \}$. Az $\bigvee S$ és $\bigwedge S$ formálisan értendő (ha teljesen precizek akar-nánk lenni, akkor az $(\bigvee, S)$ és $(\bigwedge, S)$ párokat ír-nánk helyettük). Tehát $\bigvee S$ és $\bigvee T$ pontosan akkor azonos, ha $S = T$; $\bigvee S$ és $\bigwedge T$ mindig különböző termek. Mivel a $2 \leq |S|$ feltételt esetenként nem vizsgáljuk, állapotdjunk meg abban, hogy $S = \{p\}$ esetén a $\bigwedge S$ és $\bigvee S$ jelsorozatok (melyek nem $\underline{m}$ -termek) a p termet jelölik. Ilymódon a $\bigwedge$ és $\bigvee$ kommutativ, „idempotens”, de nem asszociativ műveletjelek. Végül legyen $T_{\underline{m}}(X) := \bigcup (X_\alpha : |\alpha| < \underline{m})$. Egy $t \in T_{\underline{m}}(X)$ term rangján a legkisebb olyan α rendszámot értjük, melyre $t \in X_\alpha$. Ha $0 \neq S \subseteq T_{\underline{m}}(X)$ és $|S| < \underline{m}$, akkor $\bigvee S$ és $\bigwedge S$ is $T_{\underline{m}}(X)$ -beli. (Valóban, ha $s \in S$ -re s rangja α_s , akkor S -et jólrendezve és az $\alpha = \sum(\alpha_s : s \in S) + 1$ rendszámot tekintve $|\alpha| < \underline{m}$ és $\bigvee S, \bigwedge S \in X_\alpha$.) Ez indokolja, hogy rekurziv definícióinkban miért elég azon termeket tekintennünk, melyek rangja $\underline{m}$ -nél kisebb számosságu; azaz, $T_{\underline{m}} = \bigcup (X_\alpha : \alpha \text{ rendszám})$ is teljesül.

Legyen L egy olyan „algebrai” struktura, melyben minden $\emptyset \neq S \subseteq L$, $|S| < \underline{m}$ esetén $\bigvee S$ és $\bigwedge S$ definiálva van. (Pl. minden $\underline{m}$ -teljes háló és $T_{\underline{m}}(X)$ is ilyen.) Tetsző-

leges $t \in T_m(X)$ termre értelemszerűen definiálható az azonos módon jelölt $t: L^X \rightarrow L$ termfüggvény: $f \in L^X$ -re és $t \in X_0 = X$ -re $t(f) := f(t)$, $t = \bigwedge S$ -re $(\bigwedge S)(f) := \bigwedge \{s(f) : s \in S\}$, és duálisan.

Egy $p \leq q$ jelsorozat, ahol $p, q \in T_m(X)$ (X feletti) m -azonosságnak nevezünk. Akkor mondjuk, hogy $p \leq q$ teljesül egy m -teljes L hálóban, ha bármely $f \in L^X$ -re $p(f) \leq q(f)$. Az $m = \aleph_0$ esetben (véges) hálóazonosságról, vagy hálótérmről beszélünk. Ha m értéke nem lényeges, végtelen (háló-) azonosságot mondunk (de ez lehet véges is). A $\bigwedge S$ és $\bigvee T$ (ahol $T = \{p_0, \dots, p_n\}$) jelölések helyett értelemszerűen használni fogjuk a $\bigwedge (p : p \in S)$, illetve az $\bigvee (p_i : i \leq n)$ vagy $p_0 \vee p_1 \vee \dots \vee p_n$ jelöléseket is (ilyenkör T indexelése tetszőleges, pl. $p_0 \vee \dots \vee p_n$ és $p_n \vee p_{n-1} \vee \dots \vee p_0$ azonos termek).

Most adott p X feletti végtelen termre a p redukáltjainak $\text{Red}(p)$ halmazát definiáljuk. Ha $p \in X$ (azaz p változó), akkor $\text{Red}(p) := \{p\}$. Továbbá $\text{Red}(\bigwedge (p : p \in S)) := \{\bigwedge (p' : p \in S) : p \in S\text{-re } p' \in \text{Red}(p)\}$ és $\text{Red}(\bigvee (p : p \in S)) := \{\bigvee (p' : p \in T) : \emptyset \neq T \subseteq S, T \text{ véges, és } p \in T\text{-re } p' \in \text{Red}(p)\}$. Egy p termet redukáltnak nevezünk, ha $p \in \text{Red}(p)$; ez pontosan akkor teljesül, ha végtelen tényezőt számláló egyesítés p -ben nem szerepel. Tetszőleges p végtelen termre a $\text{Red}(p)$ halmazon definiáljuk a " $\leq_r$ " relációt:

$p_1 \leq_r p_2 \iff p_1 \in \text{Red}(p_2)$. Ekkor

(4.1) Állítás ([6]). A $\leq_r$ reláció kvázirendezés (azaz reflexív és tranzitív) a $\text{Red}(p)$ halmazon, s ezen kvázirendezésre nézve $\text{Red}(p)$ irányított (azaz bármely $p_1, p_2 \in \text{Red}(p)$ esetén $p_1 \leq_r p_3$ és $p_2 \leq_r p_3$ teljesül valamely $p_3 \in \text{Red}(p)$ -re).

A bizonyítás egy meglehetősen egyszerű indukció ([6, 11]),

melyből csak egy részt mutatunk be. Tegyük fel, hogy $q \in S$ -re $\text{Red}(q)$ már irányított, és tekintsük a $p = \bigvee (q: q \in S)$ két, mondjuk $\bar{p}$ és p' redukáltját! Ekkor $\bar{p} = \bigvee (\bar{q}: q \in \bar{S})$ és $p' = \bigvee (q': q \in S')$ alkalmas véges $\bar{S}, S' \subseteq S$ -re. Legyen $q'' := \bar{q}$, ha $q \in \bar{S} \setminus S'$, $q'' := q'$, ha $q \in S' \setminus \bar{S}$! Ha pedig $q \in \bar{S} \cap S'$, akkor az indukciós hipotézis szerint $\bar{q} \leq_r q''$ és $q' \leq_r q''$ teljesül alkalmasan választott $q'' \in \text{Red}(q)$ esetén. Ezért a $p'' := \bigvee (q'': q \in \bar{S} \cup S')$ termre $\bar{p} \leq_r p''$, $p' \leq_r p''$ és $p'' \in \text{Red}(p)$, tehát $\text{Red}(p)$ is irányított. Q.e.d.

2.§. Malcev-szerű feltételek. Először tetszőleges p X feletti redukált termhez egy $G(p)$ gráfot rendelünk. A gráfokról a II/2. §-ban mondottakra itt is támaszkodunk, és pl. véges p -re $G(p)$ az ottani $G_2(p)$ -vel lesz azonos. Ha $p \in X$ (változó), akkor $G(p)$ -nek pontosan két szögpontja (a bal és a jobb végpont) és egy, a végpontokat összekötő, p -vel színezett éle van; $G(p) \quad \circ \xrightarrow{p} \circ$. Ha $p = \bigwedge (q: q \in S)$, illetve $p = \bigvee (q: q \in T)$ (ekkor T szükségképpen véges), akkor legyen $G(p)$ a $G(q)$ ($q \in S$, ill. $q \in T$) gráfok párhuzamos, illetve soros kapcsoltja. (A soros kapcsoltat úgy készítjük el, hogy a véges T elemeit valamilyen sorrendben felsoroljuk, $T = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$, és tekintjük a $G(q_0) \circ G(q_1) \circ \dots \circ G(q_n)$ soros kapcsoltat. Így $G(p)$ nem teljesen egyértelmű; most is állapodjunk meg abban, hogy tetszésünk szerint lerögzítünk egy, a definíciónak eleget tevő gráfot, és azt tekintjük a $G(p)$ gráfnak.) A II/2. § gráfokra vonatkozó jelöléseit változatlanul használjuk, pl. $E(G(p))$ az élhalmaz, $V(G(p))$ pedig a szögponthalmaz jelölésére szolgál.

Legyen M egy R gyűrű feletti modulus, p egy X feletti redukált végtelen hálóterm, és tekintsünk egy (többnyire rögzített-

nek gondolt) φ leképezést, mely X -et $\text{Sub}(M)$ -be, azaz M részmodulusainak hálójába képezi. Egy $\psi: V(G(p)) \rightarrow M$ leképezést (φ -re vonatkozó) összekötő leképezésnek nevezzük, ha $(\text{bal végpont})\psi = 0$ és valahányszor $(a, x, b) \in E(G(p))$, mindannyiszor $b\psi - a\psi \in x\varphi$. Azt, hogy ψ φ -re vonatkozó összekötő leképezés, $(\varphi, \psi): G(p) \rightarrow M$ fogja jelölni. Legyen $b \in M$! Ha valamely $(\varphi, \psi): G(p) \rightarrow M$ esetén $(\text{jobb végpont})\psi = b$ is teljesül, akkor azt mondjuk, hogy b (φ -re vonatkozóan) elérhető $G(p)$ -vel. A $\text{Sub}(M)$ -beli $\bigwedge$ és $\bigvee$ műveletek ismert leírását felhasználva p rangja szerinti indukcióval könnyen adódik (2.7) alábbi megfelelője:

(4.2) Végtelen gráflemma. Legyen p egy X feletti végtelen term, R egy gyűrű, $M \in R\text{-Mod}$, $\varphi: X \rightarrow \text{Sub}(M)$ és $b \in M$! Ekkor $b \in p(x\varphi: x \in X)$ pontosan akkor teljesül, ha valamely $p' \in \text{Red}(p)$ -re b φ -re vonatkozóan elérhető $G(p')$ -vel. Ha $b \in p(x\varphi: x \in X)$ és p redukált, akkor b $G(p)$ -vel is elérhető. Ha pedig p tetszőleges (nem feltétlenül redukált), akkor (a lemma első állításának következményeként) $p(x\varphi: x \in X) = \bigcup (p'(x\varphi: x \in X): p' \in \text{Red}(p))$.

Most adott X feletti redukált p termhez és adott R gyűrűhöz egy $M(p)$ R -modulust, egy $\varphi_p: X \rightarrow \text{Sub}(M(p))$ leképezést és egy $a_p \in M(p)$ elemet definiálunk. (Ezek persze R -től is függenek majd, de ezt nem jelöljük). Legyen $V'(p) := V(G(p)) \setminus \{G(p) \text{ bal végpontja}\}$, $M(p)$ pedig a $V'(p)$ halmaz által generált szabad R -modulus! A $G(p)$ bal végpontját az $M(p)$ 0-elemének tekintve $V(G(p)) \subseteq M(p)$, és $x \in X$ -re legyen $x\varphi_p$ a $\{c-b: (b, x, c) \in E(G(p))\}$ halmaz által generált részmodulus. Legyen végül a_p a $G(p)$ jobb végpontja.

(4.3) Tétel.

(a) A fenti jelölések mellett (tehát p redukált) legyen q egy további X feletti végtelen term. A $p \leq q$ végtelen hálózazonosságra az alábbi három feltétel ekvivalens:

(i) $\text{Sub}(\underline{\text{R-Mod}}) \models p \leq q$,

(ii) $\text{Sub}(M(p))$ -ben $p(x\varphi_p: x \in X) \leq q(x\varphi_p: x \in X)$,

(iii) $a_p \in q(x\varphi_p: x \in X)$.

(b) Ha p is tetszőleges (tehát nem szükségképpen redukált) végtelen term, akkor $p \leq q$ pontosan akkor teljesül, $\text{Sub}(\underline{\text{R-Mod}})$ -ban, ha minden $p' \in \text{Red}(p)$ -re $\text{Sub}(\underline{\text{R-Mod}}) \models p' \leq q$.

Bizonyítás. Először az (a) részt igazoljuk. Az (i) $\Rightarrow$ (ii) világos. Tegyük fel (ii) -t! Mivel a konstrukció folytán a_p $G(p)$ -vel elérhető, (4.2) szerint $a_p \in p(x\varphi_p: x \in X) \subseteq q(x\varphi_p: x \in X)$, azaz (iii) is teljesül. Szükségünk lesz az alábbi segédtételre.

(4.4) Segédtétel. Legyen $M, K \in \text{R-Mod}$, $\mu: X \rightarrow \text{Sub}(M)$ és $\kappa: X \rightarrow \text{Sub}(K)$ leképezések, $\varphi: M \rightarrow K$ modulushomomorfizmus, és t egy X feletti végtelen hálóterm! Ha minden $x \in X$ -re $x\mu\varphi \subseteq x\kappa$ (ahol $x\mu\varphi = \{u\varphi: u \in x\mu\} \in \text{Sub}(K)$), akkor $t(x\mu: x \in X)\varphi \subseteq t(x\kappa: x \in X)$ is teljesül.

A (4.4) bizonyítása indukcióval történik. A $t \in X$ eset nyilvánvaló. Ha $t = \bigwedge (t_i: i \in I)$, akkor az indukciós hipotézis szerint $t(x\mu: x \in X)\varphi = (\bigwedge (t_i(x\mu: x \in X): i \in I))\varphi \subseteq \bigwedge (t_i(x\mu: x \in X)\varphi: i \in I) \subseteq \bigcap (t_i(x\kappa: x \in X): i \in I) = t(x\kappa: x \in X)$, míg a $t = \bigvee (t_i: i \in I)$ esetben pedig $t(x\mu: x \in X)\varphi = (\bigvee (t_i(x\mu: x \in X): i \in I))\varphi \subseteq \bigvee (t_i(x\mu: x \in X)\varphi: i \in I) \subseteq \bigvee (t_i(x\kappa: x \in X): i \in I) = t(x\kappa: x \in X)$. Q.e.d.

A (iii) $\Rightarrow$ (i) igazolása érdekében tegyük fel (iii) -t!

Legyen $K \in \underline{R\text{-Mod}}$, $\kappa: X \rightarrow \text{Sub}(K)$ és $b \in p(x\kappa: x \in X) \subseteq K$ tetszőleges! (4.2) szerint $b \in G(p)$ -vel elérhető K -ban. Létezik ezért olyan ψ , melyre $(\kappa, \psi): G(p) \rightarrow K$ és $(\text{jobb végpont})\psi = b$. A $(\text{bal végpont})\psi = 0$ feltétel lehetővé teszi, hogy ψ -t egy $\hat{\psi}: M(p) \rightarrow K$ homomorfizmussá terjesszük ki, mégedig egyértelműen. Mivel $G(p)$ tetszőleges (u, x, v) élére $(v-u)\hat{\psi} = v\hat{\psi} - u\hat{\psi} = v\psi - u\psi \in x\kappa$, $x\psi_p \hat{\psi} \subseteq x\kappa$. Így (4.4) szerint $b = a_p \psi = a_p \hat{\psi} \in q(x\psi_p: x \in X) \hat{\psi} \subseteq q(x\kappa: x \in X)$. Tehát $p(x\kappa: x \in X) \subseteq q(x\kappa: x \in X)$, azaz (i) teljesül.

A (b) rész bizonyításához tegyük fel, hogy $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models p \leq q$ és $p' \in \text{Red}(p)$! Mivel (4.2) folytán $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models p' \leq p$, a tranzitivitásból $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models p' \leq q$. Ha pedig valamenyny $p' \in \text{Red}(p)$ -re $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models p' \leq q$, akkor a (4.2)-beli $p = \bigcup \{p': p' \in \text{Red}(p)\}$ formulából $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models p \leq q$ adódik. Q.e.d.

3.§. A $h_{m,n}$ termékből nyerhető azonosságokról. Nem negatív m, n egészekre és egy R gyűrűre az $\{r \in R: (\exists s \in R)(ms = nr)\}$ halmazt jelöljük $(m/n)_R$ -rel! Ez R -nek szükségképpen ideálja, és pl. $R = (0/0)_R$. Az m -rangu szabad R -modulust, amely $R^R = R^{R^1}$ -nek az m -edik direkt hatványa, R^{R^m} jelöli majd. Az $\bar{X} = \{x, y, z, t\}$ változóhalmaz fölött definiáljuk az alábbi véges hálótermeket!

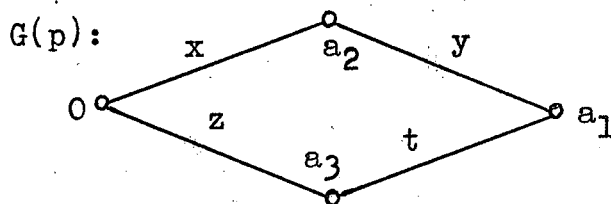
$p := (x+y)(z+t)$, $w_{-1} := (x+z)(y+t)$, $w_0 := x$,
 $0 \leq k < \omega$ -ra $s_{k+1} := (w_k + t)(y+z)$ és $w_{k+1} := (s_{k+1} + p)(x+z)$,
 valamint $0 \leq m, n < \omega$ -ra $h_{m,n} := ((w_m + x)w_n + y + z)p$.

(4.5) Tétel. Legyen q egy végtelen hálóterm az $\{x_{m,n}: 0 \leq m < \omega, 0 \leq n < \omega\}$ változóhalmaz felett. Tetszőleges R gyűrűre az alábbi három feltétel ekvivalens:

(i) A $p(x, y, z, t) \leq q(h_{m,n}: m < \omega, n < \omega)$ végtelen azonosság teljesül $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}})$ -ban;

- (ii) $\text{Sub}({}_R R^3) = \text{Sub}(M(p))$ -ben $p(x\varphi_p, y\varphi_p, z\varphi_p, t\varphi_p) \leq q(h_{m,n}(x\varphi_p, y\varphi_p, z\varphi_p, t\varphi_p) : m, n < \omega)$;
 (iii) $(0/0)_R \leq q((m/n)_R : m, n < \omega)$ teljesül R bali-
deáljainak hálójában (azaz $\text{Sub}({}_R R)$ -ben).

Bizonyítás. A bizonyítást (4.3)(a)-ra alapozzuk. Mivel $V'(p) = \{a_1, a_2, a_3\}$ most háromelemű ((4.6) ábra),
 (i) $\Leftrightarrow$ (ii) világos. A hátralevő (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) igazolásához mindenekelőtt vezessük be az $U := u\varphi_p$ ($u \in \bar{X}$) és $V := v(x\varphi_p, y\varphi_p, z\varphi_p, t\varphi_p)$ ($v \in \{p, w_i, s_i, h_{i,j}\}$) jelöléseket!
 (Ideiglenesen P nemcsak a primszámok halmazát jelöli, de ez nem fog félreértést okozni.)



(4.6) Ábra

Egy $c \in M(p)$ elem által generált részmodulust $[c]$ -vel fogunk jelölni. Definíció szerint $X = [a_2]$, $Y = [a_1 - a_2]$, $Z = [a_3]$ és $T = [a_1 - a_3]$. Továbbá érvényesek az alábbi egyenlőségek is:

$$P = [a_1], \quad k \geq -1 \text{ -re } W_k = [a_2 + ka_3], \quad k \geq 0 \text{ -ra } S_{k+1} = [a_1 - a_2 - (k+1)a_3], \text{ és } m, n \geq 0 \text{ -ra}$$

$$H_{m,n} = (m/n)_R a_1 := \{ra_1 : (\exists s \in R)(ms = nr)\}.$$

Ezen összefüggések mindegyike elemi számolással és esetenként indukcióval igazolható, ezért példaként csak a $H_{m,n}$ -re vonatkozót bizonyítjuk a korábbiak felhasználásával:

$$\begin{aligned} (W_m + X) \cap W_n &= \{r(a_2 + na_3) : r \in R \text{ és } (\exists s, u \in R)(r(a_2 + na_3) = \\ &= s(a_2 + ma_3) + ua_2)\} = \{r(a_2 + na_3) : r \in R \text{ és } (\exists s \in R)(ms = nr)\}, \text{ s így} \\ H_{m,n} &= (\{r(a_2 + na_3) : r \in (m/n)_R\} + Y + Z) \cap P = \{r(a_2 + na_3) + \\ &+ u(a_1 - a_2) + va_3 : r \in (m/n)_R, u, v \in R\} \cap [a_1] = \{r(a_2 + na_3) + \\ &+ u(a_1 - a_2) + va_3 : r \in (m/n)_R, u, v \in R, u = r, v = -nr\} = \end{aligned}$$

$= \{ra_1 : r \in (m/n)_R\} = (m/n)_R a_1$, valóban.

Mivel $R^R \cong [a_1] \subseteq R^{R^3}$, $\text{Sub}(R^R)$ izomorf a $\text{Sub}(R^{R^3})$ hálóban vett $[\{0\}, [a_1]]$ intervallummal. Sőt az is világos, hogy a $\sigma : \text{Sub}(R^R) \rightarrow [\{0\}, [a_1]]$, $I \mapsto Ia_1 = \{ra_1 : r \in I\}$ leképezés hálóizomorfizmus. Mivel (4.7) szerint $(m/n)_R \sigma = H_{m,n}$ és $(0/0)_R \sigma = [a_1] = p(X,Y,Z,T)$, (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) nyilvánvaló. Q.e.d.

Jelöljük $\lambda(m,n)$ -nel a $p \leq h_{m,n}$ véges hálóazonosságot! A q termet $x_{m,n}$ -nek választva adódik az alábbi

(4.8) Következmény. Tetszőleges R gyűrűre az alábbiak ekvivalensek:

- (i) $\lambda(m,n)$ teljesül $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -ban;
- (ii) $\lambda(m,n)$ teljesül $\text{Sub}(R^{R^3})$ -ben;
- (iii) A $D(m,n)$ oszthatósági feltétel teljesül R -ben.

A (3.7) -t követő megjegyzéshez még hozzátesszük, hogy (a mondott speciális (m,n) párokra) (ii) Herrmann és Huhn [34]-ben is szerepel (ahol a bizonyítás a 2-gyémánt hálóelméleti sajátosságain múlik). A korábbi megközelítés (ii)-ben csak $\text{Sub}(R^{R^4})$ -t eredményezett, s a 4 kitevőt csak külön megfontolásokkal (melyek egyike Huhn Andrásról ered) lehetett 3-ra leszorítani (bizonyítás nélkül: [6,11]). A jelen - és a korábbiaknál egyszerűbb - megközelítés természetesen adja a 3 kitevőt. Egyszerű ellenpéldák (pl. $R_1 \not\cong R_2$ 3-nál több elemű primtestek) mutatják, hogy a hármas kitevő tovább már nem csökkenthető.

A bevezetésben egy λ végtelen hálóazonosságot regulárisnak nevezünk, ha valahányszor $S_{R_1} = S_{R_2}$ (R_1, R_2 gyűrűk) és $\text{Sub}(R_1\text{-Mod}) \models \lambda$, mindannyiszor $\text{Sub}(R_2\text{-Mod}) \models \lambda$. A III. fejezet eredményei szerint minden véges hálóazonos-

ság reguláris. Ezzel szemben például

(4.9) Állítás ([6,11]). A $p \leq h_{2,1} \vee \bigwedge (h_{u,1}: u \in P \setminus \{2\})$

azonosság nem reguláris.

Bizonyítás. A (4.5) tétel szerint a kérdéses azonosság pontosan akkor teljesül $\text{Sub}(\underline{\text{R-Mod}})$ -ban, ha

(1) $(0/0)_R \leq (2/1)_R \vee \bigwedge ((u/1)_R: u \in P \setminus \{2\})$. Ez pedig egyen-

értékű az

$$(E) \quad \begin{aligned} r+t &= 1 \\ 2s_2 &= r \\ us_u &= t \quad (u \in P \setminus \{2\}) \end{aligned}$$

egyenletrendszer R -beli megoldhatóságával. Ez nyilván nem oldható meg Z -ben (mert – végtelen sok prímosztója miatt –

$t=0$, és így $2s_2=r=1$ következne). Most belátjuk, hogy

$n \in \mathbb{N}$ -re E megoldható Z_n -ben. Legyen $n = 2^v m$, $(2, m) = 1$.

Ha $v=0$, akkor a $2s_2=1$ egyenlet – és így E is – megoldható

Z_n -ben. Ha pedig $v > 0$, akkor (3.2) szerint az $r=1-m$,

$t=m$ egészíthető ki E megoldásává. Ezért E megoldható a

$Z' := \prod (Z_n: n \in \mathbb{N})$ direkt szorzatban is. Mivel a Z' -ben telje-

sülő oszthatósági feltételek valamennyi Z_n tényezőben is

teljesülnek, Z és Z' spektruma azonos.

Q.e.d.

Nem sokat tudunk arról, hogy mikor reguláris egy végtelen hálóaazonosság. Az alábbi feltétel csak elegendő, de (4.11) szerint nem szükséges.

(4.10) Állítás. Ha q $\bigwedge$ -mentes (azaz csak véges sok tényezőt számláló metszetek lépnek fel benne), akkor a $p \leq q$ végtelen hálóaazonosság reguláris.

Bizonyítás. A (4.3)(b) szerint elegendő azzal az esettel foglalkoznunk, amikor p redukált. Legyen X a $p \leq q$ változóinak halmaza. Az alábbiakban az a célunk, hogy tetszőleges $q' \in \text{Red}(q)$ -hoz és $V(G(p))$ tetszőleges véges H részhalmazához egy $E(p, q', H)$ véges, formális, lineá-

áris egyenletrendszert rendeljünk úgy, hogy $p \leq q$ pontosan akkor teljesüljön $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}})$ -ban, ha valamely $q' \in \text{Red}(q)$ -ra és véges $H \subseteq V(G(p))$ -re $E(p, q', H)$ megoldható R -ben. Ekkor ugyanis (3.6) -ből az állítás már adódik.

Tegyük fel, hogy $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models p \leq q$. Ekkor (és csak ekkor) (4.3)(a) szerint $a_p \in q(x\varphi_p: x \in X)$. Így (4.2) szerint létezik $q' \in \text{Red}(q)$ és ψ , hogy $(\varphi_p, \psi): G(q') \rightarrow M(p)$ és $(\text{jobb végpont})\psi = a_p$. Mivel $G(q')$ véges, létezik olyan véges $H \subseteq V(G(p))$, hogy

(1) $(a, x, b) \in E(G(q'))$ -re $b\psi - a\psi \in [d - c: c, d \in H \text{ és } (c, x, d) \in E(G(p))]$, és

(2) $u \in V(G(q'))$ -re $u\psi \in [H]$.

Továbbá (H -től függetlenül)

(3) $(\text{bal végpont})\psi = 0$, $(\text{jobb végpont})\psi = a_p$.

Fordítva, ha valamely H -ra, q' -re és ψ -re (1), (2) és (3) teljesül, akkor ψ alkalmas összekötő leképezés, s így $a_p \in q(x\varphi_p: x \in X)$.

Mármost $H \setminus \{0\}$ szabadon generálja $[H]$ -t, így az $u\psi$ elemek az egyértelmű $u\psi = \sum (r_{u,h} h: h \in H \setminus \{0\})$ alakban kereshetők ($r_{u,h} \in R$). (1) ekkor annak felel meg, hogy alkalmas $r_{a,b,c,x,d} \in R$ együtthatókkal minden $(a, x, b) \in E(G(q'))$ esetén

(1') $\sum (r_{b,h} h - r_{a,h} h: h \in H \setminus \{0\}) = \sum (r_{a,b,c,x,d} (d - c): c, d \in H \text{ és } (c, x, d) \in E(G(p)))$ teljesül. (1') viszont azzal ekvivalens, hogy minden $h \in H \setminus \{0\}$ -ra

(1'') $r_{b,h} - r_{a,h} = \sum (r_{a,b,c,x,h}: c \in H \text{ és } (c, x, h) \in E(G(p))) - \sum (r_{a,b,h,x,d}: d \in H \text{ és } (h, x, d) \in E(G(p)))$.

Hasonlóan látható, hogy (3) is bizonyos (mondjuk (3'')-vel jelölt), az $r_{u,h}$ együtthatókra felírt egyenlőségek teljesülésével ekvivalens. Legyen $E(p, q', H)$ az összes

(1'') és (3'') egyenletekből álló egyenletrendszer, melyben $r_{u,h}$ és $r_{a,b,c,x,d}$ ($h \in H \setminus \{0\}, \forall x \in X, (a,x,b) \in E(G(q'))$, $(c,x,d) \in E(G(p)) \cap (H \times \{x\} \times H)$) jelentik a változókat. Látható, hogy $E(p,q'H)$ megfelel az előre vázolt célnak. Q.e.d.

4.§. A reguláris hálózatonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságok. Érzésünk szerint a végtelen hálózatonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságok kielégítő (például (3.7)-hez hasonló) leírása nem lehetséges. A reguláris azonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságokat azonban meg tudjuk határozni (a reguláris elnevezést éppen ezért vezettük be). A $p_i \leq q_i$ (X_i feletti) végtelen azonosságok pontosan akkor teljesülnek egy L teljes hálóban egyidejűleg valamennyi $i \in I$ -re, ha az $\bigvee(p_i : i \in I) \leq \bigvee(q_i : i \in I)$ végtelen hálózatonosság teljesül L -ben. (Itt feltettük, hogy $i \neq j$ -re $X_i \cap X_j = \emptyset$.) Ezért végtelen hálózatonosságok halmazai által jellemzett gyűrűtulajdonságokkal nem kell külön foglalkoznunk.

Legyen I a (3.8) előtt definiált SL spektrumhálónak egy tetszőleges ideálja, és definiáljuk a $\lambda(I)$ végtelen hálózatonosságot a következő módon: ha minden $S \in I$ -re $S(0) \neq 0$, akkor $\lambda(I)$ legyen a $p \leq \bigvee(h_{0,S(0)} : S \in I)$ (végtelen) hálózatonosság, ellenkező esetben pedig legyen $\lambda(I)$ a $p \leq \bigvee(\bigwedge(h_{u,S(u)+1,u,S(u)} : u \in P \text{ és } S(u) < \omega) : S \in I)$ azonosság. Az alábbi tételből világos, hogy $\lambda(I)$ reguláris.

(4.11) Tétel ([6,11]). Legyen I az SL spektrumháló tetszőleges ideálja. Ekkor tetszőleges R gyűrűre az

$$(\alpha) \quad S_R \in I,$$

$$(\beta) \quad \text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \lambda(I),$$

$$(\gamma) \quad \text{Sub}(R^3) \models \lambda(I)$$

feltételek egymással ekvivalensek. Fordítva, tetszőleges reguláris, végtelen λ hálózatonossághoz létezik egy olyan egyértelműen meghatározott $I(\lambda)$ ideál SL -ben, hogy bármely R gyűrűre az $S_R \in I(\lambda)$ pontosan akkor teljesül, ha $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models \lambda$.

Bizonyítás. Legyen I az SL valamely ideálja! Először tegyük fel, hogy bármely $S \in I$ -re $S(0) \neq 0$! (4.5) szerint

(β) is és (γ) is ekvivalens azzal, hogy

$$(1) \quad 1_R \in \sum((0/S(0))_R : S \in I).$$

Ha (α), akkor $1_R \in (0/S_R(0))_R = R$ miatt (1) teljesül. Fordítva, tegyük fel, hogy (1) fennáll! Ekkor létezik véges sok $S_1, \dots, S_n \in I$, $r_1, \dots, r_n \in R$, hogy $1_R = r_1 + \dots + r_n$, $S_1(0)r_1 = 0, \dots, S_n(0)r_n = 0$ teljesül. Legyen $S := \bigvee(S_i : 1 \leq i \leq n)$! Ekkor $S \in I$ és $S(0)$ az $S_1(0), \dots, S_n(0)$ számok mindegyikének többszöröse. Így $S(0) \cdot 1_R = S(0) \cdot r_1 + \dots + S(0) \cdot r_n = 0_R + \dots + 0_R = 0_R$. Ennélfogva $S_R(0)$ osztója $S(0)$ -nak, és így $S_R \leq S$. Mivel I ideál, $S_R \in I$, valóban. Nézzük most azt az esetet, amikor valamely $\bar{S} \in I$ -re $\bar{S}(0) = 0$! (4.5) szerint

(β) is és (γ) is ekvivalens azzal, hogy

$$(2) \quad 1_R \in \sum(\bigcap((u^{S(u)+1}/u^{S(u)})_R : u \in P \text{ és } S(u) < \omega) : S \in I).$$

Ha (α), akkor definíció szerint

$$1_R \in \bigcap((u^{S_R(u)+1}/u^{S_R(u)})_R : u \in P \text{ és } S_R(u) < \omega), \text{ tehát (2)}$$

teljesül. Fordítva, tételezzük fel most (2)-t! Ekkor létezik olyan véges $J \subseteq I$ és $r_S \in R$ ($S \in J$), hogy $1_R = \sum(r_S : S \in J)$, $0 \in \{S(0) : S \in J\}$, és $S \in J$ -re $r_S \in \bigcap((u^{S(u)+1}/u^{S(u)})_R : u \in P \text{ és } S(u) < \omega)$. Legyen $S' := \bigvee(S : S \in J)$! Ekkor $S' \in I$, és bármely $u \in P$ -re, $S \in J$ -re $S(u) \leq S'(u)$. Ha $S'(u) < \omega$, akkor $u^{S'(u)} \cdot 1_R = u^{S'(u)} \sum(r_S : S \in J) = \sum(u^{S'(u)-S(u)} \cdot u^{S(u)} \cdot r_S : S \in J) = \sum(u^{S'(u)-S(u)} \cdot u^{S(u)+1} \cdot g_S : S \in J) = u^{S'(u)+1} \cdot \sum(g_S : S \in J)$ alkalmas $g_S \in R$ elemekkel, tehát

$R \models D(u^{S'(u)+1}, u^{S'(u)})$. Ennélfogva $S_R \leq S'$, és így $S_R \in I$, azaz (α) teljesül.

A fordított irányu állítás bizonyítását két segéd-tellettal készítjük elő.

(4.12) Segéd-tétel. Legyenek R_1 és R_2 gyűrűk, ρ pedig egy olyan $R_1 \rightarrow R_2$ leképezés, amely vagy

(1) bijektív és $+$ -tartó, vagy

(2) 1-tartó és $+$ -tartó.

Ekkor minden $\text{Sub}(R_1\text{-Mod})$ -ban teljesülő végtelen háló-azonosság $\text{Sub}(R_2\text{-Mod})$ -ban is teljesül.

(4.12) Bizonyítása. Legyen R egy tetszőleges gyűrű, p és q pedig X feletti végtelen termék, melyek közül p redukált! (4.2) és (4.3) szerint $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models p \leq q$ pontosan akkor teljesül, ha $(R\text{-re nézve}) (\exists q' \in \text{Red}(q))(a_p \in q'(x\varphi_p: x \in X))$. Ezen utóbbi feltétel (4.2) folytán q' -re nézve gyengülő. Azaz, ha $q', q'' \in \text{Red}(q)$, $q' \leq_r q''$ és $a_p \in q'(x\varphi_p: x \in X)$, akkor szükségképpen $a_p \in q''(x\varphi_p: x \in X)$.

Tekintsük az $a_p \in q'(x\varphi_p: x \in X)$ feltételt! Célunk az, hogy eme feltételt végtelen, formális, lineáris egyenlet-rendszerek segítségével is megfogalmazzuk. (4.2) szerint $a_p \in q'(x\varphi_p: x \in X)$ pontosan akkor teljesül, ha

(3) létezik ψ , hogy $(\varphi_p, \psi): G(q') \rightarrow M(p)$ és $(\text{jobb végpont})\psi = a_p$.

Jelöljük $V'(p) = \{f_i: i \in I\}$ -vel a $V(G(p)) \setminus \{\text{bal végpont}\}$ halmazt úgy, hogy a_p -t f_1 -gyel jelöljük! Ekkor $V'(p)$ az $M(p)$ szabad generátorrendszere. Legyen E_x a $G(p)$ x -szel színezett éleinek halmaza! Mivel $u \in V(G(q'))$ -re az $u\psi$ elemeket $\sum(r_{u,i}f_i: i \in J_u)$ alakban (véges $J_u \subseteq I$) ke-reshetjük, (3) pontosan akkor teljesül, ha léteznek:

$u \in V(G(q'))$ -re véges $J_u \subseteq I$ részhalmaz és $r_{u,i} \in R$

$(i \in J_u)$ elemek, valamint
 $(a, x, b) \in E(G(q'))$ -re véges $E_{a, x, b} \subseteq E_x$ részhalmazok
 és $(c, x, d) \in E_{a, x, b}$ -re $r_{a, b, c, x, d} \in R$ elemek

ugy, hogy

$$(4) \sum(r_{bal \text{ végpont}, i}^{f_i} : i \in J_{bal \text{ végpont}}) = 0$$

$$\sum(r_{f_1, i} : i \in J_{f_1}) = f_1, \quad \text{továbbá}$$

$$(5) (a, x, b) \in E(G(q')) \text{ -re } \sum(r_{b, i}^{f_i} : i \in J_b) -$$

$$- \sum(r_{a, i}^{f_i} : i \in J_a) = \sum(r_{a, b, c, x, d}^{(d-c)} : (c, x, d) \in E_{a, x, b}).$$

Ezért a (4.10) bizonyításához hasonló módon (4) és (5) bizonyos, az $r_{indexek} \in R$ együtthatókra vonatkozó egyenlőségek egyidejű teljesülésével ekvivalens. Ezen egyenletek együttesen egy egyenletrendszert alkotnak az $r_{indexek}$ ismeretlenekre nézve. Ezen formális, lineáris, végtelen egyenletrendszer (melyben minden egyenlet véges) a p -n és q' -n kívül függ a J_u és az $E_{a, x, b}$ véges részhalmazok választásától is; jelölje c az említett választás mikéntjét, és $E(p, q', c)$ a tekintett egyenletrendszert! Legyen továbbá $C_{p, q'}$ a lehetséges c -k halmaza! Világos, hogy az $a_p \in q'(x\varphi_p : x \in X)$ és a $(\exists c \in C_{p, q'})(E(p, q', c))$ R -ben megoldható feltételek egymással ekvivalensek. Vezessünk be egy $\leq$ parciális rendezést a $C_{p, q'}$ halmazon: $c \leq c'$ jelentse azt, hogy (értelemszerű jelölésekkel) minden $u \in V(G(q'))$ -re $J_u \subseteq J'_u$ és minden $(a, x, b) \in E(G(q'))$ -re $E_{a, x, b} \subseteq E'_{a, x, b}$! Világos, hogy ezáltal $C_{p, q'}$ irányított részben rendezett halmazzá vált (tehát bármely két elemének van közös felső korlátja). Továbbá a $(\exists c \in C_{p, q'})(E(p, q', c))$ R -ben megoldható feltétel c -ben gyengülő. Azaz, ha $E(p, q', c)$ megoldható R -ben és $c \leq c' \in C_{p, q'}$, akkor $E(p, q', c')$ is megoldható R -ben. Ezzel igazoltuk, hogy

(4.13) Lemma. Redukált p esetén tetszőleges R gyűrűre
 $a \in \text{Sub}(R\text{-Mod}) \models p \leq q$ és a $(\exists q' \in \text{Red}(q))(\exists c \in C_{p,q'})$
 $(E(p,q',c)$ megoldható R -ben) feltételek ekvivalensek. Az
 utóbbi feltétel q' -ben gyengülő, $C_{p,q'}$ irányított, és a
 $(\exists c \in C_{p,q'})(E(p,q',c)$ R -ben megoldható feltétel c -ben
 gyengülő.

A (4.12) bizonyítására visszatérve (4.3)(b) szerint
 elegendő olyan $p \leq q$ végtelen azonosságot tekintenünk,
 melyben p redukált. A fenti lemmában szereplő $E(p,q',c)$ e-
 gyenletrendszer ekkor a következő alaku: az ismeretlenek
 halmaza $\{x_t : t \in T\}$, az egyenletek pedig
 $a_1 x_{t_1} + \dots + a_n x_{t_n} = b$ ($a_i, b \in Z, t_i \in T$) alakúak. Ezért (4.12)
 (2) azonnal adódik (4.13)-ból és azon tényből, hogy φ a
 tekintett egyenletrendszer megoldásait megoldásokba viszi
 át. Legyen most r egy tetszőleges R -beli elem, és jelöl-
 jük $E(p,q',c,r)$ -rel azt az R -beli (tehát már nem formá-
 lis) egyenletrendszert, amelyben az x_t ($t \in T$) változók
 R -beli ismeretleneket jelölnek, és amely az
 $a_1 x_{t_1} + \dots + a_n x_{t_n} = b$ alakú egyenletek helyett rendre a
 megfelelő $a_1 x_{t_1} + \dots + a_n x_{t_n} = br$ egyenletekből áll. Látha-
 tó, hogy $E(p,q',c)$ pontosan akkor oldható meg R -ben, ha
 az r paraméter minden R -beli értéke mellett $E(p,q',c,r)$
 megoldható (hiszen az $E(p,q',c)$ -beli egyenletek mindkét
 oldala jobbról megszorozható r -rel, s másrészt $r=1_R$ is le-
 het). A $(\forall r \in R)(E(p,q',c,r)$ megoldható) feltétel
 viszont egy (1) tulajdonságu φ -val szemben invariáns.
 Így (4.12)(2) -höz hasonló módon (4.12)(1) is adódik. Q.e.d.

(4.14) Segéd-tétel. Legyen R_1 és R_2 két gyűrű, direkt
 szorzatukat pedig jelöljük R -rel! Egy $p \leq q$ végtelen há-
 lóazonosság pontosan akkor teljesül $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -ban,

ha $\text{Sub}(R_1\text{-Mod})$ -ban és $\text{Sub}(R_2\text{-Mod})$ -ban is teljesül.

(4.14) Bizonyítása. Mivel R_i homomorf képe R -nek, (4.12) szerint elég belátni, hogy ha $\text{Sub}(R_1\text{-Mod}) \models p \leq q$ és $\text{Sub}(R_2\text{-Mod}) \models p \leq q$, akkor $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models p \leq q$. (4.3) szerint feltehető, hogy p redukált. Tegyük fel tehát, hogy $i=1,2$ -re $\text{Sub}(R_i\text{-Mod}) \models p \leq q$! Ekkor (4.13) és (4.1) szerint i -től függetlenül is létezik olyan $q' \in \text{Red}(q)$ és $c \in C_{p,q'}$, hogy $E(p,q',c)$ megoldható R_i -ben. (A felhasznált feltételek q' -ben, illetve c -ben való gyengülését intenzíven kihasználtuk.) Így $E(p,q',c)$ megoldható R -ben (azon R -beli vektorok, melyek i -ik komponensei $E(p,q',c)$ egy rögzített R_i -beli megoldásának megfelelő tagjai, megoldást szolgáltatnak), s ezért (4.13)-ból $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models p \leq q$. Q.e.d.

A (4.11) bizonyítására visszatérve, λ regularitása és (3.8) szerint csakis az $I(\lambda) := \{S \in \text{SL} : \text{Sub}(R_S\text{-Mod}) \models \lambda\}$ jöhet számításba. Így csak azt kell megmutatnunk, hogy $I(\lambda)$ ideál SL -ben. Ha $S_1 \in I(\lambda)$, $S_2 \in \text{SL}$ és $S_2 \leq S_1$, akkor (3.8) és (4.12) szerint $S_2 \in I(\lambda)$. Ha pedig $S_1, S_2 \in I(\lambda)$, akkor (4.14) szerint $\text{Sub}(R_{S_1} \times R_{S_2}\text{-Mod}) \models \lambda$. De (4.14)-ből $\text{Con}(R_{S_1}\text{-Mod}) \vee \text{Con}(R_{S_2}\text{-Mod}) = \text{Con}(R_{S_1} \times R_{S_2}\text{-Mod})$ is következik, s így (3.9) szerint $R_{S_1} \times R_{S_2}$ spektruma $S_1 \vee S_2$. Minthogy λ reguláris, $\text{Sub}(R_{S_1 \vee S_2}\text{-Mod}) \models \lambda$, azaz $S_1 \vee S_2 \in I(\lambda)$. Tehát $I(\lambda)$ valóban ideál. Q.e.d.

(4.15) Megjegyzés. Legyen λ egy tetszőleges végtelen hálózatonosság! Ekkor az, hogy $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -ban teljesül-e λ , csakis R additív csoportjától függ. Azaz, ha R_1 és R_2 additív csoportja izomorf, és $\text{Sub}(R_1\text{-Mod}) \models \lambda$, akkor λ $\text{Sub}(R_2\text{-Mod})$ -ban is teljesül.

Az előző megjegyzés csupán (4.12)(1) átfogalmazottja. Bár éppen (4.15) vezetett el az Abel-csoportok véges hálózatonosságokkal történő jellemzésének vizsgálatához (III/4. §), Abel-csoportok végtelen hálózatonosságokkal történő jellemzésével a Pixley (2.5) tétel megfelelőjének híján nem foglalkozunk.

Az előző bizonyításból kitűnik, hogy ha λ egy véges hálózatonosság, akkor (4.14) végtelen sok tényezőszorzatra is érvényes, s így $I(\lambda)$ főideál SL-ben (ez (3.2) és (3.7) felhasználásával is könnyen adódik). A véges hálózatonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságokat mégsem a főideálok, hanem az (egyszerűbb) oszthatósági feltételek nyelvén adtuk meg (3.7)-ben. Most a reguláris hálózatonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságokat fogjuk hasonló egyszerűséggel megadni. Ehhez szükség lesz a gyengülő oszthatósági feltételrendszer fogalmára. Legyen B oszthatósági feltételek egy rendszere. (A rendszer szót a halmaz szinonimájaként használjuk.) Akkor mondjuk, hogy B teljesül egy R gyűrűben, ha B minden eleme teljesül R-ben. Legyen $(I, \leq)$ egy irányított részben rendezett halmaz, és minden $i \in I$ -re legyen H_i oszthatósági feltételeknek egy rendszere. Tegyük fel, hogy valahányszor $i, j \in I$, $i \leq j$, R egy gyűrű és $R \models H_i$, mindannyiszor $R \models H_j$! Ekkor a $(\exists i \in I)(H_i)$ feltételt gyengülő oszthatósági feltételrendszernek nevezzük.

(4.16) Állítás ([6]). Pontosan a gyengülő oszthatósági feltételrendszerek a reguláris végtelen hálózatonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságok. Azaz minden λ reguláris végtelen azonossághoz létezik olyan H gyengülő oszthatósági feltételrendszer, és minden H' gyengülő oszthatósági feltételrendszerhez létezik egy λ' reguláris vég-

telen azonosság olymódon, hogy tetszőleges R gyűrűre a $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \lambda$, illetve a $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \lambda'$ feltételek rendre ekvivalensek az $R \models H$, illetve az $R \models H'$ feltételekkel.

Bizonyítás. (3.2), (3.8) és (4.11) szerint elég belátni, hogy $\{R_S: S \in SL\}$ -nek egy B részhalmaza pontosan akkor jellemezhető gyengülő oszthatósági feltételrendszerrel, ha $\{S: R_S \in B\}$ ideál SL -ben. Legyen I egy ideál SL -ben, jelölje H_S az R_S -ben teljesülő összes oszthatósági feltételek rendszerét, és tekintsük a $H := (\exists S \in I)(H_S)$ feltételt! Az I ideál révén irányított, tetszőleges oszthatósági feltétel teljesülése homomorf képre öröklődik, tehát (3.8) szerint H egy gyengülő oszthatósági feltételrendszer. Ha $S \in I$, akkor $R_S \models H$ nyilvánvaló. Ha pedig $R_S \models H$, mondjuk $R_S \models H_S$, akkor minden R_S -ben teljesülő oszthatósági feltétel R_S -ben is teljesül. A spektrum definíciója szerint így $S \leq S'$, tehát $S \in I$.

Fordítva, legyen $(\exists i \in I)(H_i)$ egy gyengülő oszthatósági feltételrendszer! Tetszőleges $D(m,n)$ oszthatósági feltételre (3.2) szerint $\{S: R_S \models D(m,n)\}$ ideál SL -ben. Mint ilyenek metszete, $J_i := \{S \in SL: R_S \models H_i\}$ is ideál. Végül $\{S \in SL: (\exists i \in I)(R_S \models H_i)\}$ is ideál, mert nem más, mint a J_i ($i \in I$) ideálok irányított rendszerének halmazelméleti uniója. Q.e.d.

(4.17) Példa. A $p \leq \bigvee (h_{0,2k+1}: 0 \leq k < \omega)$, a $p \leq \bigvee (\bigwedge (h_{u,1}: u \in P \setminus H): H \subseteq P \text{ és } H \text{ véges})$ és a $p \leq \bigvee (h_{m \cdot n^{i+1}, k \cdot n^i}: i < \omega)$ (ahol $m, n, k < \omega$) reguláris hálózazonosságok $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -beli (avagy $\text{Sub}(R^3)$ -beli) teljesülése rendre az „ R karakterisztikája páratlan”, „majd-nem minden u prímszámra az $u \cdot 1_R$ -nek van multiplikatív

inverze R-ben" és „létezik olyan $i < \omega$, melyre $R \models D(m \cdot n^{i+1}, k \cdot n^i)$ ” feltételekkel ekvivalens.

A példa állításait (4.11) közvetlen és egyszerű alkalmazásaival igazolhatnánk. Ezért a bizonyítás elmarad.

A fejezetet egy negatív eredménnyel zárjuk. (3.9) szerint tetszőleges R_i ($i \in I$) gyűrűk esetén (ahol I is tetszőleges indexhalmaz) létezik olyan R gyűrű (sőt, amint azt (4.14) kapcsán (4.15) után említettük, $R = \prod (R_i : i \in I)$ is választható), hogy $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -ban azok és csakis azok a véges hálózazonosságok teljesülnek, amelyek valamennyi $\text{Sub}(R_i\text{-Mod})$ -ban ($i \in I$) teljesülnek. Ezzel szemben:

(4.18) Állítás. $\overset{1 \neq}{\text{Legyen}} n \in \mathbb{N}$ és $\Psi \in \{\text{végtelen, feltételes}\}$. Nincs olyan R gyűrű, hogy tetszőleges λ reguláris Ψ hálózazonosságra a $(\forall i < \omega)(\text{Sub}(Z_{n^i}\text{-Mod}) \models \lambda)$ és a $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \lambda$ feltételek ekvivalensek legyenek.

Megjegyzés. Az állítás következtében az $\text{IS Con}(R\text{-Mod})$ (R gyűrű) alakú kvázivarietások a hálók kvázivarietásainak hálójában nem alkotnak $\vee$ -részhálót.

Bizonyítás. Legyen $\Psi = \text{végtelen}$, tegyük fel, hogy van ilyen R , és jelöljük $\lambda(m, n, k)$ -val a (4.17)-ben szereplő harmadik azonosságot! (4.17) szerint $i < \omega$ -ra $\text{Sub}(Z_{n^i}\text{-Mod}) \models \lambda(0, n, 1)$, ennél fogva $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \lambda(0, n, 1)$ -ből adódóan $R \models D(0, n^j)$ teljesül valamely j -re. Ekkor (4.8) szerint $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \lambda(0, n^j)$. Másrészt, ha $\text{Sub}(Z_{n^i}\text{-Mod}) \models \lambda(0, n^j)$, akkor $Z_{n^i} \models D(0, n^j)$ miatt $i \leq j$. Ez viszont nem teljesül valamennyi i -re. (5.2)(A) felhasználásával a $\Psi = \text{feltételes}$ eset ugyanigy adódik.

Q.e.d.

V. GYÜRÜK JELLEMZÉSE FELTÉTELES HÁLÓ- AZONOSSÁGOKKAL

1.§. Malcev-szerű feltételek. E paragrafusban a [13]-beli eredményt fogalmazzuk meg modulusvarietásokra. Mivel kezelhetőségre törekszünk, a kapott feltétel nem Malcev-típusu, csak Malcev-szerű lesz. A továbbiakban legyen χ egy rögzített $(p_0 \leq q_0 \& \dots \& p_t \leq q_t) \Rightarrow p \leq q$ alaku feltételes hálóaazonosság, ahol p, p_i, q, q_i egy U változóhalmaz feletti véges hálótermek. Definiáljuk a p_i, q_i termeket $i < \omega$ -ra is: ha $i \equiv j \pmod{t+1}$ és $0 \leq j \leq t$, akkor p_i , ill. q_i legyen a p_j ill. q_j term. Az alábbi definíciókkal az (5.1) tétel kimondását készítjük elő. A definiálandó modulust - szándékosan - bizonyos szabadsági fokokat megengedve határozzuk majd meg. Ha G egy gráf és H egy halmaz, akkor $H \times G$ jelöli majd azt a gráfot, melynek szögponthalmaza $H \times V(G)$, élhalmaza pedig $\{(h, a), x, (h, b) : h \in H \text{ és } (a, x, b) \in E(G)\}$. Gráfok diszjunkt egyesítését szögpont (és így él) -halmazaik diszjunkt halmazelméleti uniójával kapjuk. Így pl. $H \times G \cong \bigcup (G : h \in H)$.

Legyen R egy rögzített gyűrű, $G^0 := G(p)$, $F^0 := V(G(p)) \setminus \{\text{bal végpont}\}$, és M^0 az F^0 által szabadon generált R -modulus. A G^0 bal végpontját tekintsük az M^0 0 elemének. Minden $x \in U$ -ra legyen $X^0 := [c-b : (b, x, c) \in E(G^0)]$ (generált részmodulus). (A (4.3) jelöléseivel $X^0 = x\varphi_p$ és $M^0 = M(p)$.)

Tegyük fel, hogy $m \geq 1$ -re G^{m-1} , F^{m-1} , M^{m-1} és $x \in U$ -ra X^{m-1} már definiálva van. A definíció most kettéválik (mert két definíciót adunk meg egyszerre).

(a) Válasszunk olyan $S_m \subseteq M^{m-1}$ részhalmazt, melyre $S_m \subseteq P_m^{m-1} := p_m(X^{m-1} : x \in U)$.

(b) Válasszunk egy olyan $S_m \subseteq M^{m-1}$ részhalmazt, melyre a $Q_m^{m-1} := q_m(X^{m-1} : x \in U)$ jelöléssel élve %

*) „Tekintés” helyett egy $V(G^0) \rightarrow M^0$ leképezést is vehetnénk.

$$P_m^{m-1} \setminus Q_m^{m-1} \subseteq [S_m] \subseteq P_m^{m-1}.$$

Legyen (mindkét esetben) $G^m := G^{m-1} \cup (S_m \times G(q_m))$,
 $F^m := F^{m-1} \cup (S_m \times (V(G(q_m)) \setminus \{\text{bal végpont, jobb végpont}\}))$, és
 legyen M^m az F^m által szabadon generált R -modulus. Minden
 $s \in S_m$ -re az $(s, \text{bal végpont})$ G^m -beli ^{*}szögpontot tekintsük
 az M^m 0-elemének, míg az $(s, \text{jobb végpont})$ G^m -beli ^{*}szög-
 pontot pedig tekintsük s -nek (mint M^{m-1} elemének). Minden
 $x \in U$ -ra $X^m := [c-b: (b, x, c) \in E(G^m)]$. Látható, hogy $F^{m-1} \subseteq F^m$,
 $M^{m-1} \subseteq M^m$, $G^{m-1} \subseteq G^m$, $X^{m-1} \subseteq X^m$, továbbá a G^m minden szögpont-
 ja egyuttal M^m -nek is eleme. (Egy M^m -beli elem, pl. a 0, egy-
 szerre több G^m -beli ^{is lehet} szögpont). A $G^0 = G(p)$ jobb végpontját
 jelöljük f_1 -gyel.

(5.1) Tétel. Akárhogy is választjuk az S_m részhalmazokat
az (a) (illetve a (b)) feltételnek megfelelően, χ
Sub(R -Mod)-beli teljesüléséhez a „létezik $n < \omega$, hogy
 $f_1 \in q(X^n: x \in U)$ ” feltétel elegendő (illetve szükséges és
elegendő).

Megjegyzés. A „(c) $S_m := P_m^{m-1}$ ” változat ugyan egy
 egyértelműen definiált szükséges és elegendő feltételhez
 vezetne, de ezt gyakran nehéz lenne használni.

Bizonyítás. Teljesüljön $f_1 \in q(X^n: x \in U)$ az (a) vagy (b)
 változat esetén. Legyen $A \in \text{Sub}(R\text{-Mod})$, $x \in U$ -ra $X' \in \text{Sub}(A)$,
 $a_1 \in p(X': x \in U)$, és tegyük fel, hogy $i \leq t$ -re (s így $i < \omega$ -ra
 is) $p_i(X': x \in U) \subseteq q_i(X': x \in U)$. A (4.2) szerint $a_1 \in G^0 = G(p)$ -vel
 elérhető A -ban. Azaz, az $x \mapsto X'$ leképezést φ -vel jelölve,
 létezik olyan $\psi^0: V(G^0) \rightarrow A$ leképezés, hogy $f_1 \psi^0 = a_1$ és
 $(\varphi, \psi^0): G^0 \rightarrow A$. Terjesszük ki ψ^0 -at az egyértelműen megha-
 tározott $\hat{\psi}^0: M^0 \rightarrow A$ (R -modulus-) homomorfizmussá. Ekkor
 minden $(b, x, c) \in E(G^0)$ -ra $c \hat{\psi}^0 - b \hat{\psi}^0 = c \psi^0 - b \psi^0 \in X'$. Tegyük most
 fel, hogy $m \geq 1$ -re $\psi^{m-1}: V(G^{m-1}) \rightarrow A$ és $\hat{\psi}^{m-1}: M^{m-1} \rightarrow A$ már %
^{*}(de nem G^{m-1} -beli)

definiálva van úgy, hogy $\hat{\psi}^{m-1}$ homomorfizmus, $\hat{\psi}^{m-1}$ kiterjesztése ψ^{m-1} -nek és ψ^0 -nak, s bármely $(b, x, c) \in E(G^{m-1})$ -re $c\hat{\psi}^{m-1} - b\hat{\psi}^{m-1} \in X'$. Ekkor $x \in U$ -ra $X^{m-1}\hat{\psi}^{m-1} \subseteq X'$, ahonnan (4.4) szerint $S_m\hat{\psi}^{m-1} \subseteq p_m(X^{m-1}: x \in U)\hat{\psi}^{m-1} \subseteq p_m(X': x \in U) \subseteq q_m(X': x \in U)$, azaz $S_m\hat{\psi}^{m-1} \subseteq q_m(X': x \in U)$ adódik. A (4.2) gráf lemmát az $S_m\hat{\psi}^{m-1}$ elemekre alkalmazva látjuk, hogy létezik egy olyan ψ^{m-1} -et kiterjesztő $\psi^m: V(G^m) \rightarrow A$ leképezés, hogy minden $s \in S_m$ -re $(s, \text{bal végpont})\psi^m = 0$, $(s, \text{jobb végpont})\psi^m = s\hat{\psi}^{m-1}$ és bármely $(b, x, c) \in E(G^m)$ -re $c\psi^m - b\psi^m \in X'$. Látható, hogy ha valamely $u \in M^{m-1}$ -re $u\psi^m$ értelmezett, akkor $u\psi^m = u\hat{\psi}^{m-1}$, továbbá $F^m \subseteq \psi^m$ értelmezési tartománya $\subseteq M^{m-1} \cup F^m$. Ezért létezik egy egyértelműen meghatározott $\hat{\psi}^m: M^m \rightarrow A$ homomorfizmus, amely ψ^m -nek kiterjesztése és $\hat{\psi}^{m-1}$ -nek folytatása. (Legyen ugyanis $\hat{\psi}^m$ a $\psi^m|_{F^m}$ -nek F^m -ről az F^m által szabadon generált M^m -re való kiterjesztése.) Így bármely $(b, x, c) \in E(G^m)$ -re $c\hat{\psi}^m - b\hat{\psi}^m = c\psi^m - b\psi^m \in X'$ is teljesül.

Eddigi indukciónk végeztével látjuk, hogy $m < \omega$ -ra létezik $\psi^m: V(G^m) \rightarrow A$ és $\hat{\psi}^m: M^m \rightarrow A$ úgy, hogy $\hat{\psi}^m$ egy ψ^0 -at is és ψ^m -et is kiterjesztő homomorfizmus, $(b, x, c) \in E(G^m)$ -ből pedig $c\hat{\psi}^m - b\hat{\psi}^m \in X'$ következik. Ennélfogva $X^n\hat{\psi}^n \subseteq X'$, és (4.4) alkalmazásával $a_1 = f_1\psi^0 = f_1\hat{\psi}^n \in q(X^n: x \in U)\hat{\psi}^n \subseteq q(X': x \in U)$. Tehát χ teljesül $\text{Sub}(A)$ -ban, s így $\text{Sub}(\underline{\text{R-Mod}})$ -ban is.

Fordítva, χ teljesüljön $\text{Sub}(\underline{\text{R-Mod}})$ -ban. A (b) változatnak megfelelően definiált fogalmakat tekintve legyen $M^\omega, F^\omega, G^\omega$ és $x \in U$ -ra X^ω rendre az M^n -ek, F^n -ek, G^n -ek és X^n -ek ($n < \omega$) (halmazelméleti tartalmazásra monoton növekvő láncainak direkt) halmazelméleti egyesítettje. Ekkor M^ω az F^ω által generált szabad R -modulus, X^ω pedig M^ω -nak a $[c-b: (b, x, c) \in E(G^\omega)]$ részhalmaz által generált részmodu- %
*) itt $(s, \text{bal végpont}) \notin G^{m-1}$

lusa. Meg fogjuk mutatni, hogy az X^ω ($x \in U$) részmodulusokra χ premisszája teljesül. Hogy (4.2) alkalmazását előkészítsük, vezessük be az $x\varphi^l := X^l$ jelölést. A p_j vé-
gessége miatt világos, hogy tetszőleges $\psi: V(G(p_j)) \rightarrow M^\omega$
leképezésre a „ $(\varphi^\omega, \psi): G(p_j) \rightarrow M^\omega$ ” és a „valamely $j+1 < m < \omega$ -
ra $m \equiv j \pmod{t+1}$ és $(\varphi^{m-1}, \psi): G(p_j) \rightarrow M^{m-1}$ ” feltételek
ekvivalensek. Ezért (4.2) szerint $p_j(X^\omega: x \in U) =$
 $= \bigcup (p_j(X^{m-1}: x \in U): j+1 < m < \omega \text{ és } m \equiv j \pmod{t+1})$. A konst-
rukció és (4.2) szerint $j+1 < m$ és $m \equiv j \pmod{t+1}$ esetén
 $p_j(X^{m-1}: x \in U) = P_m^{m-1} = (P_m^{m-1} \setminus Q_m^{m-1}) \cup (P_m^{m-1} \cap Q_m^{m-1}) \subseteq$
 $\subseteq [S_m] \cup Q_m^{m-1} \subseteq q_m(X^m: x \in U) \cup Q_m^{m-1} \subseteq q_m(X^\omega: x \in U) = q_j(X^\omega: x \in U)$.
Ezt az előbbi formulával összevetve $p_j(X^\omega: x \in U) \subseteq q_j(X^\omega: x \in U)$,
tehát χ premisszája valóban teljesül. Mármost (4.2)-t az
eddigiekhez hasonló módon alkalmazva $f_1 \in p(X^0: x \in U) \subseteq$
 $\subseteq p(X^\omega: x \in U) \subseteq q(X^\omega: x \in U) = \bigcup (q(X^m: x \in U): m < \omega)$, s így
valamely $n < \omega$ -ra $f_1 \in q(X^n: x \in U)$. Q.e.d.

2.§. Gyűrűk reguláris tulajdonságai, I. E §-ban gyűrűk
azon tulajdonságairól lesz szó, melyek reguláris feltételes
hálóazonosságokkal jellemezhetők. A (4.5) tétel előtt de-
finiált termék egyuttal az $U := \{x, y, z, t, e\}$ halmaz fölött is
termék. Tetszőleges m, n, k nem negatív egészekre legyen
 $p_0 := ((e + w_{n-1})w_{-1} + x)z$, $q_0 := e$,
 $q := ((w_k + y)(z + t) + w_{mn})(x + y + e) + x + z$,
és a $p_0 \leq q_0 \Rightarrow p \leq q$ feltételes hálóazonosságot jelöljük
 $\chi(m, n, k)$ -val.

(5.2) Tétel.

(A) Tetszőleges R gyűrűre és m, n, k nem negatív egészekre
 $\chi(m, n, k)$ pontosan akkor teljesül $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -ban, ha vala-
mely $i < \omega$ -ra a $D(mn^{i+1}, kn^i)$ oszthatósági feltétel telje-
sül R -ben.

(B) Legyen χ egy reguláris feltételes hálózazonosság.

Tegyük fel, hogy létezik olyan nulla-karakterisztikájú (azaz az $S_{R^0}(0) = 0$ feltételt teljesítő) R^0 gyűrű, melyre χ teljesül $\text{Sub}(R^0\text{-Mod})$ -ban. Ekkor léteznek olyan m_χ, n_χ, k_χ pozitív egészek, hogy tetszőleges R gyűrűt tekintve χ pontosan akkor teljesül $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -ban, ha valamely $i < \omega$ -ra $D(m_\chi n_\chi^{i+1}, k_\chi n_\chi^i)$ teljesül R -ben.

Megjegyzések. A tétel (A) része szerint $\chi(m, n, k)$ nyilván reguláris (ld. (3.2)). Nem ismeretes, hogy (B)-ből az R^0 létezésére vonatkozó feltétel elhagyható-e (együttal m pozitivitását sem kikötve). Ha sikerülne tetszőleges reguláris χ -hez a fenti tulajdonságu $m_\chi, n_\chi, k_\chi \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ létét igazolni, akkor az (A) rész teljes megfordításához és a reguláris feltételes hálózazonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságok pontos ismeretéhez jutnánk. A (B) bizonyítási módszere ugyan átvihető arra az esetre is, amikor $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \chi$ -ből $S_R(0) > 0$ következik, de csupán olyan $(n_i)_{i < \omega}$ egész számokból álló sorozat létét tudnánk (de az értékezésben nem fogjuk) így igazolni, melyre $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \chi$ a $(\exists i < \omega)(R \models D(0, n_0 n_1 n_2 \dots n_{i-1}))$ feltétellel ekvivalens. Számossági okokból (csak $\aleph_0$ sok χ van) nem léphet fel valamennyi $(n_i)_{i < \omega}$ sorozat; (5.2) (A)-ból viszont könnyen látható, hogy a „ $\{p \in P: \text{valamely } i < \omega \text{-ra } p \mid n_i\}$ véges” feltételnek eleget tevő sorozatok fellepnek. Vegyük észre azt is, hogy (5.1) érvényes $(p'_0 \leq q_0 \& p'_1 \leq q_1 \& \dots) \Rightarrow p \leq q$ alaku „feltételes azonosságokra” is, ahol p, q és $i < \omega$ -ra p_i, q_i véges hálótermek, és minden $j < \omega$ -ra végtelen sok olyan $i < \omega$ létezik, hogy $p_j = p_i$ és $q_j = q_i$. (Ezen utóbbi feltétel a premissza-egyenlőtlenségek ismétlésével és átrendezésével mindig elérhető: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$ helyett vegyük a $0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, 0, \dots$ indexsorozatot). Legyen $k \in \mathbb{N}$ és legyen $(n_i)_{i < \omega} \in \mathbb{N}^\omega$ egy olyan sorozat, mely minden

tagját végtelen sokszor tartalmazza. Az (5.2) előtt definiált termék mellett a $h_j := ((e + w_{n_j-1})w_{-1} + x)z$ termeket is tekintve, tetszőleges R gyűrűben a $D(0, kn_1 n_2 \dots n_i)$ pontosan akkor teljesül valamely $i < \omega$ -ra, ha $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -ban $(h_0 \leq e \ \& \ h_1 \leq e \ \& \ h_2 \leq e \ \& \ \dots) \Rightarrow p \leq ((w_k + y)(z + t) + x)(x + y + e) + x + z$ teljesül. Ezen állítás (5.2)(A)-hoz hasonlóan igazolható, így itt nem bizonyítjuk.

(5.2)(A) Bizonyítása. Az (5.1)-et fogjuk alkalmazni azon (egyidejűleg (a) és (b) változatu) konstrukcióra, melynél $1 \leq j < \omega$ -ra $S_j := p_j(X^{j-1}: x \in U)$. Mivel $G(q_0) = G(q_j)$ -nek nincs belső szögpontja, $F^0 = F^j$ és $M^0 = M^j$ ($j < \omega$). Így az (5.1) jelölései mellett a (4.6) ábrát, a (4.7) összefüggéseket és az ott fellépő jelöléseket is használhatjuk (de a_i helyett f_i -t írunk); pl. $M^0 = M(p)$. Esetünkben az (5.1) szerinti konstrukció indukciós lépése lényegében abban áll, hogy $E^j := [E^{j-1} \cup p_0(H^{j-1}: h \in U)]$. Így $h \in U \setminus \{e\}$ -re $H^j = H^0$, és elemi (indukciót használó) számolással adódik (természetesen (4.7)-et is igénybe véve) az $E^j = (O/n^j)_R f_3 = \{rf_3: r \in R \text{ és } n^j r = 0_R\}$ összefüggés. Ugyancsak elemi számolással (melyet a (4.7) igazolásához hasonló, egyszerű volta miatt megint elhagyunk) kapjuk, hogy $q(H^j: h \in U) = \{af_1 + bf_2 + cf_3: a \in (mn^{j+1}/kn^j)_R, b, c \in R\}$. Innen (5.1)-et figyelembe véve tételünk (A) része adódik. (A (B) részt a fejezet utolsó §-ában fogjuk igazolni.)

3.§. Példa nem reguláris feltételes hálózazonosságra. Nem reguláris feltételes hálózazonosságok egzisztenciája Hutchinson [40]-beli eredményeiből könnyen következik. Most olyan $\hat{\lambda}$ -t adunk meg konkrétan, mely nemcsak hogy nem reguláris, hanem a (4.15)-ben ($\hat{\lambda}$ helyett λ -ra) megfogalmazott tulajdonsággal sem rendelkezik. Tekintsük az alábbi,

$\hat{X} = \{x, y, z, t\}$ fölötti hálótermeket:

$$p := (x+y)(z+t), \quad w_{-1} := (x+z)(y+t), \quad h_1 := (x+t)(y+z),$$

$$h_2 := (x+t)(p+w_{-1}), \quad h_3 := (y+t)(h_1+p), \quad p_0 := (h_2+z)y,$$

$$q_0 := x+z+h_3, \quad q := p_0+x, \quad \text{és legyen } \hat{\lambda} \text{ a}$$

$p_0 \leq q_0 \Rightarrow p \leq q$ feltételes hálóazonosság. Két gyűrűt is

definiálunk. $Z_4[x]$ -ben az $\{x^2-2, 2x\}$, illetve $\{x^2, 2x\}$ által generált ideált I_1 -gyel, ill. I_2 -vel jelölve $R_1 := Z_4[x]/I_1$,

$R_2 := Z_4[x]/I_2$. Az $a := x+I_1 \in R_1$ és $b := x+I_2 \in R_2$ jelölésekkel $a^2 = 2$, $2a = 0$, $b^2 = 2b = 0$. Mindkét gyűrű nyolcelemű,

$$R_1 = \{i+ja: 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1\}, \quad R_2 = \{i+jb: 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1\},$$

additív csoportjaik (R_1^+ és R_2^+) izomorfak (hiszen $R_1^+ \rightarrow R_2^+$,

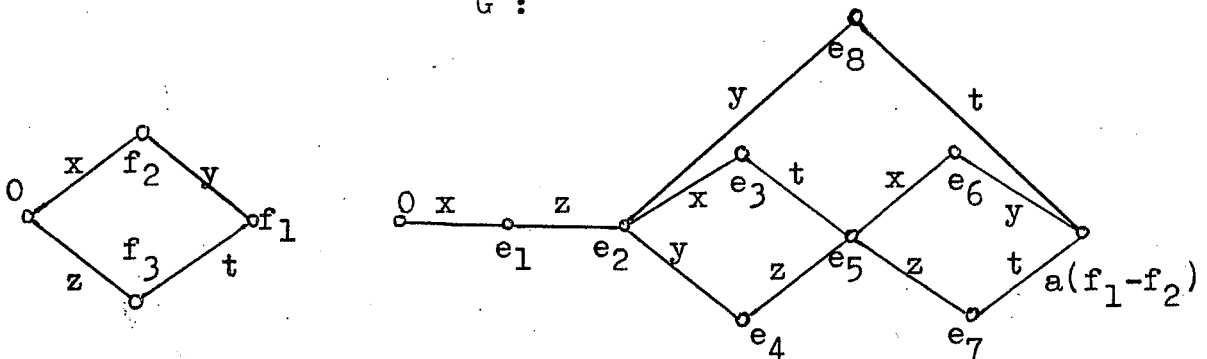
$i+ja \mapsto i+jb$ izomorfizmus), és karakterisztikájuk 4.

(5.3) Tétel. Az imént definiált $\hat{\lambda}$ nem reguláris. Sőt,
egy R gyűrű additív csoportja nem határozza meg, hogy
 $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \hat{\lambda}$ teljesül-e. Például $R_1^+ \cong R_2^+$, de mégis
 $\text{Sub}(R_1\text{-Mod}) \models \hat{\lambda}$ és $\text{Sub}(R_2\text{-Mod}) \not\models \hat{\lambda}$.

Megjegyzés. A fenti eredmény elérésében segített Hutchinson javaslata [41], amely ([13]-ra reagálva) egy nem reguláris $\hat{\lambda}$ keresését indítványozta $\text{IS}(\text{Sub}(R_1\text{-Mod}) \not\models \hat{\lambda}) \neq \text{IS}(\text{Sub}(Z_4\text{-Mod}) \not\models \hat{\lambda})$ alapján.

Bizonyítás. A $\text{Sub}(R_1\text{-Mod}) \models \hat{\lambda}$ igazolásához az (5.1) tételt fogjuk használni. Legyen $F^0 := \{f_1, f_2, f_3\}$ az (5.4)

G^1 :



(5.4) Ábra

ábra szerint (melyen G^0 részgráfként van jelen), $p_j := p_0$, $q_j := q_0$. Elemi számolás mutatja, hogy $X^0 = [f_2]$, $Y^0 = [f_1 - f_2]$, $Z^0 = [f_3]$, $T^0 = [f_1 - f_3]$, (tetszőleges k betűre a $K^i := k(C^i: c \in \hat{X})$ jelölést bevezetve) $P^0 := [f_1]$, $W_{-1}^0 = [f_2 - f_3]$, $H_2^0 = [f_1 + f_2 - f_3]$, $P_0^0 = \{r(f_1 - f_2): r \in (0/2)_{R_1}\}$. Válasszuk S_1 -et (az (a) változat szerint) $\{a(f_1 - f_2)\}$ -nek! Mivel $|S_1| = 1$, $G^0 \dot{\cup} (S_1 \times G(q_1))$ helyett érdekesebb az ezzel izomorf $G^0 \dot{\cup} G(q_0)$ gráfot G^1 -nek tekinteni. Legyen $F^1 := \{f_1, f_2, f_3, e_1, \dots, e_8\}$, az (5.4) ábrának megfelelően. Az alábbi képletekben gyakran egyenlőség (melyre nem lesz szükségünk) is fennáll, valamennyi a korábbiak és az ábra egyszerű következménye.

$$\begin{aligned} X^1 &\supseteq [f_2, e_1, e_2 - e_3, e_5 - e_6], & Y^1 &\supseteq [f_1 - f_2, e_2 - e_4, e_2 - e_8, e_6], \\ Z^1 &\supseteq [f_3, e_1 - e_2, e_4 - e_5, e_5 - e_7], & T^1 &\supseteq [f_1 - f_3, e_3 - e_5, e_7 - e_8, a(f_1 - f_2) - e_7], \\ P^1 &\supseteq [f_1, e_1 - e_2 + e_4 - e_5, e_3 - e_4, e_4 - e_8, a f_2 + e_5], \\ W_{-1}^1 &\supseteq [f_2 - f_3, e_2, e_3 - e_5 + e_6, e_4 - e_6, e_6 - e_7], \\ H_1^1 &\supseteq [f_1 - f_2 - f_3, e_1 - e_2 + e_6, e_2 - e_5, e_7 - e_8, a(f_1 - f_2) + e_1 - e_7], \\ H_2^1 &\supseteq [f_1 + f_2 - f_3, e_1 - e_5 + e_6, e_2 - e_3 + e_5 - e_6, e_3 - e_6, e_7 - e_8, \\ &\quad a(f_1 - f_3) + e_3 - 2e_5 + e_6, a(f_2 - f_3) + e_3 - e_5 + e_7]. \end{aligned}$$

Mármost $f_1 - f_2 = -(f_1 + f_2 - f_3) + f_3 + a(e_3 - e_6) + a(a(f_1 - f_3) + e_3 - 2e_5 + e_6) \in H_2^1 + Z^1$ miatt $f_1 = (f_1 - f_2) + f_2 \in P_0^1 + X^1 = Q^1 = q(C^1: c \in \hat{X})$, tehát $\text{Sub}(R_1\text{-Mod}) \models \hat{\chi}$.

Most (közbülső lépésként) $\text{Sub}(Z_4\text{-Mod}) \not\models \hat{\chi}$ megmutatása a célunk. Az R_1 -nél alkalmazott konstrukciónak a „Válaszunk S_1 -et” megelőző része Z_4 -re is szó szerint megismételhető (az egyetlen jelölésbeli eltérés: $P_0^0 = \{r(f_1 - f_2): r \in (0/2)_{Z_4}\}$). Számoljunk: $H_1^0 = [f_1 - f_2 - f_3]$, $H_3^0 = [2f_1 - f_2 - f_3]$, $Q_0^0 = [2f_1, f_2, f_3]$. Mivel $-R_2$ -vel ellentétben $(0/2)_{Z_4} \subseteq 2Z_4$, $P_1^0 = P_0^0 \subseteq Q_0^0 = Q_1^0$. Az $S_1 := \emptyset$ választás így megfelel a (b) változatnak. Ekkor viszont $X^1 = X^0, \dots, T^1 = T^0$, $P_2^1 = P_0^0 \subseteq Q_0^0 = Q_2^1$, tehát S_2 -t is az

$\emptyset$ -nak választhatjuk. És így tovább, minden m -re S_m -et az $\emptyset$ -nak választva $X^m = X^0, \dots, T^m = T^0, M^m = M^0, Q^m = Q^0$. Mivel $f_1 \notin \{0, 2(f_1 - f_2)\} + [f_2] = P_0^0 + X^0 = Q^0 = Q^m$ ($m \geq 1$), (5.1) szerint $\hat{\chi}$ nem teljesül $\text{Sub}(Z_4\text{-Mod})$ -ban. (Megjegyzendő, hogy a fenti, M^0 -beli számolás (5.1) nélkül is mutatja, hogy $\text{Sub}(M^0) \not\models \hat{\chi}$. Mi azonban (5.1) újabb alkalmazására is példát akartunk mutatni.) Az $\{x\}$ által $Z_4[x]$ -ben generált ideált I -vel jelölve $I_2 \subseteq I$, s így $Z_4 \cong Z_4[x]/I$ homomorf képe R_2 -nek. Így (5.8) szerint $\text{Sub}(R_2\text{-Mod}) \not\models \hat{\chi}$. Q.e.d.

4.§. Formális egyenletrendszerekkel történő jellemzés.

Nem sokat tudunk a feltételes hálózatonosságokkal jellemezhető gyűrűtulajdonságokról általában, de pl.

(5.5) Észrevétel. A „létezik $\sqrt[n]{m}$ ” gyűrűtulajdonság ($n, m \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$) nem jellemezhető. Azaz nincs olyan χ feltételes hálózatonosság, melyre $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \chi$ és $(\exists r \in R)(r^n = m \cdot 1_R)$ tetszőleges R gyűrűre ekvivalens lenne.

Bizonyítás. Alkalmazzuk (5.9)-et Q -ra és annak - mint számtestnek - $\sqrt[n]{m}$ - mel való bővítettjére. Q.e.d.

Ezek szerint az $x^n = m$ (egy egyenletből álló formális egyenletrendszer) megoldhatósága nem jellemezhető ily módon. Látni fogjuk azonban, hogy bizonyos formális egyenletrendszereknek mégis köze van a feltételes hálózatonosságokhoz.

A (3.4) bizonyításakor láttuk, hogy az ott szereplő erős Malcev-feltétel $R\text{-Mod}$ -beli teljesülése egy formális (azaz R -től függetlenül definiált) lineáris egyenletrendszer R -beli megoldhatóságával ekvivalens. Hasonló módon látható, hogy tetszőleges U erős Malcev-feltételhez megadható egy formális, véges (de nem feltétlenül lineáris) E egyenletrendszer úgy, hogy tetszőleges R gyűrűre „ $R\text{-Mod} \models U$ ” és „ E R -ben megoldható” ekvivalensek. Ezt összevetve azzal,

hogy Jónsson [47] vagy [13] szerint $\text{Con}(\underline{R\text{-Mod}}) \stackrel{?}{=} \chi$ Malcev-feltétellel jellemezhető, adódik az alábbi állítás (melyhez (5.1)-ből is eljuthatnánk).

(5.6) Lemma. Minden χ feltételes hálózazonossághoz létezik véges formális egyenletrendszereknek egy $\{E_n: n < \omega\}$ halmaza úgy, hogy tetszőleges R gyűrűt tekintve $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models \chi$ pontosan akkor teljesül, ha valamely n -re E_n megoldható R -ben. A $(\exists n)(E_n \text{ megoldható})$ feltétel n -ben gyengülő, azaz $(\forall n)(\forall R)(E_n \text{ } R\text{-ben megoldható} \Rightarrow E_{n+1} \text{ } R\text{-ben megoldható})$.

Megjegyzés. A [13]-beli algoritmust felhasználva a fenti E_n -ek mindegyike megkonstruálható, szemben Makkai és McNulty [48] alábbi eredményével (melyet modellelméleti úton igazoltak): Ha $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models \chi$, akkor létezik olyan R -től és χ -től függő E formális egyenletrendszer, amely R -ben megoldható, és valahányszor E megoldható egy R' gyűrűben, mindannyiszor $\text{Sub}(\underline{R'\text{-Mod}}) \models \chi$. Említést érdemel az is, hogy (3.6) és (5.3) szerint a lemmában szereplő E_n egyenletrendszerek általában nem lineárisak.

(5.7) Következmény. Tetszőleges R_1, R_2 gyűrűkre a hálók kvázivarietásainak hálójában $\underline{I} \sim \underline{I} \text{ Sub}(\underline{R_1\text{-Mod}}) \vee \underline{I} \sim \underline{I} \text{ Sub}(\underline{R_2\text{-Mod}}) = \underline{I} \sim \underline{I} \text{ Sub}(\underline{R_1 \times R_2\text{-Mod}})$.

A bizonyítás (4.14)-ével analóg, csak (4.13) helyett (5.6)-ra kell hivatkozni.

5.§. Hutchinson néhány eredménye. E §-ban Hutchinson néhány [40]-beli eredményét vezetjük le saját eszközeinkkel – a bevezetésben megfogalmazott célkitűzésnek megfelelően.

(5.8) Következmény (Hutchinson [40, Prop. 2]). Legyen $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ egy 1-örző gyűrűhomomorfizmus. Ekkor $\underline{I} \sim \underline{I} \text{ Sub}(\underline{R_2\text{-Mod}}) \subseteq \underline{I} \sim \underline{I} \text{ Sub}(\underline{R_1\text{-Mod}})$.

Bizonyítás. (5.6)-ból adódik, mivel ψ az E_n megoldásvektorát megoldásvektorba viszi át.

(5.9) Állítás (Hutchinson [40, Thm 5/6,8]). Legyen R_1 és R_2 két azonos spektrumu gyűrű, melyekre vagy (1) R_1 és R_2 (azonos) karakterisztikája négyzetmentes (azaz semilyen prim négyzetével sem osztható) pozitív egész szám, vagy (2) R_1 és R_2 torziómentes. Ekkor $\underline{I} \underline{S} \underline{Sub}(R_1\text{-Mod}) = \underline{I} \underline{S} \underline{Sub}(R_2\text{-Mod})$.

Bizonyítás. Először a következő (gyengébb) állítást igazoljuk: legyen $S_{R_1} = S_{R_2}$, és $S_{R_1}(0) \in P$ vagy R_1, R_2 torziómentes; ekkor $\underline{Sub}(R_1\text{-Mod})$ -ban és $\underline{Sub}(R_2\text{-Mod})$ -ban ugyanazok a χ -k teljesülnek. Legyen $R \in \{R_1, R_2\}$. Elég lesz azt igazolnunk, hogy az (5.1)(b) konstrukció az alább tisztázandó értelemben független attól, hogy $R = R_1$ vagy $R = R_2$. Az M^m egy C részmodulusát szabályosnak fogjuk nevezni, ha $(F = \{f_1, \dots, f_{t_m}\})$ jelöléssel $C = [\sum (c_{ij} f_j : 1 \leq j \leq t_m) : i < n_C]$ u.n. szabályos alakban adható meg alkalmas c_{ij} egészekkel és $n_C < \omega$ -val. Legyen $D = [\sum (d_{ij} f_j : 1 \leq j \leq t_m) : i < n_D]$ egy másik szabályos (alakban megadott) részmodulus. Ekkor

(5.10) $C+D$ és $C \cap D$ is szabályos, és alkalmas szabályos alakjuk nem függ attól, hogy $R = R_1$ vagy $R = R_2$.

A $C+D$ -re vonatkozó állítás triviális. A C , ill. D elemei $\sum (r_i \sum (c_{ij} f_j : 1 \leq j \leq t_m) : i < n_C) = \sum (\sum (c_{ij} r_i : i < n_C) f_j : 1 \leq j \leq t_m)$, illetve $\sum (\sum (d_{ij} r_{n_C+i} : i < n_D) f_j : 1 \leq j \leq t_m)$ alakúak ($r_i \in R$ tetszőleges). Legyen $n := n_C + n_D$, és legyen $\underline{r}$ az r_i -k ($i < n$) oszlopvektora. A $\sum (c_{ij} y_i : i < n_C) - \sum (d_{ij} y_{n_C+i} : i < n_D) = 0$ ($1 \leq j \leq t_m$) egyenletekből álló formális lineáris egyenletrendszer jelölje $B\underline{y} = \underline{0}$. Ekkor $C \cap D = \{ \sum (r_i \sum (c_{ij} f_j : 1 \leq j \leq t_m) : i < n_C) : \underline{r} \in R^n \text{ és } B\underline{r} = \underline{0}_R \}$. Tekintsünk most egy $\ell x = 0$

($\ell \in \mathbb{Z}$, x ismeretlen) egyenletet; ennek az egyenletnek R -ben vagy csak a 0_R az egyetlen megoldása, vagy R minden eleme megoldása (s hogy melyik lehetőség áll fenn, az nem függ attól,

hogy $R=R_1$ vagy R_2). Frobenius (3.5) tétele alapján így $\text{Br } \underline{r} = \underline{0}_R$ avval ekvivalens, hogy $\underline{r} = H\underline{r}'$ alakú, ahol $\underline{r}'$ egyes komponensei (mondjuk az r'_i -k $i \in I$ -re) tetszőleges elemei R -nek, a többi komponensek értéke pedig 0_R . Így a H $n \times n$ típusú mátrix elemeit $h_{i\ell}$ -ekkel jelölve ($0 \leq i, \ell < n$):

$$\begin{aligned} C \cap D &= \left\{ \sum (\sum (h_{i\ell} r'_i : \ell < n) \cdot \sum (c_{ij} f_j : 1 \leq j \leq t_m) : i < n_C) : \right. \\ &\left. \ell \notin I\text{-re } r'_i = 0_R \text{ és } \underline{r}' \in R^n \right\} = \left\{ \sum (r'_\ell \sum (\sum (h_{i\ell} c_{ij} : i < n_C) f_j : \right. \\ &\left. 1 \leq j \leq t_m) : \ell < n) : \underline{r}' \in R^n \text{ és } \ell \notin I\text{-re } r'_i = 0_R \right\} = \\ &= \left[\sum (\sum (h_{i\ell} c_{ij} : i < n_C) f_j : 1 \leq j \leq t_m) : \ell \in I \right]. \text{ Tehát } C \cap D \text{ szabályos.} \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy lehetséges olyan S_m -eket választani az (5.1)(b) változatban, hogy $q(X^m : x \in U)$ szabályos legyen. (5.10) szerint az X^0 -ak ($x \in U$) szabályosságából P_1^0 és $q(X^0 : x \in U)$ szabályossága következik. Az indukciós lépéshez tegyük fel, hogy $m \geq 1$ -re és $x \in U$ -ra X^{m-1} , P_m^{m-1} és $q(X^{m-1} : x \in U)$ szabályos. Mondjuk $P_m^{m-1} =$
 $= \left[\sum (c_{ij} f_j : 1 \leq j \leq t_{m-1}) : i < n \right]$, ahol c_{ij} -k m -től függő egészek. Legyen $S_m := \left\{ \sum (c_{ij} f_j : 1 \leq j \leq t_{m-1}) : i < n \right\}$. (5.10)-ből X^m ($x \in U$), P_{m+1}^m és $q(X^m : x \in U)$ szabályossága adódik.

Mivel $q(X^m : x \in U)$ szabályos, $f_1 \in q(X^m : x \in U)$ egy alkalmas E_m lineáris formális egyenletrendszer R -beli megoldhatóságával ekvivalens. Így (5.1)-ből és (3.6)-ból az állítás mondott gyengébb változata adódik.

Tekintsük most az $S_R(0) = p_0 p_1 \dots p_n$ ($p_0, \dots, p_n$ különböző primek) esetet. Ismeretes (McCoy [50, Thm. 28]), hogy ekkor R előáll p_i karakterisztikájú R_i gyűrűk ($i \leq n$) direkt szorzataként (pl. a $(0/p_i)_R$ -ek belső direkt szorzataként), a direkt tényezők (mint R homomorf képei) is egység-

elemesek. Ezért az állítás a már igazolt részéből és (5.7)-ből adódik. Az $S_R(0) = 1$ eset pedig triviális. Q.e.d.

Megjegyzés. A fenti bizonyításban szereplő c_{ij} együtthatók rekurzióval meghatározhatók; ez hasznos lehet $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \stackrel{?}{=} \chi$ eldöntésekor olyan esetben amikor R torziómentes, vagy prim karakterisztikájú. A négyzetmentességre vonatkozó feltétel (5.9)-ből nem hagyható el, mert tetszőleges nem négyzetmentes n -re léteznek azonos n karakterisztikájú R_1 és R_2 gyűrűk, melyekre $\underline{I} \underline{S} \text{Sub}(\underline{R_1\text{-Mod}}) \neq \underline{I} \underline{S} \text{Sub}(\underline{R_2\text{-Mod}})$ (Hutchinson [40]).

Bár az $\underline{I} \underline{S} \text{Sub}(\underline{R_1\text{-Mod}}) \stackrel{?}{\subseteq} \underline{I} \underline{S} \text{Sub}(\underline{R_2\text{-Mod}})$ gyűrűelméleti jellemzése megoldatlan, speciális esetekben a válasz ismeretes (pl. amikor $R_2 = \mathbb{Z}_n$, stb., Hutchinson [40, Thm. 5/1, ..., 10]). A [40]-beli Thm. 5 itt nem idézett állításai könnyen következnek a (3.9), (5.7) és (5.9) eredményekből.

6.§. Két elegendő feltétel a regularitásra. Legyen e § során $\chi : (p_0 \leq q_0 \& \dots \& p_t \leq q_t) \Rightarrow p \leq q$ egy feltételes hálózazonosság, ahol p_i, q_i, p, q egy U változóhalmaz feletti termék.

(5.11) Állítás. Ha valamennyi q_i ($i \leq t$) egyesítésmentes (azaz változó, vagy változók metszete), akkor χ reguláris.

Bizonyítás. Az (5.1)(b)-t fogjuk alkalmazni, $m \geq 1$ -re $S_m := P_m^{m-1}$. Mivel $G(q_m)$ -nek nincs belső szögpontja, $F^m = F^{m-1} = \dots = F^0$, a q_m -ben fellépő változókra $X^m = X^{m-1} + P_m^{m-1}$, a többi (mondjuk y) változóra pedig $Y^m = Y^{m-1}$. Ezek szerint $Q^m := q(X^m : x \in U)$ az X^0 részmodulusokból egy alkalmas $\hat{q}_m$ termfüggvény alkalmazásával áll elő: $Q^m = \hat{q}_m(X^0 : x \in U)$; $\hat{q}_m$ nem függ a kérdéses (mondjuk R) gyűrűtől. Mármost (5.1) szerint $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \stackrel{?}{=} \chi$ avval ekvivalens, hogy valamely m -re $f_1 \in \hat{q}_m(X^0 : x \in U)$ (R -re vonatkozóan). Jelöléseinket a (4.3) jelöléseivel összhangba hozva ($X^0 = x\varphi_p$, $f_1 = a_p$) adódik,

hogy $f_1 \in \hat{q}_m(X^0: x \in U)$ és $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models p \leq \hat{q}_m$ ekvivalensek.

Kaptuk, hogy

(5.12) Az (5.11) feltevése mellett léteznek algorit-mussal nyerhető $\hat{q}_m$ termék úgy, hogy tetszőleges R gyűrűre χ pontosan akkor teljesül $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}})$ -ban, ha valamely $m < \omega$ -ra $\text{Sub}(\underline{R\text{-Mod}}) \models p \leq \hat{q}_m$.

Végül (5.11) könnyen adódik (5.12)-ből és abból a tény-ből (ld. (4.10) avagy (3.7) és (3.2)), hogy minden véges hálózatonosság reguláris. Q.e.d.

Az (5.11)-beli feltétel alkalmazható pl. $\chi(m,n,k)$ -ra is. A következő elegendő feltétel némi előkészületet kíván. Akkor mondjuk, hogy egy L parciális hálóra (Grätzer [29, Def. I.5.12 és Thm. I.5.20]) teljesül a (W) Whitman-felté-tel (Whitman [59]), ha $a, b, c, d \in L$ esetén amennyiben $a \wedge b$ és $c \vee d$ definiált és $a \wedge b \leq c \vee d$, akkor az $a \leq c \vee d$, $b \leq c \vee d$, $a \wedge b \leq c$, $a \wedge b \leq d$ egyenlőtlenségek egyike teljesül. Ha az U által generált és a $p_i \leq q_i$ ($i \leq t$) definiáló relációkkal megadott $\text{FL}(U; p_0 \leq q_0, \dots, p_t \leq q_t)$ végesen prezentált háló-ra (W) teljesül, akkor azt mondjuk, hogy χ teljesíti a Whitman feltételt. Legyen A a $p_0, \dots, p_t, q_0, \dots, q_t$ termék-ben fellépő résztermék halmaza (a változókat és magukat a felsorolt termeket is beleértve), és legyen $L := \{r(x: x \in U): r \in A\}$. Ekkor $L \subseteq \text{FL}(U; p_0 \leq q_0, \dots, p_t \leq q_t)$, s így L (a természetes módon) egy parciális háló. [15]-ben igazoltuk, hogy " $L \models (W)$ " és " $\chi \models (W)$ " ekvivalensek. Mivel (6.6) szerint L algoritmussal előállítható, az is eldönthe-tő, hogy (W) teljesül-e χ -re.

(5.13) Állítás. Ha χ -re teljesül a (W) Whitman felté-tel, akkor χ reguláris.

Bizonyítás. [15]-ben megmutattuk, hogy a mondott χ ese-

tében létezik hálózazonosságoknak egy λ_m ($m < \omega$) sorozata úgy, hogy tetszőleges $2 \leq n$ -re és $\mathcal{V}$ n -felcserélhető varietásra a $\text{Con}(\mathcal{V}) \models \chi$ és a $(\exists m < \omega)(\text{Con}(\mathcal{V}) \models \lambda_m)$ feltételek ekvivalensek. Az is igaz továbbá, hogy χ -ből λ_m algoritmus-sal nyerhető. Tehát χ -re is teljesül (5.12) ^{megfelelője}, így bizonyításunk további része (5.11) bizonyításának (5.12) utáni részével egyezik meg. Q.e.d.

7.§. Gyűrűk reguláris tulajdonságai, II. E §-ban az (5.2) tétel (B) részét igazoljuk. Ehhez néhány, csak a jelen §-ban használatos fogalmat és jelölést vezetünk be, a III. fejezetben fellépők mellé. Egy $S \in \text{SL}$ spektrumot kovégesnek mondunk, ha a $t(S) := \{p \in P: S(p) < \omega\}$ halmaz, melyet egyuttal S tartományának nevezünk el, véges. Ha H egy véges részhalmaza P -nek, akkor $S \in \text{SL}$ esetén S H -ra vonatkozó kovéges kiterjesztésének nevezzük és $S[H]$ -val jelöljük azt a spektrumot, melyet a „ $p \in H$ -ra $S[H](p) = S(p)$ és $p \in P \setminus H$ -ra $S[H](p) = \omega$ ” feltételek határoznak meg (egyértelműen). Rögzítsünk le egy reguláris χ -t, amely valamely 0-karakterisztikájú R^0 gyűrűre teljesül $\text{Sub}(R^0\text{-Mod})$ -ban. Ekkor (3.8) és (5.8) miatt $\text{Sub}(R^0\text{-Mod}) \models \chi$, ahol az azonosan 0 spektrumot S^0 -val jelölve $R_0 := R_{S^0}$. Továbbá, a mondott χ -hez tartozó (5.6)-beli $(\exists n < \omega)(E_n \text{ megoldható})$ feltételt tekintve érvényes az alábbi

(5.14) Segéd-tétel. Legyen $S \in \text{SL}$, $S(0) = 0$ és $n < \omega$. Ha E_n megoldható R_S -ben, akkor P -nek létezik olyan véges H részhalmaza, hogy E_n $R_{S[H]}$ -ban is megoldható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy E_n az $f_i(y_j: j < v) = 0$ ($i < u$) egyenletek rendszere, ahol y_j -k az ismeretlenek, f_i -k gyűrűtermek (az egységelemes gyűrűk $\{+, \cdot, 0, 1\}$ szignatúrájának megfelelően) és $u, v < \omega$. Legyen E_n megoldható R_S -

ben. Az R_S (3.8) előtti definíciójából világos, hogy alkalmas $a_j \in FR(X) = FR(\{x_p: p \in P\})$ ($j < v$) elemekre $f_i(a_j + (J_S): j < v) = 0 + (J_S)$, azaz $f_i(a_j: j < v) \in (J_S)$ ($i < u$). Véges sok $f_i(a_j: j < v)$ -ről lévén szó, létezik egy véges $A \subseteq J_S$ úgy, hogy $f_i(a_j: j < v) \in (A)$ ($i < u$) is teljesül. Ezen A nyilván $\{p^{S(p)}(px_p - 1): p \in H\}$ alakú, ahol H véges részhalmaza P -nek és $p \in H$ -ra $S(p) < \omega$. Ekkor viszont $A = J_S[H]$, és $i < u$ -ra $f_i(a_j: j < v) \in (J_S[H])$ -ből $f_i(a_j + (J_S[H]): j < v) = 0 + (J_S[H])$ adódik. Ezért E_n megoldható $R_S[H]$ -ban. Q.e.d.

Mivel $\text{Sub}(R_0\text{-Mod}) \neq \lambda$, (5.6) szerint valamely n_0 -ra R_0 -ban E_{n_0} megoldható. Minthogy a $(\exists n)(E_n \text{ megoldható})$ feltétel n -ben gyengülő, az általánosság megszorítása nélkül az $(E_n)_{n < \omega}$ sorozat első (véges sok) n_0 tagja elhagyható. Tehát feltehető, hogy $n_0 = 0$, azaz E_0 (s így valamennyi E_n is) megoldható R_0 -ban. (5.14) alkalmazásával lerögzíthetünk egy kovéges S' spektrumot úgy, hogy $R_{S'}$ -ben E_0 (s ennél fogva valamennyi E_n) megoldható legyen.

(5.15) Segéd-tétel. Minden $j < \omega$ -ra létezik egy S_j kovéges spektrum és egy S_j spektrumu A_j gyűrű úgy, hogy egyrészt E_j megoldható A_j -ben, másrészt pedig valahányszor E_j megoldható egy R gyűrűben, mindannyiszor $S_R \leq S_j$.

Bizonyítás. Legyen $U = \{S \in SL: \text{létezik olyan } S \text{ spektrumu gyűrű, melyben } E_j \text{ megoldható}\}$, és $S \in U$ -ra legyen B_S egy olyan S spektrumu gyűrű, melyben E_j megoldható. Legyen $A_j := \prod (B_S: S \in U)$. Ekkor E_j megoldható A_j -ben is. (Az azon kiválasztási függvényekből álló vektor, amelyek minden egyes B_S tényezőn az E_j rögzített megoldásvektorának megfelelő komponenseit választják ki, az E_j A_j -beli megoldása lesz.) Minthogy hasonló gondolatmenet szerint az A_j direkt szorzatban pontosan azok az oszthatósági feltételek

teljesülnek, amelyek minden B_S tényezőben, $S_j := S_{A_j} = \bigvee (S_{B_S} : S \in U) = \bigvee (S : S \in U)$. Ha egy R gyűrűben E_j megoldható, akkor $S_R \in U$ miatt $S_R \leq S_j$. Ezért S' -re is $S' \leq S_j$, tehát S_j kovéges. Q.e.d.

Legyen $I := \{S \in SL : \text{Sub}(R_S\text{-Mod}) \models \chi\}$, és az S_j által generált SL -beli főideált, azaz $\{S \in SL : S \leq S_j\}$ -t jelöljük $(S_j]$ -vel. Érvényes az alábbi

(5.16) Segéd-tétel. $I = \bigcup ((S_j] : j < \omega)$.

Bizonyítás. Ha $S \in I$, akkor (5.6) szerint R_S -ben valamelyik E_j megoldható, s (5.15) folytán így $S = S_{R_S} \in (S_j]$. Fordítva, tegyük fel, hogy $S \in (S_j]$. Mivel (5.6) és (5.15) szerint $\text{Sub}(A_j\text{-Mod}) \models \chi$, $\text{Sub}(R_{S_j}\text{-Mod}) \models \chi$ is teljesül χ regularitása miatt. Minthogy $S \leq S_j$, (3.8)-ból és (5.8)-ból $S \in I$ következik. Q.e.d.

Az (5.6)-beli feltétel gyengülő voltából és (5.15)-ből adódik, hogy $S_0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \dots$ és így $t(S_0) \supseteq t(S_1) \supseteq t(S_2) \supseteq \dots$. Mivel $t(S_0)$ véges, valamely $u < \omega$ -ra $t(S_u) = t(S_{u+1}) = t(S_{u+2}) = \dots$; legyen $H := t(S_u)$. Legyen továbbá $S := \bigvee (S_j : j < \omega)$, ekkor $H \supseteq t(S)$. Tekintsük az $m_\chi := \prod (p^{S(p)+1} : p \in t(S))$, $n_\chi := \prod (p : p \in H \setminus t(S))$ és $k_\chi := \prod (p^{S(p)} : p \in t(S))$ pozitív egész számokat. Állítjuk, hogy tetszőleges R gyűrűre a $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \chi$ és a $(\exists i)(R \models D(m_\chi n_\chi^{i+1}, k_\chi n_\chi^i))$ feltételek ekvivalensek.

Teljesüljön valamely $i < \omega$ -ra $D(m_\chi n_\chi^{i+1}, k_\chi n_\chi^i)$ egy R gyűrűben. Ekkor (3.2) alkalmazásával $p \in t(S)$ -re $S_R(p) \leq S(p)$ és $p \in H \setminus t(S)$ -re $S_R(p) \leq i < S(p) = \omega$. Mivel $S(p)$ a monoton növekvő $S_j(p)$ sorozat határértéke és H véges, van olyan j index, hogy $p \in H$ -ra $S_R(p) \leq S_j(p)$. Ekkor $S_R \leq S_j$ és (5.16) szerint $S_R \in I$. Tehát $\text{Sub}(R\text{-Mod}) \models \chi$ a regularitásból és $\text{Sub}(R_{S_R}\text{-Mod}) \models \chi$ -ből adódik.

Most χ teljesüljön valamely $\text{Sub}(R\text{-Mod})$ -ban. A regula-

ritás miatt $S_R \in I$. (5.16) szerint valamely j -re $S_R \leq S_j \leq S$.
Legyen $i := \max\{S_j(p) : p \in H \setminus t(S)\}$. (3.2) szerint világos,
hogy $R \models D(\underset{\chi}{m}, \underset{\chi}{n}^{i+1}, \underset{\chi}{k}, \underset{\chi}{n}^i)$. Ezzel (5.2)(B) igazolást nyert.

VI. ALKALMAZÁSOK

1.§. A hálózatonosságok közötti, kongruenciavarietásokban tekintett következményrelációra. Nem ismeretes (Jónsson [47]), hogy a $\models^{cv}$ következményreláció kompakt-e, azaz $\sum \models^{cv} \lambda$ (λ hálózatonosság, $\sum$ hálózatonosságok halmaza) esetén mindig létezik-e olyan véges $\Sigma' \subseteq \sum$, melyre $\Sigma' \models^{cv} \lambda$. Day és Freese [21] igazolta, hogy ha λ a modularitás azonossága, akkor a válasz igenlő (sőt egyelemű Σ' is választható). Hasonlót állíthatunk a disztributivitással kapcsolatban is:

(6.1) Tétel ([9]). Ha $\sum \models^{cv}$ dist, akkor $\sum$ alkalmas véges Σ' részalmazára $\Sigma' \models^{cv}$ dist is teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\sum \models^{cv}$ dist ! Mivel minden disztributív háló moduláris, Day és Freese idézett eredménye szerint $\sum_1 \models^{cv}$ modularitás teljesül alkalmas véges $\sum_1 \subseteq \sum$ -ra. Mivel $p \in P \cup \{0\}$ -ra $\text{Con}(\underline{Q}_p\text{-Mod}) \not\models \text{dist}$, létezik $\lambda_p \in \sum$, melyre $\text{Con}(\underline{Q}_p\text{-Mod}) \not\models \lambda_p$. Így (3.7) szerint $\underline{Q}_p \not\models D(m_{\lambda_p}, n_{\lambda_p})$. Ezért a $p=0$ esetben $m_{\lambda_0}=0$ és $n:=n_{\lambda_0} > 0$. Legyen $\Sigma' := \sum_1 \cup \{\lambda_p : p=0 \text{ vagy } p \in P \text{ és } p|n\}$. Tegyük fel indirekt, hogy $\Sigma' \models^{cv}$ dist nem teljesül! Ekkor valamely moduláris, de nem disztributív $\underline{U}$ kongruenciavarietásra $\underline{U} \models \Sigma'$. Freese (2.12) után idézett eredménye vagy (2.12) szerint valamely $q \in P \cup \{0\}$ -ra $\text{Con}(\underline{Q}_q\text{-Mod}) \subseteq \underline{U}$, tehát $\text{Con}(\underline{Q}_q\text{-Mod}) \models \Sigma'$. Mivel ekkor (3.7) szerint $\underline{Q}_q \models D(0, n)$, (3.2)-ből $q|n$ adódik. Azaz $\lambda_q \in \Sigma'$, ami ellentmond λ_q választásának. Q.e.d.

A teljesség kedvéért idézzük az alábbi eredményt (a fogalmak részletes ismertetése viszont meghaladná az érteke-

zés célkitűzéseit).

(6.2) (Freese [16]). Legyen $\lambda : p \leq q$ egy véges hálózatonosság, ahol p és q X feletti hálótermek. Az alábbi három feltétel ekvivalens:

- (i) $\lambda \models^{cv}$ modularitás;
- (ii) A (2.6)-beli $U(4, p \leq q, 4)$ erős Malcev-feltétel nem teljesül a $\mathcal{P}$ Polin-varietásban;
- (iii) A $V(G_4(p))$ halmaz által szabadon generált $\mathcal{P}$ -algebra $\{(a, b) : (a, x, b) \in E(G_4(p))\}$ által generált $\text{con}(x)$ kongruenciákra (bal végpont, jobb végpont) $\notin q(\text{con}(x) : x \in X)$.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a véges típusu $\mathcal{P}$ varietást (Polin [56]) egyetlen négyelemű algebrája (mondjuk A) generálja, s így (ii) és (iii) algoritmussal eldönthető. (Valóban, $\mathcal{P} \models U(4, p \leq q, 4) \Leftrightarrow A \models U(4, p \leq q, 4)$, és a (iii)-beli szabad algebra is véges). A $\mathcal{P}$ algebráinak kongruenciái áttekinthetően leírhatók (Day - Freese [21]), ezért (ii) és (iii) közül az utóbbi Malcev-szerű feltétel sokkal használhatóbb algoritmust ad. A (iii) által szolgáltatott algoritmus valójában alig különbözik a Day és Freese által [21]-ben ténylegesen használt eljárástól.

Bizonyítás (Freese [16]). Tetszőleges nem moduláris $\mathcal{U}$ kongruenciavarietásra $\text{Con}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{U}$ (Day - Freese [21]).

Eme mély eredmény következtében (i) avval ekvivalens, hogy

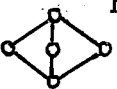
$$(iv) \text{Con}(\mathcal{P}) \not\models \lambda.$$

Tetszőleges r X feletti hálótermre indukcióval definiáljuk az r^4 $\wedge$ -o-termet: $r^4 := r$, ha $r \in X$, $(r_1 \wedge r_2)^4 := r_1^4 \wedge r_2^4$, és $(r_1 \vee r_2)^4 := r_1^4 \circ r_2^4 \circ r_1^4 \circ r_2^4$. Mivel $\mathcal{P}$ 4-felcserélhető (Day - Freese [21]), $\text{Con}(\mathcal{P}) \models \lambda$ azzal ekvivalens, továbbá $\text{Con}(\mathcal{P})$ nem moduláris

vivalens, hogy $p^4 \leq q^4$ teljesül $\mathbb{P}$ algebráinak kongruenciáira. Minthogy $U(m, p^4 \leq q^4, n)$ az (m, n) -től függetlenül $U(4, p \leq q, 4)$ -gyel azonos, (iv) $\Leftrightarrow$ (ii) (2.6)-ból adódik. A Wille (2.6) tételnek az értekezésben nem idézett, Malcev-szerű feltételt tartalmazó alakját (Wille [60], Pixley [55]) használva (iv) $\Leftrightarrow$ (iii) is azonnal adódik. Q.e.d.

(6.3) Tétel. Legyen p és q egy-egy X feletti term, és tekintsük a $\lambda : p \leq q$ hálózazonosságot. $\lambda \models^{cv} \text{dist}$ akkor és csak akkor áll fent, ha az alábbi (ekvivalens) feltételek egyike teljesül:

- (a) $\lambda \models^{cv}$ modularitás, és minden $p \in P \cup \{0\}$ esetén az $R = Q_p$ gyűrűre vonatkozóan (és a (4.3) jelöléseivel)
 $a_p \notin q(x\varphi_p : x \in X)$;
- (b) (Czédli [16]) A (3.7) jelöléseivel $m_\lambda = 0$,
 $n_\lambda = 1$ és $\lambda \models^{cv}$ modularitás teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\lambda \models^{cv} \text{dist}$. Mivel minden legalább kételemű R gyűrű esetén $\text{Con}(R\text{-Mod}) \models \text{dist}$ nem teljesül (hiszen $\text{Sub}({}_R R^2)$ -ben $\{\{0\} \times R, R \times \{0\}, \{(r, r) : r \in R\}\}$ egy -mal izomorf részhálót generál), (a) adódik (4.3)-ból. Ha $m_\lambda \neq 0$, akkor $Q = Q_0 \models D(m_\lambda, n_\lambda)$; ha pedig $m_\lambda = 0$ és $n_\lambda > 1$, akkor az n_λ bármely p prímosztójára $Q_p = Z_p \models D(0, n_\lambda)$. Ha tehát $(m_\lambda, n_\lambda) \neq (0, 1)$, akkor valamely $p \in P \cup \{0\}$ -ra $Q_p \models D(m_\lambda, n_\lambda)$, s így (3.7) szerint $\text{Con}(Q_p\text{-Mod}) \models \lambda$. Viszont $\text{Con}(Q_p\text{-Mod})$ nem disztributív. Tehát $(m_\lambda, n_\lambda) = (0, 1)$, azaz (b) adódik.

Fordítva, tegyük fel, hogy (a) vagy (b) teljesül! Ekkor (4.3) vagy (3.7) és (3.2) folytán $\text{Con}(Q_p\text{-Mod}) \models \lambda$ egyetlen $p \in P \cup \{0\}$ -ra sem teljesül. Mármost ha $\lambda \models^{cv} \text{dist}$ nem állna, akkor valamely moduláris, nem disztributív $\mathbb{U}$ kongruenciavarietásra $\mathbb{U} \models \lambda$ teljesülne. Ekkor viszont

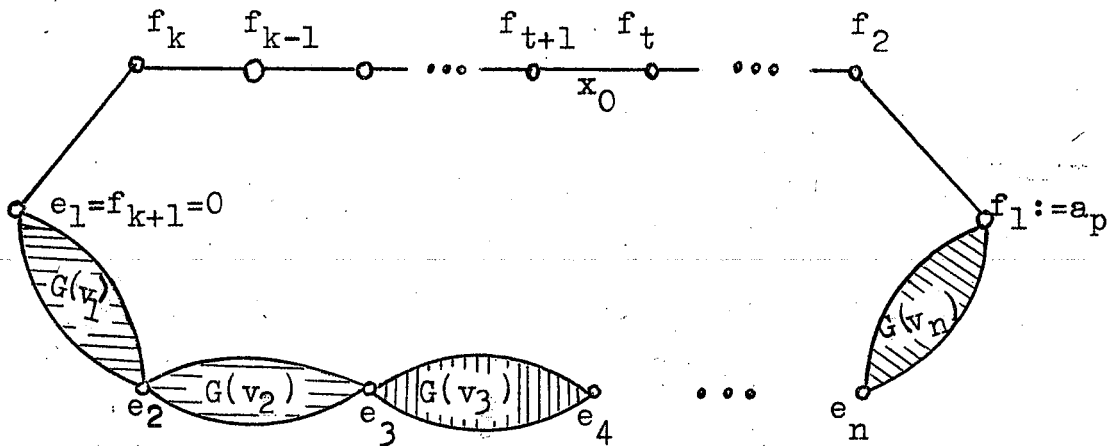
Freese [24,25] (2.12) után idézett eredménye (vagy (2.12)) szerint valamely $p \in \text{Pu}\{0\}$ -ra $\mathcal{U} \supseteq \text{Con}(\mathcal{Q}_p\text{-Mod})$, és így a $\text{Con}(\mathcal{Q}_p\text{-Mod}) \models \lambda$ ellentmondás adódna. Q.e.d.

A (6.3) által kínált algoritmus nemcsak egyes λ -k esetén használható, hanem általános tételek igazolására is alkalmas. Példaként részben új bizonyítást adunk Nation alábbi eredményére, melynek $\text{dist}_n \models^{\text{cv}} \text{dist}$ is speciális esete.

(6.4) (Nation [52]). Legyen λ egy $p_0 \wedge w \leq \bigvee (p_0 \wedge p_i : 1 \leq i \leq n)$ alakú, nem triviális (tehát nem minden hálóban teljesülő) hálózazonosság, ahol p_i ($0 \leq i \leq n$) $\wedge$ -mentes term (tehát változó vagy változók egyesítettje), p_0 -nak és a w termnek pedig nincs közös változója. Ekkor $\lambda \models^{\text{cv}} \text{dist}$.

Bizonyítás. Fel fogjuk használni, hogy $\lambda \models^{\text{cv}}$ modularitás ismeretes (Nation [52], de Jónsson [47]-beli bizonyítása is emlithető). (Ennyiben a bizonyítás nem új.) Legyen a p_i -ben, w -ben és λ -ban fellépő változók halmaza rendre S_i , T és H . Legyen $Y_i := T \setminus S_i$, és tekintsük a $v_i := \bigwedge (x : x \in Y_i)$, $v := \bigvee (v_i : 1 \leq i \leq n)$ hálótermeket! Ekkor $i \leq n$ -re $Y_i \neq \emptyset$ (mert ellenkező esetben $i = 0$ -ra $T = T \cap S_0 = \emptyset$, $i \geq 1$ -re pedig $p_0 \wedge w \leq p_0 \wedge \bigvee (x : x \in T) \leq p_0 \wedge \bigvee (x : x \in S_i) = p_0 \wedge p_i$, azaz λ minden hálóban teljesülne). Egyszerű, u hossza szerint teljes indukcióval adódik, hogy tetszőleges u T feletti véges hálótermre a $v_i \leq u$ és $u \leq \bigvee (x : x \in T \cap S_i)$ azonosságok egyike (s az utóbbi esetén $u \leq p_i$ méginkább) triviális. Mivel (u szerepét w -nek adva) $w \leq p_i$ esetén λ triviálissá válna, $v_i \leq w$, s így $v \leq w$ teljesül minden hálóban. Ezért λ -nak következménye a

$\mu: p_0 \wedge v \leq \bigvee (p_0 \wedge p_i: 1 \leq i \leq n)$ hálózasonosság, elég tehát a $\mu \stackrel{cv}{=} \text{dist}$ összefüggést igazolnunk. Vegyük észre, hogy $S_0 \setminus \bigcup (S_i: 1 \leq i \leq n) \neq \emptyset$ (hiszen ellenkező esetben λ triviális lenne), legyen pl. $x_0 \in S_0$ és $1 \leq i \leq n$ -re $x_0 \notin S_i$. (Eddig a pontig Jónssqn [47]-beli gondolatmenetét követtük.) A μ bal és jobb oldalát p -vel, illetve q -val jelölve $G(p)$ az alábbi (alaku) gráf:



A (4.3) -at fogjuk használni, de tetszőleges x, r betűkre az $X := x\varphi_p, R := r(X: x \in H)$ jelölésekkel is élünk. A $G(p)$ szögpontjait az ábra szerint az $M := M(p)$ modulus elemeinek tekintjük, $\{f_1, \dots, f_k, e_2, \dots, e_n\}$ az M szabad generátorrendszere ($k \geq 1, n \geq 1$), f_t és f_{t+1} pedig az egyetlen x_0 -lal színezett él két végpontja ($1 \leq t \leq k$). (6.3)(a) szerint elegendő azt megmutatnunk, hogy ha a kérdéses gyűrű legalább kételemű, akkor $f_1 \notin q(X: x \in H)$. Mivel $S_0 \cap T = \emptyset = S_0 \cap Y_1$, $P_0 = [f_1 - f_2, f_2 - f_3, \dots, f_k - 0] = [f_1, f_2, \dots, f_k]$. Legyen most $1 \leq i \leq n$. Ekkor $G(v_i)$ -nek nincs belső szögpontja, és nincs S_i -beli változóval színezett éle sem. Ezért $y \in S_i$ -re $y \subseteq [f_1 - f_2, f_2 - f_3, \dots, f_{t-1} - f_t, f_{t+1} - f_{t+2}, \dots, f_k - 0] + [e_2, e_3 - e_2, \dots, e_i - e_{i-1}, e_{i+2} - e_{i+1}, \dots, e_n - e_{n-1}, f_1 - e_n] = [f_1 - f_2, f_2 - f_3, \dots, f_{t-1} - f_t, f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_k] + [e_2, e_3, \dots, e_i, e_{i+2} - e_{i+1}, \dots, e_n - e_{n-1}, f_1 - e_n] =: A_i \in \text{Sub}(M)$. Mivel $P_i = \bigvee (Y: y \in S_i), P_i \leq A_i$. Egyszerű számolás mutatja,

hogy $P_0 \wedge A_i = [f_1 - f_2, f_2 - f_3, \dots, f_{t-1} - f_t, f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_k]$;

így $q(X: x \in H) = \bigvee (P_0 \wedge P_i: 1 \leq i \leq n) \leq$

$[f_1 - f_2, f_2 - f_3, \dots, f_{t-1} - f_t, f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_k] \not\models f_1 = a_p.$

Q.e.d.

2.§. Felcserélhetőség mellett sincs χ -re erős Malcev-feltétel. Az (5.2) tételt alkalmazva most azt fogjuk megmutatni, hogy Jónsson (1.3)-ban említett problémájára a válasz nemleges. Jónsson [47]-ben implicite az is benne van, hogy a Taylor-kritérium [58] önmagában kevés az alábbi eredmény eléréséhez.

(6.5) Következmény. Nem jellemezhető erős Malcev-feltétellel az, hogy a $\chi(0, n, 1)$ feltételes hálózatonosság teljesül-e egy felcserélhető varietás minden algebrájának kongruenciahálójában (itt $n \geq 2$ rögzített).

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz! Legyen U egy erős Malcev-feltétel, amely $\chi(0, n, 1)$ -et a mondott értelemben jellemzi. Amint azt az (5.6) -ot megelőző gondolatmenet során láttuk, létezik egy E véges, formális egyenletrendszer, melyre az " $R \text{Mod} \models U$ " és az " E megoldható R -ben" feltételek tetszőleges R gyűrű esetén ekvivalensek. Mármint (5.2) szerint $k < \omega$ -ra $\chi(0, n, 1)$ teljesül $\text{Con}(Z_n \text{Mod})$ -ban, ezért E megoldható Z_n -ban. Ennél fogva E megoldható a $\prod(Z_n: k < \omega)$ direkt szorzatként előálló R gyűrűben is. Ekkor E választása folytán, (5.2)(A) -t is használva, valamely $i < \omega$ -ra $R \models D(0, n^i)$. Ezért R valamennyi direkt tényezőjében, így $Z_{n^{i+1}}$ -ben is teljesül $D(0, n^i)$, ami ellentmondás.

Q.e.d.

3.§. Egy megoldás a hálók szóproblémájára. A (végesen prezentált) hálók szóproblémája (az általánosság megszorítása

nélkül) a következő: adjunk olyan algoritmust, amely tetszőleges X véges változóhalmaz, $t < \omega$ és p, q, p_i, q_i ($i \leq t$) véges X feletti hálótermék esetén eldönti, hogy az $FL(X; p_0 \leq q_0, \dots, p_t \leq q_t)$ végesen prezentált háló $p(x: x \in X)$ és $q(x: x \in X)$ elemeire $p(x: x \in X) \leq q(x: x \in X)$ teljesül-e. Egy ekvivalens megfogalmazás: adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy egy tetszőlegesen adott $\gamma: (p_0 \leq q_0 \& \dots \& p_t \leq q_t) \Rightarrow p \leq q$ feltételes hálózazonosság teljesül-e minden hálóban.

A hálók szóproblémáját két, általánosabb problémákra szabott algoritmus is megoldja (McKinsey [51], Evans [23]). Említést érdemel Dean [22]-beli algoritmus is, amely abban a speciális esetben oldja meg a szóproblémát, amikor a végesen prezentált háló egy A parciális háló segítségével $FL(A)$ -ként (azaz az A által szabadon generált hálóként) van megadva. (Ez azért csak speciális eset, mert ugyan minden $FL(X; p_0 \leq q_0, \dots, p_t \leq q_t)$ $FL(A)$ alakban is írható, de a kérdéses A megkonstruálása feltételezi az általános szóprobléma megoldottságát.)

Célunk egy olyan algoritmus ismertetése, amely a hálók szóproblémáját az ismert (McKinsey [51] és Evans [23]) algoritmusoknál gyorsabban és egyszerűbben oldja meg. Bár algoritmusunk és Evans algoritmus között észrevehető rokonság van, a hozzájuk vezető utak eltérőek, s egyiknek a másiktól való származtatása (ha ez egyáltalán lehetséges) sem tűnik könnyűnek.

Az algoritmus ismertetése előtt néhány megjegyzést teszünk a hozzá vezető utról, mert az alábbi részletek a bizonyításból (éppen annak egyszerűbbé tétele miatt) nem tűnnének ki. Az előbbi γ mellett a (6.2) bizonyítása során bevezetett jelölésekkel élve tekintsük a $\%$

*) (de - McKinsey és Evans algoritmusával szemben - csak azt)

$\chi^{(4)}$: $(p_0 \leq q_0^4 \& \dots \& p_t \leq q_t^4) \Rightarrow p^4 \leq q$ feltételes hálózazonosságot. Állítjuk, hogy az (a) „ χ teljesül minden hálóban” és a (b) „tetszőleges H halmaz ekvivalenciáit a $\chi^{(4)}$ változói helyére helyettesítve $\chi^{(4)}$ teljesül” feltételek ekvivalensek. Az (a)-ból könnyen következik (b), hiszen $q_i^4 \leq q_i$ és $p^4 \leq p$. Fordítva, tegyük fel (b)-t és tekintsünk egy L hálót! Jónsson [44] beágyazási tétele (melyet Grätzer [29, 194.o.] is idéz) szerint feltehető, hogy L valamely H halmaz $E(H)$ ekvivalenciahálójának „3-típusu” (terminológiánkhoz jobban illene a „4-típusu” elnevezés) részhálója. Azaz tetszőleges r X feletti hálóterm és $\hat{x} \in L \subseteq E(H)$ ($x \in X$) ekvivalenciák esetén $r(\hat{x}: x \in X) = r^4(\hat{x}: x \in X)$. Ezért ezen ekvivalenciákra χ is teljesül; (a) és (b) ekvivalenciáját ezzel beláttuk.

[13]-ban Malcev-feltétellel jellemeztük m -felcserélhető varietások azon tulajdonságát, hogy algebraik kongruenciákra χ teljesül. Legyen az egyszerűség kedvéért $m:=4$; a 4-felcserélhetőséget [13]-ban lényegében csak annyiban használtuk ki, hogy χ helyett a

χ^4 : $(p_0^4 \leq q_0^4 \& \dots \& p_t^4 \leq q_t^4) \Rightarrow p^4 \leq q^4$ v -mentes feltételes azonosságot tekintettük. Azonban $p_0^4, \dots, p_t^4$ és q^4

v -mentességére nem volt komoly szükség. Így csekély módosítással a [13]-beli algoritmus $\chi^{(4)}$ jellemzéséhez is egy $U(\chi^{(4)})$ Malcev-feltételt és egy ennek megfelelő Malcev-szerű feltételt szolgáltat, immár m -felcserélhetőség nélkül.

Legyen $\underline{H}$ a halmazok (mint triviális algebraik) varietása.

Az eddigiek szerint χ pontosan akkor teljesül minden hálóban, hogy ha az $U(\chi^{(4)})$ mellett fellépő Malcev-szerű feltétel (melyet jelöljünk $V(\chi^{(4)})$ -gyel) teljesül H -ban.

$\underline{H} \stackrel{?}{\models} V(\chi^{(4)})$ pedig eldönthető, s ez szolgál a szóproblémára vonatkozó algoritmusunk alapjául. Akár csak az előző feje-

zetben, itt sem lenne célszerű a bonyolult [13]-beli algoritmust ismertetnünk; ezért közvetlenül a szóproblémából indulunk ki.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy χ szabályos, azaz

$q \in X$ (változó),

$p, p_0, \dots, p_t$ $\vee$ -mentes, azaz változók (metszetei),

$q_0, \dots, q_t$ $\wedge$ -mentes, azaz változók (egyesítettjei).

Valóban, ha egy nem szabályos χ esetén a résztermek helyett új változókat vezetünk be, és ezekre alkalmas premisszafeltételeket róvunk ki, akkor egy, a χ -vel (modulo hálóelmélet) ekvivalens szabályos feltételes hálózazonosságot nyerünk (s mindezt a nem részletezett, de nyilvánvaló algoritmussal). Például, ha χ az alábbi

$$(SD_{\wedge}) (x \wedge y \leq x \wedge z \& x \wedge z \leq x \wedge y) \Rightarrow x \wedge (y \vee z) \leq x \wedge y,$$

akkor az $a := x \wedge y$, $b := x \wedge z$, $c := y \vee z$ változókat bevezetve az alábbi szabályos, $(SD_{\wedge})$ -sal ekvivalens

$$(SD'_{\wedge}): (a \leq b \& b \leq a \& a \leq x \& a \leq y \& x \wedge y \leq a \& b \leq x \& b \leq z \& x \wedge z \leq b \& c \leq y \vee z \& y \leq c \& z \leq c) \Rightarrow x \wedge c \leq a$$

feltételes hálózazonossághoz jutunk. (Ez nem a legrövidebb lehetőség, viszont az általános χ esetét is tükrözi.)

A továbbiakhoz lerögzítünk egy

$\chi: (p_0 \leq q_0 \& \dots \& p_t \leq q_t) \Rightarrow p \leq q$ szabályos feltételes hálózazonosságot, és legyen X, M, M_i, U_i rendre a χ -ben, p -ben, p_i -ben és q_i -ben fellépő változók halmaza. Jelölje $P(X)$ (illetve $P^+(X)$) az X (nem üres) részhalmazainak halmazát. Minden $j < \omega$ -ra egy $T_j: P(X) \rightarrow P(X)$ leképezést definiálunk az alábbi rekurzióval; $x \in X$ -re $T_j(\{x\})$ helyett $T_j(x)$ -et fogunk írni. Legyen T_0 az identikus leképezés (azaz $A \subseteq X$ -re $T_0(A) := A$), továbbá $A \subseteq X$ -re legyen

$T_{j+1}(A) := T_j(A) \cup \bigcup (\bigcap (T_j(x) : x \in U_i) : i \leq t \text{ és } M_i \subseteq T_j(A))$.
Mivel $j < \omega$ -ra és $A \subseteq X$ -re $T_j(A) \subseteq T_{j+1}(A)$, a végeesség folytán valamely n -re $T_n = T_{n+1}$. Legyen $T := T_n$, ekkor $T = T_n = T_{n+1} = T_{n+2} = \dots$, és T nyilván meghatározható algoritmussal. Továbbá (vagy a $T_{2n} = T_n = T$ képlet, vagy az alábbi tétel szerint) T lezárási operátor X fölött. Jelölje P_χ a $p_0 \leq q_0 \& \dots \& p_t \leq q_t$ formulát.

(6.6) Tétel ([14]). Tetszőleges $x \in X$ -re és $A \in P^+(X)$ -re $x \in T(A)$ pontosan akkor teljesül, ha $P_\chi \Rightarrow \bigwedge (y : y \in A) \leq x$ minden hálóban teljesül. Ennélfogva χ akkor és csak akkor teljesül minden hálóban, ha $q \in T(M)$.

Példaként alkalmazzuk a tételt (SD'_Λ) -re! Nem kell T -t az egész értelmezési tartományán meghatároznunk (csak a metaközben elkerülhetetlen részalmazokra) és n értékére sem lesz szükségünk. Szükség lesz $T(x, c) := T(\{x, c\})$ -re, $c \leq y \vee z$ miatt $T(y)$ -ra és $T(z)$ -re, s $y \leq c, z \leq c$ folytán $T(c)$ -re. Egy-két lépés után látjuk, hogy $j < \omega$ -ra $T_j(y) \subseteq \{y, c\}$, $T_j(z) \subseteq \{z, c\}$, $T_j(c) \subseteq \{c\}$, amit indukcióval igen könnyen igazolhatunk. Innen viszont $T_j(x, c) \subseteq \{x, c\}$ is rögtön (lényegében indukcióval) adódik, tehát $a \notin T(x, c)$. Azaz (SD'_Λ) nem teljesül minden hálóban.

A paragrafus hátralevő részében (6.6) bizonyításával foglalkozunk.

Elegendőség. Nyilván elég azt megmutatni, hogy tetszőleges $A \in P^+(X)$, $j \geq 0$, $x \in T_j(A)$ esetén $P_\chi \Rightarrow \bigwedge A \leq x$ (ahol $\bigwedge A := \bigwedge (y : y \in A)$) minden hálóban teljesül. Ezt j szerinti teljes indukcióval tesszük; az állítás $j = 0$ esetén világos, tegyük fel, hogy valamely $j \geq 0$ -ra már beláttuk. Legyen $x \in T_{j+1}(A)$, ekkor az indukciós hipotézis szerint csak

az $x \in T_{j+1}(A) \setminus T_j(A)$ esetet kell vizsgálnunk. Ekkor valamely i -re $M_i \subseteq T_j(A)$ és $x \in \bigcap (T_j(y) : y \in U_i)$. Így az indukciós hipotézis szerint P_χ esetén $y \in U_i$ -re $x \in T_j(y)$ -ből $y \leq x$ következik. Ezért a P_χ premissza esetén tetszőleges hálóban az indukciós hipotézist újból felhasználva $\bigwedge A = \bigwedge (x' : x' \in T_j(A)) = \bigwedge T_j(A) \leq \bigwedge M_i = p_i \leq q_i = \bigvee (y : y \in U_i) \leq \bigvee (x : y \in U_i) = x$, tehát $P_\chi \Rightarrow \bigwedge A \leq x$ minden hálóban teljesül.

A szükségesség igazolása több előkészületet igényel. Mindenekelőtt $A \in P^+(X)$ -re és $j \leq \omega$ -ra egy $G_j(A)$ gráfot fogunk definiálni. A könnyebb érthetőség kedvéért a definíció egyes lépéseit az alábbi példán illusztráljuk:

(6.7) Példa. $t = 4$, $A = \{x\}$, $P_\chi : x \leq y \& x \wedge y \leq z \vee u \& z \leq v \& u \leq v \& x \wedge y \wedge v \leq u$ (tehát $p_0 = x$, $p_4 = x \wedge y \wedge v$, stb.).

A rekurzív definíció előtt célszerű $G_j(A)$ tulajdonságait és a vele kapcsolatos jelöléseket előre tisztázni. $G_j(A)$ -nak nincsenek hurokélei. Van két (bal és jobb végpont néven) kitüntetett szögpontra. Korábbi gráfjainkkal ellentétben $G_j(A)$ éleit $P^+(X)$ elemeivel színezzük, és párhuzamos éleket nem engedünk meg. Ha $x \in X$, akkor az $\{x\}$ szín helyett x -et is írhatunk, és fordítva. (Ily módon az X elemeivel színezett korábbi gráfokat is felhasználhatjuk a definíció során). Az a és b szögpontokat összekötő, B -vel színezett él jelölése: (a, B, b) , illetve $(a, ., b)$ (ha B érdektelen). Az $(a, ., b)$ és $(b, ., a)$ éleket azonosaknak tekintjük. Legyen G a konstrukció során majdan előforduló gráfok valamelyike, és $E(G) := \{(a, B, b) : (a, B, b) \text{ éle } G\text{-nek}\}$. A $V(G)$ szögponthalmaz rögzített, de konkrétan soha nem definiált $<$ jólrendezése mellett legyen $E'(G) := \{(a, B, b) : (a, B, b) \in E(G) \text{ és } a < b\}$. (A $<$ rendezésről

csupán annyit teszünk fel, hogy bal végpont $\leftarrow$ jobb végpont.) A sajátos szereppel bíró (bal végpont,,jobb végpont) neve: G kezdőéle. Ha $B \in P^+(X)$, akkor az $\{(a,b): (a,C,b) \in E(G) \text{ és } B \subseteq C\}$ halmazt tartalmazó legszűkebb $V(G)$ feletti ekvivalenciarelációt $e(B,G)$ -vel fogjuk jelölni. (Természetesen $e(\{x\},G)$ helyett az $e(x,G)$ jelölést is használni fogjuk.) Ha H és G gráfokra $V(G) \subseteq V(H)$, $\{(a,b): (a,.,b) \in E(G)\} \subseteq \{(a,b): (a,.,b) \in E(H)\}$ és tetszőleges $(a,B,b) \in E(G)$ esee az $(a,.,b)$ H -beli színét C -vel jelölve $B \subseteq C$ teljesül, akkor G -t a H gyenge részgráfjának nevezzük. Ha G gyenge részgráfja H -nak és $\{(a,b): (a,.,b) \in E(G)\} = \{(a,b): (a,.,b) \in E(H) \text{ és } a,b \in V(G)\}$, akkor G -t a H részgráfjának mondjuk. Ha G részgráfja H -nak és tetszőleges G -beli él színe G -ben és H -ban azonos, akkor G -t H erős részgráfjának nevezzük. Ha G részgráfja a (később definiálandó) rögzített $G_\omega(A)$ gráfnak, akkor G^* -gal fogjuk $G_\omega(A)$ azon erős részgráfját jelölni, melyre $V(G) = V(G^*)$. Izomorfizmuson szintartó izomorfizmus értünk. A konstrukció során használandó $G_4(q_i) = G_k(q_i^4)$ ($k \geq 2$) gráfokat a II/2. §-ban és (6.2) bizonyítása során definiáltuk. (Ez ugy értendő, hogy feltesszük: q_i -t tetszés szerint zárójellezve csak a kétváltozós $\vee$ műveletjelek felhasználásával írjuk fel. Ez ugyan nem egyértelmű, de egy ilyen zárójellezést rögzítünk, és az így adódó gráfot tekintjük $G_4(q_i)$ -nek.)

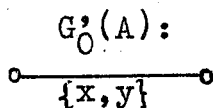
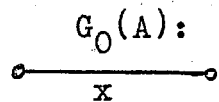
Legyen $G_0(A)$ az a gráf, amelyre $V(G_0(A)) = \{\text{bal végpont, jobb végpont}\}$ és $E'(G_0(A)) = \{(\text{bal végpont}, A, \text{jobb végpont})\}$.

Tegyük fel, hogy $j < \omega$ -ra $G_j(A)$ -t már definiáltuk, ekkor $G_{j+1}(A)$ az alábbi három lépésben adódik (ld. (6.8) ábrát is, melyen a (6.7) példát szemléltetjük):

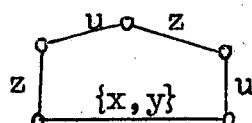
(a) Minden $(a, B, b) \in E'(G_j(A))$ él B színét a $B \cup \bigcup (U_i: q_i \text{ változó} - \text{azaz } |U_i| = 1 - \text{ és } M_i \subseteq B)$ színre módosítjuk. Így kapjuk $G_j'(A)$ -t.

(b) (Ezt a Pudlák és Tuma [57]-re emlékeztető lépést élesztésnek is nevezhetjük.) Tekintsük mindazon $(a, B, b) \in E'(G_j(A))$ éleket és $i \leq t$ indexeket, melyekre $M_i \subseteq B$, $|U_i| \geq 2$ és $(a, b) \notin q_i(e(x, G_j'(A)) : x \in X)$. Minden egyes ilyen élhez tekintsük a $G_4(q_i)$ gráf egy $G_j'(A)$ -tól (és a többi $((a, B, b), i)$ párok esetén tekintett példányoktól) diszjunkt példányát; $G_4(q_i)$ ezen példányának bal végpontját azonosítsuk a -val, jobb végpontját pedig b -vel. Ezen „élesztést” minden tekintett élre egyidejűleg végrehajtva kapjuk a $G_j''(A)$ gráfot.

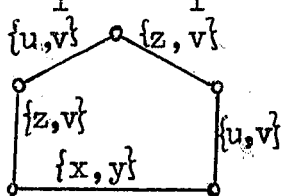
(c) Minden $(a, B, b) \in E'(G_j''(A))$ él B színét az $\{x: x \in X \text{ és } (a, b) \in e(x, G_j''(A))\}$ színre változtatva kapjuk $G_{j+1}(A)$ -t, melynek végpontjai és kezdőéle $G_j(A)$ végpontjai-val és kezdőélével azonosak (eltekintve a kezdőél esetleges színváltásától).



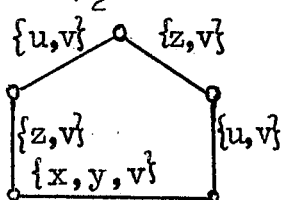
$$G_0''(A) = G_1(A):$$



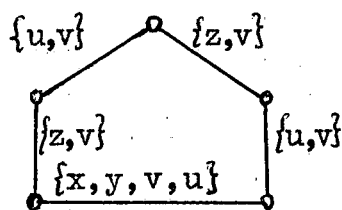
$$G_1'(A) = G_1''(A):$$



$$G_2(A):$$



$$G_2'(A) = G_3(A) = \dots = G_\omega(A):$$



(6.8) Ábra

Mivel $j < \omega$ -ra $G_j(A)$ részgráfja $G_{j+1}(A)$ -nak, tekinthetjük a $G_j(A)$ ($j < \omega$) gráfok (irányított) unióját, melyet $G_\omega(A)$ -nak nevezünk.

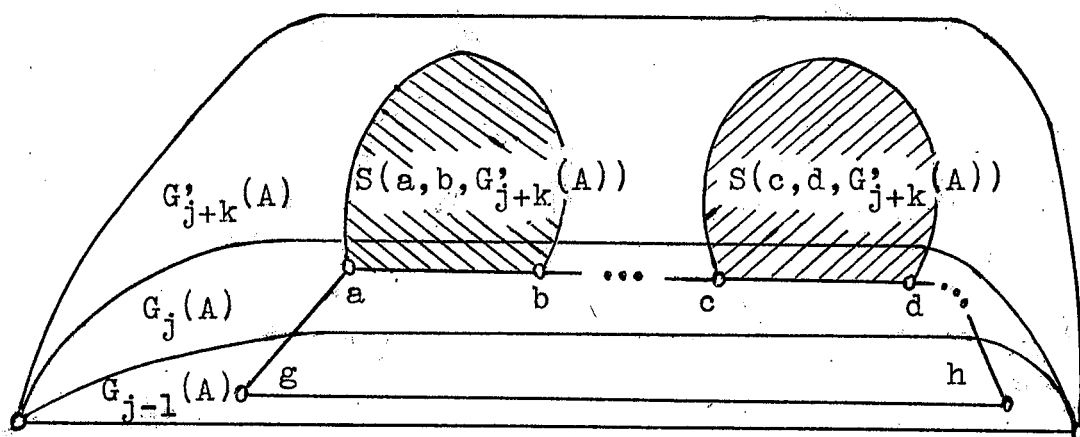
Legyen G a tekintett gráfok egyike, $(a, \dots, b) \in E'(G)$; definiálni fogjuk G -nek az $(a, \dots, b)$ él által kifeszített és

$S(a,b,G)$ -vel jelölt erős részgráfját. Álljon $V(S(a,b,G))$ a G gráf mindazon c szögpontjaiból, melyekre bárhogy is tekintünk egy, a c -t és a G valamelyik végpontját összekötő G -beli utat, ezen ut a -n vagy b -n áthalad. (Állapodjunk meg abban, hogy egy ut a kezdő és végpontján is áthalad.) Az $S(a,b,G)$ bal, illetve jobb végpontjának az a , illetve b szögpontokat tekintjük. Világos, hogy pl. $S(\text{bal végpont}, \text{jobb végpont}, G) = G$.

További részgráfokat is definiálunk. Legyen $(a, \dots, b) \in E(G_{j-1}(A))$ ($j \geq 1$), és tegyük fel, hogy a konstrukció j -ik lépésében (azaz abban a lépésben, mellyel $G_j(A)$ -t származtattuk $G_{j-1}(A)$ -ből), a (b) fázisban sor került ezen $(a, \dots, b)$ él $G_4(q_1)$ -vel történő élesztésére. $G_4(q_1)$ ama példánya, melynek végpontjait a -val és b -vel azonosítottuk, egy $G_4(q_1)$ -vel izomorf gyenge részgráfot képez $G_j(A)$ -ban. Eme gyenge részgráfot $Q(a,b,q_1,G_j(A))$ -val jelöljük. Ha $Q(a,b,q_1,G_j(A))$ -hoz még hozzávesszük a $G_j(A)$ -beli $(a, \dots, b)$ élet, akkor (és ez definíció) a $Q(a, \dots, b, q_1, G_j(A))$ -hoz jutunk, melyről látható, hogy $G_j(A)$ -nak erős részgráfja.

(6.9) Segéd-tétel. Tegyük fel, hogy $0 < j < \omega$ -ra $(a, \dots, b) \in E'(G_j(A)) \setminus E(G_{j-1}(A))$, és legyen B az $(a, \dots, b)$ él $G_j(A)$ -beli színe. Ekkor $k \leq \omega$ -ra az $S(a,b,G_{j+k}(A))$ és a $G_k(B)$ gráfok izomorfak.

Bizonyítás. Nyilván elég a $k < \omega$ és $j \geq 1$ esettel foglalkoznunk. Az állítás $k = 0$ -ra triviális. Indukciós hipotézisként tegyük fel, hogy valamely $k < \omega$ -ra már szintén igazoltuk! Ekkor $S(a,b,G_{j+k}'(A)) \cong G_k'(B)$ is teljesül. Legyen $\varphi: S(a,b,G_{j+k}'(A)) \rightarrow G_k'(B)$ egy izomorfizmus. Az $S(a,b,G_{j+k}''(A))$ és $G_k''(B)$ gráfok izomorfájához elegendő



(6.10) Ábra

megmutatnunk, hogy az $S(a, b, G'_{j+k}(A))$ tetszőleges $(u, \dots, v)$ élet tekintve $i \leq t$ -re $(u, v) \in q_i(e(x, G'_{j+k}(A)) : x \in X)$ azzal ekvivalens, hogy $(u\varphi, v\varphi) \in q_i(e(x, G'_k(B)) : x \in X)$.

Ha $(u\varphi, v\varphi)$ -re a mondott feltétel teljesül, akkor nyilván (u, v) -re is. Tegyük fel indirekt, hogy

$(u, v) \in q_i(e(x, G'_{j+k}(A)) : x \in X)$, de

$(u\varphi, v\varphi) \notin q_i(e(x, G'_k(B)) : x \in X)$! Ekkor létezik egy legrövidebb, u -t és v -t $G'_{j+k}(A)$ -ban összekötő, α -val jelölt

q_i -ut, azaz egy olyan ut, melyen tetszőleges él színe U_i -től nem diszjunkt, de ezen q_i -ut nem haladhat mindvégig

$S(a, b, G'_{j+k}(A))$ -ban. A feltételek szerint van olyan

$(g, \dots, h) \in E'(G_{j-1}(A))$ és $m \leq t$, hogy $|U_m| \geq 2$ és

$(a, B, b) \in E(Q(g, h, q_m, G_j(A)))$. Vegyük észre, hogy $G_4(q_m)$ -ben minden $x \in U_m$ -re legalább két nem szomszédos x színű él van. (Ez nem lenne igaz $G_3(q_m)$ -re; ez is indokolja a 4 indexnek való választását.) Ennélfogva létezik

$(c, B, d) \in E(Q(g, h, q_m, G_j(A)))$, melyre $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ (ld.

(6.10) ábrát). (Mellesleg látható, hogy $|B| = 1$ és $B \subseteq U_m$.)

Az indukciós hipotézis (és a ' felső indexig már megtett lépés) szerint $S'_a := S(a, b, G'_{j+k}(A)) \cong S'_c := S(c, d, G'_{j+k}(A))$,

igy $(a, \dots, b)$ és $(c, \dots, d)$ $G'_{j+k}(A)$ -beli színe azonos.

Tekintsük most a mondott α q_i -utat! Mivel α kilép S'_a -ból, a -n is és b -n is áthalad, és $(a, \dots, b)$ $G'_{j+k}(A)$ -beli színe U_i -től diszjunkt (ellenkező esetben α rövidíthető lenne). Világos, hogy az S'_a -t az egyik végpontján át elhagyó α csakis úgy térhet a másik végpontra át vissza, ha áthalad a c és d szögpontra. Ezért (α -nak a c és d közti szakaszára gondolva) c és d S'_c -ben q_i -uttal összeköthető. $S'_a \cong S'_c$ miatt ugyanez áll az S'_a a és b végpontjaira is, ezért α -nak az S'_a -n kívüli része is egy S'_a -n belüli q_i -uttal helyettesíthető. Azaz u és v S'_a -n belül is q_i -uttal köthető össze, s ez ellentmond indirekt feltevésünknek. Ezzel beláttuk, hogy $S'_a := S(a, b, G'_{j+k}(A)) \cong G'_k(B)$.

Ha S'_a valamelyik $(g, \dots, h)$ élének két végpontja $x \in X$ -re egy x -uttal (azaz olyan uttal, melyen minden él színe x -et tartalmazza) összeköthető $G'_{j+k}(A)$ -ban, akkor a fentiekhez hasonló okoskodás szerint g és h már S'_a -n belül is összeköthető x -uttal. Megintcsak a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy $S(a, b, G_{j+k+1}(A)) \cong G_{k+1}(B)$. Q.e.d.

(6.11) Segéd-tétel. Tetszőleges $A, C_0, \dots, C_k \in P^+(X)$ -re $\bigcap (e(C_i, G_\omega(A)) : i \leq k) = e(\bigcup (C_i : i \leq k), G_\omega(A))$.

Bizonyítás. $B \in P^+(X)$ -re nevezzünk egy utat B -utnak, ha minden élének színe B -t részhalmazként tartalmazza. Vezessük be a $C := \bigcup (C_i : i \leq k)$, $e_i := e(C_i, G_\omega(A))$, $e := e(C, G_\omega(A))$ jelöléseket! Mivel minden C -ut egyuttal C_i -ut is ($i \leq k$), az állítás „ $\supseteq$ ” része nyilvánvaló. A fordított irányú tartalmazás igazolását előkészítendő vegyük észre, hogy $|U_i| \geq 2$ esetén $G_4(q_i)$ rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:

(6.12) Ha $a, b \in V(G_4(q_1))$, akkor vagy minden $x \in U_1$ -re létezik x színű él a és b között, vagy pedig minden $x \in U_1$ -re létezik nem a és b között elhelyezkedő x színű él.

(A fenti tulajdonság $|U_1|$ szerinti indukcióval könnyen igazolható.)

Mármost „ $\subseteq$ ” -hoz elég azt belátni, hogy $j < \omega$ -ra

(H_j) Ha $c, d \in V(G_j(A))$ és $(c, d) \in \bigcap (e_i : i \leq k)$, akkor $(c, d) \in e$.

A $(c, d) \in E(G_\omega(A))$ esetre (azaz szomszédos c és d esetére) és a $c = d$ esetre ez nyilvánvaló a konstrukció (c) pontja szerint. Ezért (H_0) igaz.

Tegyük fel, hogy valamely $1 \leq j < \omega$ -ra a (H_{j-1}) indukciós hipotézis igaz, és tekintsük (H_j) -t! Azaz $c, d \in V(G_j(A))$ és $(c, d) \in \bigcap (e_i : i \leq k)$. Feltehető, hogy, mondjuk, $c \notin V(G_{j-1}(A))$. Ekkor alkalmas $(a, \dots, b) \in E'(G_{j-1}(A))$ és $|U_1| \geq 2$ mellett c a $Q(a, b, q_1, G_j(A))$ részgráf belső szögpontja.

Első eset: $d \notin V(Q(a, b, q_1, G_j(A)))$. Ekkor (6.12) és az $a-b$ szimmetria miatt feltehető, hogy minden $y \in U_1$ -re $Q(a, b, q_1, G_j(A))$ -nak van y -nal színezett éle c és b között. A (6.9) alkalmazásával világos, hogy ha $B \in P^+(X)$ -re B a $Q^*(a, b, q_1, G_j(A))$ valamennyi c és b közti éle színének részhalmaza, akkor B részhalmaza a $Q^*(a, \dots, b, q_1, G_j(A))$ bármely éle színének is. Tudjuk, hogy $i \leq k$ -ra c és d egy minimális hosszúságú, mondjuk α_i -vel jelölt C_i -uttal $G_\omega(A)$ -ban összeköthető. $|\alpha_i|$ minimalitása és a konstrukció (c) pontja szerint α_i egyuttal $G_j^*(A)$ -beli ut is. A mondottak szerint így olyan (már nem feltétlenül minimális hosszúságú) α_i ut is létezik, amely átmegy a -n, c -n, s a $Q^*(a, b, q_1, G_j(A))$ valamennyi a és c közötti élén. Kaptuk, hogy $a \in V(G_{j-1}^*(A))$ -ra $(a, c) \in e$, $(a, d) \in \bigcap (e_i : i \leq k)$. Hasonló-

an (c szerepét d -nek és d szerepét a -nak adva) kaphatunk olyan $G_{j-1}^*(A)$ -beli h csucst, melyre $(h,d) \in e$, $(a,h) \in \bigcap (e_i : i \leq k)$. (H_{j-1}) szerint viszont $(a,h) \in e$, s a tranzitivitásból $(c,d) \in e$ adódik.

A második, nem részletezett $c \in V(Q(a,b,q_1,G_j(A)))$ esetben $(c,d) \in e$ analóg módon adódik. Tehát (H_j) teljesül. Q.e.d.

(6.13) Segéd-tétel. Bármely $A \in P^+(X)$ -re az $e(x, G_\omega(A))$ ($x \in X$) ekvivalenciákra a $V(G_\omega(A))$ halmaz ekvivalenciahálójában P_χ teljesül.

Bizonyítás. Tekintsük $p_i \leq q_i$ -t P_χ -ből. (6.11) szerint $p_i(e(x, G_\omega(A)) : x \in X) = \bigcap (e(x, G_\omega(A)) : x \in M_i) = e(\bigcup (\{x\} : x \in M_i), G_\omega(A)) = e(M_i, G_\omega(A))$. Legyen $(a, B, b) \in E(G_\omega(A))$ és $(a, b) \in e(M_i, G_\omega(A))$. Ekkor $M_i \subseteq B$, és valamely $j < \omega$ -ra $(a, B, b) \in E(G_j(A))$ (sőt $(a, B, b) \in E'(G_j(A))$ is feltehető). Ezért a konstrukció (a) vagy (b) pontja szerint $(a, b) \in q_i(e(x, G_{j+1}(A)) : x \in X) \subseteq q_i(e(x, G_\omega(A)) : x \in X)$. Ennélfogva $q_i(e(x, G_\omega(A)) : x \in X)$ részhalmazként tartalmazza $e(M_i, G_\omega(A))$ generátorrendszerét, s így $e(M_i, G_\omega(A))$ -t is. Q.e.d.

A $G_j(A)$ kezdőélének színét $C(G_j(A))$ -val jelölve érvényes az alábbi

(6.14) Segéd-tétel. Ha $A \in P^+(X)$ és $j \leq \omega$, akkor $C(G_j(A)) \subseteq T(A)$.

Bizonyítás. Elég csak véges j -ket tekinteni. Ha $j = 0$, akkor $C(G_j(A)) = A \subseteq T(A)$, valóban. Indukciós hipotézisként tegyük fel, hogy bármely $B \in P^+(X)$ -re $C(G_j(B)) \subseteq T(B) = T_n(B)$! Legyen $A \in P^+(B)$, és számoljunk: $C(G_j'(A)) = C(G_j^*(A)) = C(G_j(A)) \cup \bigcup (U_i : M_i \subseteq C(G_j(A)) \text{ és } |U_i| = 1) \subseteq$

$\subseteq T_n(A) \cup \bigcup (\bigcap (\{x\}: x \in U_i): M_i \subseteq C(G_j(A)) \subseteq$
 $\subseteq T_n(A) \cup \bigcup (\bigcap (T_n(x): x \in U_i): M_i \subseteq T_n(A)) = T_{n+1}(A) = T(A) =$
 $= T_n(A)$, azaz $C(G_j'(A)) \subseteq T_n(A) = T(A)$. Tegyük most fel, hogy
 $x \in C(G_{j+1}(A)) \setminus C(G_j'(A))$! Ekkor a konstrukció (c) pontja
 szerint létezik egy minimális hosszúságú, α -val jelölt
 x -ut $G_j'(A)$ -ban, mely a végpontokat összeköti. Mivel
 $|\alpha| > 1$, alkalmas i -re α áthalad a Q (bal végpont, jobb
 végpont, $q_i, G_1(A)$) részgráf mindegyik szögpontján. Legyen
 bal végpont $= a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k =$ jobb végpont a
 Q (bal végpont, jobb végpont, $q_i, G_1(A)$) részgráf szögpont-
 jainak sorozata, s az $(a_m, \dots, a_{m+1})$ él eredeti $(G_1(A)-$
 beli) színét jelöljük y_m -mel! Világos, hogy $\{y_m: m < k\} =$
 $= U_i$. Az α nyilván a $G_{j+1}(A)$ gráfban is x -ut lesz, a-
 mely a mondottak szerint áthalad az $S(a_m, a_{m+1}, G_{j+1}(A))$
 részgráfok végpontjain, s α megfelelő szakaszai x -utat
 képeznek ezen részgráfokban. (6.9) szerint
 $S(a_m, a_{m+1}, G_{j+1}(A)) \cong G_j(\{y_m\})$, tehát $G_j(\{y_m\})$ ($m < k$)
 végpontjai is összeköthetők x -uttal. Ha β_m egy, a vég-
 pontokat összekötő x -ut $G_j(\{y_m\})$ -ben, akkor mindazon é-
 lek végpontjai, amelyeken β_m áthalad, x -uttal köthe-
 tők össze $G_{j-1}'(\{y_m\})$ -ben, s így a konstrukció (c) pontja
 szerint $x \in C(G_j(\{y_m\}))$. (Jegyezzük meg, hogy
 $C(G_1(A)) \setminus C(G_0'(A)) = \emptyset$ miatt $j > 0$.) Ezért az indukci-
 ós hipotézis szerint $x \in C(G_j(\{y_m\})) \subseteq T_n(y_m)$ teljesül
 $m < k$ -ra. Így $x \in \bigcap (T_n(y): y \in U_i)$. Továbbá $M_i \subseteq C(G_0'(A)) =$
 $= A \cup \bigcup (U_\ell: M_\ell \subseteq A \text{ és } |U_\ell| = 1) = T_0(A) \cup \bigcup (\bigcap (T_0(z):$
 $z \in U_\ell): M_\ell \subseteq A \text{ és } |U_\ell| = 1) \subseteq T_1(A) \subseteq T_n(A)$.
 Ennélfogva $x \in \bigcup (\bigcap (T_n(y): y \in U_\ell): M_\ell \subseteq T_n(A)) \subseteq T_{n+1}(A)$.
 Evvel $C(G_{j+1}(A)) \subseteq T_{n+1}(A) = T(A)$ igazolást nyert.

Q.e.d.

Végül (6.6) szükségessége az alábbi módon adódik.

Tegyük fel, hogy $P_x \Rightarrow \bigwedge A \leq x$ minden hálóban teljesül! Ekkor (6.11) és (6.13) szerint

$$(\text{bal végpont}, \text{jobb végpont}) \in e(A, G_\omega(A)) =$$

$$= \bigcap (e(y, G_\omega(A)) : y \in A) \subseteq e(x, G_\omega(A)).$$
 Ezért valamely

$j < \omega$ -ra $(\text{bal végpont}, \text{jobb végpont}) \in e(x, G_j(A))$, ahonnan

(6.14) szerint $x \in C(G_{j+1}(A)) \subseteq T(A)$. Te-

hát $x \in T(A)$, s ezzel a bizonyítás kész.

Q.e.d.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Mint tanítványa, itt is szeretném kifejezni köszönetemet Huhn András docensnek, a matematikai tudományok kandidátusának azért, hogy az algebrai kutatásokba még egyetemi hallgató koromban bevezetett, sok, az értekezésben is érintett témakörrel megismerttetett, s hogy munkámat igen nagyszámu önzetlen problémafelvetéssel és ötlettel, valamint sok más módon is segítette és segíti.

Ezuton is köszönetet mondok Csákány Béla egyetemi tanárnak, a matematikai tudományok doktorának, aki munkámat az algebrában tett első lépéseim óta figyelemmel kíséri, szakmailag és emberileg mindig sokat segített. Tanácsai, ötletei és problémafelvetései nemcsak az értekezés témájában bizonyultak igen hasznosaknak.

Itt is köszönetet mondok aspiránsvezetőmnek, Schmidt Tamásnak, a matematikai tudományok doktorának, aki értekezésem elkészítése és aspiranturám során, és ezt megelőzően is sok értékes tanáccsal, észrevétellel és utmutatással volt segítségemre, valamint sok új vagy vizsgálataimmal kapcsolatos eredményre hívta fel figyelmem.

Köszönetet mondok Szőkefalvi-Nagy Béla professzornak, az MTA rendes tagjának támogatásáért; valamint azért, hogy lehetővé tette számomra az algebrai kutatásokban való részvételt.

A feltételes hálózazonosságok vizsgálatát kísérő értékes megjegyzéseiért Alan Day professzornak is köszönettel tartozom.

I R O D A L O M

- 1 K. A. Baker, Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class, *Advances in Math.*, 24 (1977), 207-243.
- 2 G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Third ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 25, Providence, R.I., 1967.
- 3 P. Crawley and R. A. Dean, Free lattices with infinite operations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 92 (1959), 35-47.
- 4 B. Csákány, Malcev-típusú tulajdonságok és alkalmazásaik, *nagydoktori értekezés*, Szeged, 1974.
- 5 G. Czédli, On the lattice of congruence varieties of locally equational classes, *Acta Sci. Math.*, 41 (1979), 39-45.
- 6 -, *Kongruenciavarietások*, egyetemi doktori értekezés, Szeged, 1979.
- 7 -, Which distributive lattices have 2-distributive sublattice lattices?, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 35 (1980), 455-463.
- 8 -, On the 2-distributivity of sublattice lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 36 (1980), 49-55.
- 9 -, A note on the compactness of the consequence relation for congruence varieties, *Algebra Universalis*, 15 (1982), 142-143.
- 10 -, A Mal'cev type condition for the semi-distributivity of congruence lattices, *Acta Sci. Math.*, 43 (1981), 267-272.
- 11 -, On properties of rings that can be characterized by infinite lattice identities, *Studia Sci. Math. Hungar.*, 16 (1981), 45-60 (megjelenés alatt).
- 12 -, A characterization for congruence semi-distributivity, *Proc. Conf. Universal Algebra and Lattice Theory*, Puebla (Mexico 1982), megjelenés alatt.
- 13 -, Mal'cev conditions for Horn sentences with congruence permutability, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, közlésre benyújtva.
- 14 -, On lattice word problem with the help of graphs, *Czech. Math. J.*, közlésre benyújtva.
- 15 G. Czédli and A. Day, Horn sentences with (W) and weak Mal'cev conditions, *Algebra Univ.*, közlésre benyújtva.
- 16 G. Czédli and R. Freese, On congruence distributivity and modularity, *Algebra Univ.*, közlésre benyújtva.

- 17 G. Czédli and A. Lenkehegyi, On congruence n -distributivity of ordered algebras, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 41 (1983), 17-26.
- 18 G. Czédli and A. Lenkehegyi, On classes of ordered algebras and quasiorder distributivity, Acta Sci. Math., közlésre benyújtva.
- 19 G. Czédli and J. D. H. Smith, On the uniqueness of Mal'cev polynomials, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 28. Finite Algebra and Multiple-valued Logic (Szeged, 1979), 127-145.
- 20 A. Day, A characterization of modularity of congruence lattices of algebras, Canad. Math. Bull., 12 (1969), 167-173.
- 21 A. Day and R. Freese, A characterization of identities implying congruence modularity. I, Canad. J. Math., 32 (1980), 1140-1167.
- 22 R. A. Dean, Free lattices generated by partially ordered sets and preserving bounds, Canad. J. Math., 16 (1964), 136-148.
- 23 T. Evans, The word problem for abstract algebras, J. London Math. Soc., 26 (1951), 64-71; MR 12/475 (Bates).
- 24 R. Freese, Minimal modular congruence varieties - preliminary report, Amer. Math. Soc. Notices, 23 (1976), No. 1, 76T-A14.
- 25 R. Freese and C. Herrmann and A. P. Huhn, On some identities valid in modular congruence varieties, Algebra Univ, 12 (1981), 322-334.
- 26 R. Freese and J. B. Nation, The commutator - an overview, preprint. *
- 27 G. Frobenius, Theorie der linearen Formen mit ganzen Coefficienten, J. reine und angewandte Math., 86 (1879), 146-208.
- 28 N. Funayama, Imbedding infinitely distributive lattices completely isomorphically into Boolean algebras, Nagoya Math. J., 15 (1959), 71-81.
- 29 G. Grätzer, General Lattice Theory, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
- 30 G. Grätzer, Universal Algebra, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1979. 30/B: első kiadás, Van Nostrand, 1968.
- 31 G. Grätzer and D. Kelly, Free m -products of lattices. I, Colloq. Math., közlésre benyújtva.

- 32 G. Grätzer and E. T. Schmidt, Characterizations of congruence lattices of abstract algebras, *Acta Sci. Math.*, 24 (1963), 34-59.
- 33 H.-P. Gumm, Is there a Mal'cev theory for single algebras?, *Algebra Univ.*, 8 (1978), 320-329.
- 34 C. Herrmann und A. P. Huhn, Zum Begriff der Charakteristik modularer Verbände, *Math. Zeitschrift*, 144 (1975), 185-194.
- 35 C. Herrmann and W. Poguntke, Axiomatic classes of lattices of normal subgroups, Technische Hochschule Darmstadt Preprint, 12, Darmstadt, 1972.
- 36 T. K. Hu, Locally equational classes of universal algebras, *Chinese J. Math.*, 1 (1973), 143-165.
- 37 A. P. Huhn, Schwach distributive Verbände. I, *Acta Sci. Math.*, 33 (1972), 297-305.
- 38 A. P. Huhn, n -distributivity and some questions of the equational theory of lattices, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 17, Contributions to Universal Algebra (Szeged, 1975), 167-178.
- 39 A. P. Huhn, szóbeli közlés, 1977.
- 40 G. Hutchinson, On classes of lattices representable by modules, *Proc. Univ. Houston Lattice Theory Conf.*, Houston, 1973, 69-94.
- 41 G. Hutchinson, személyes, levélbeli közlés, 1982.
- 42 G. Hutchinson and G. Czédli, A test for identities satisfied in lattices of submodules, *Algebra Univ.*, 8 (1978), 269-309.
- 43 N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra, Vol. III. Theory of Fields and Galois Theory*, Van Nostrand, Princeton, 1964.
- 44 B. Jónsson, On the representation of lattices, *Math. Scandinavica*, 1 (1953), 193-206.
- 45 B. Jónsson, Algebras whose congruence lattices are distributive, *Math. Scand.*, 21 (1967), 110-121.
- 46 B. Jónsson, Varieties of algebras and their congruence varieties, *Proc. Int. Congress Math. I* (1974), 315-320.
- 47 B. Jónsson, Congruence varieties, *Algebra Univ.*, 10 (1980), 355-394; vagy Appendix 3 [30]-hoz.
- 48 M. Makkai and G. McNulty, Universal Horn axiom system for lattices of submodules, *Algebra Univ.*, 7 (1977), 25-31.
- 49 A. I. Malcev, K obsej tyeorii algebraicseszkih szisztém, *Mat. Szbornyik*, 35(77), (1954), 3-20.

- 50 N. H. McCoy, Rings and Ideals, Charus Math. Monographs, 8, Math. Assoc. Amer., Waverly Press, Baltimore, 1948.
- 51 J. C. C. McKinsey, The decision problem for some classes of sentences without quantifiers, J. Symbolic Logic, 8 (1943), 61-76.
- 52 J. B. Nation, Varieties whose congruences satisfy certain lattice identities, Algebra Univ., 4 (1974), 78-88.
- 53 W. Neumann, On Mal'cev conditions, J. Austral Math. Soc., 17 (1974), 376-384.
- 54 O. Ore, Structures and group theory. II, Duke Math. J., 4 (1938), 247-269.
- 55 A. F. Pixley, Local Mal'cev conditions, Canad. Math. Bull., 15 (1972), 559-568.
- 56 Sz. V. Polin, O tozsgyesztvah konyecsnih algebr, Szibirskij Mat. Zs. 17 (1976), 1356-1366.
- 57 P. Pudlák and J. Tuma, Yeast graphs and fermentation of algebraic lattices, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 14. Lattice Theory (Szeged, 1974), 301-341.
- 58 W. Taylor, Characterizing Mal'cev conditions, Algebra Univ., 3 (1973), 351-395.
- 59 Ph. M. Whitman, Free lattices, Ann. of Math., (2) 42 (1941), 325-330.
- 60 R. Wille, Kongruenzklassengeometrien, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., 113, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.