

FÜGGŐSÉGEK RELÁCIÓS ADATBÁZIS MODELLBEN

CZÉDLI GÁBOR

Szeged

Az E. F. CODD [2, 3] által bevezetett funkcionális függőség absztrakt jellemzése W. W. ARMSTRONGTÓL [1] származik. A dolgozatban újabb függőségi fogalmakat vezetünk be, melyek közül kettőt absztrakt módon is jellemzünk.

1. Bevezetés

Az E. F. CODD [2, 3] által bevezetett relációs adatbázis modell az adatok kezelésének egyik legigéretesebb eszköze. Ez a modell nem a gépi hatékonyságot helyezi előtérbe, hanem az adatokat a felhasználó számára könnyen áttekinthető módon ábrázolja. Az adatok tárolása szemléletes formában, mátrix alakban valósul meg.

A pontos definíció kedvéért legyen Ω egy véges halmaz. Most és a továbbiak során is feltesszük, hogy Ω nem üres. Ω elemeit attributumoknak nevezzük. Minden $a \in \Omega$ -ra legyen T_a egy tetszőleges nem üres halmaz. T_a az a attributum értékkészlete, elemeit az a attributum értékeinek nevezzük. Ekkor a $\prod_{b \in \Omega} T_b$ Descartes-szorzat tetszőleges véges R részhalmazát Ω feletti relációnak nevezzük. Egy Ω feletti R reláció tehát olyan $g: \Omega \rightarrow \bigcup \{T_b: b \in \Omega\}$ kiválasztási függvényekből áll, ahol $g(a) \in T_a$ ($a \in \Omega$). Ennek megfelelően egy $\Omega = \{a_1, \dots, a_n\}$ feletti R reláció az alábbi kétdimenziós táblázattal ábrázolható:

	a_1	a_2	$\dots$	a_n
g	$g(a_1)$	$g(a_2)$	$\dots$	$g(a_n)$

A hagyományos adatkezelő rendszerekkel analógiát keresve egy $g \in R$ függvényt rekordként képzelhetünk el, melyben $g(a)$ az a attributum értéke a kérdéses rekordban.

A relációs adatbázis modell számára az adatbázis nem más, mint véges sok reláció időben változó rendszere.

2. Függőségek relációkban

A funkcionális függőség fogalmát CODD [2, 3] vezette be az alábbi módon. Legyen $A, B \subseteq \Omega$ és R egy Ω feletti reláció. Akkor mondjuk, hogy B *funkcionálisan függ* A -tól (jelölése $A \xrightarrow{f} B$ vagy röviden csak $A \xrightarrow{f} B$), ha bármely $g, h \in R$ esetén

$$(\forall a \in A)(g(a) = h(a)) \Rightarrow (\forall b \in B)(g(b) = h(b))$$

teljesül.

Minden adattároló rendszernek az a végső feladata, hogy a felhasználó számára aktuális információkat szolgáltatasson; a rendszerrel kapcsolatos egyéb tevékenységeket (javítás, törlés, beírás, ...) is ennek érdekében végezzük. Relációs modell esetén az információszoolgáltatás kérdése többnyire úgy merül fel, hogy bizonyos adatokat ($A \subseteq \Omega$ -ra a $g(a)$, $a \in A$ értékeket) többé-kevésbé ismerve további adatokat ($B \subseteq \Omega$ -ra a $g(b)$, $b \in B$ értékeket) szeretnénk megtudni. Az információszoolgáltatás lehetősége szoros kapcsolatban áll azzal, hogy milyen mértékben függnek össze az ismert és keresett adatok, azaz milyen függőség van A és B között. Ha például B funkcionálisan függ A -tól, akkor az összes $g(a)$ ($a \in A$) attribútum értéket ismerve, biztosak lehetünk abban, hogy a $g(b)$ ($b \in B$) értékeket is megtudhatjuk a tekintett relációból.

Az időben változó relációkkal együtt a függőségek is változnak. Célszerű azonban az adatbázist úgy szervezni, hogy bizonyos információszoolgáltatási feladatok mindig könnyen keresztülvihetők legyenek; azaz bizonyos függőségek mindig jelen legyenek. Természetesen minden relációban felléphetnek véletlenszerű, esetleges függőségek is. Az állandó törvényszerű függőségek feltárása nélkül viszont nem mondható, hogy tárolt adatainkat teljesen megértettük.

Dolgozatunkban az adattárolást csak az információszoolgáltatás szempontjából vizsgáljuk, ezért a fellépő relációkat időben állandónak tekintjük. Megemlítjük azonban, hogy a relációs adatbázismodell elmélete és alkalmazási területe ennél jóval gazdagabb, és a funkcionális függőségeknek is vannak fontosabb alkalmazásai. Mindezek ismertetése alól DEMETROVICS JÁNOS magyar nyelvű összefoglaló cikke [5] remélhetőleg felment bennünket.

Az alábbiakban három további függőségfogalmat definiálunk. Legyen $A, B \subseteq \Omega$ és R egy Ω feletti reláció. Akkor mondjuk, hogy B *erősen függ* A -tól (jelölése $A \xrightarrow{s} B$ vagy röviden $A \xrightarrow{s} B$) R -ben, ha bármely $g, h \in R$ esetén

$$(\exists a \in A)(g(a) = h(a)) \Rightarrow (\forall b \in B)(g(b) = h(b)).$$

Akkor mondjuk, hogy B *gyengén függ* A -tól R -ben (jelölése $A \xrightarrow{w} B$ vagy $A \xrightarrow{w} B$), ha bármely $g, h \in R$ esetén

$$(\forall a \in A)(g(a) = h(a)) \Rightarrow (\exists b \in B)(g(b) = h(b)).$$

A [4]-ben bevezetett $A \xrightarrow{d} B$ (vagy röviden csak $A \xrightarrow{d} B$) *d-függőség* pedig azt jelenti, hogy bármely $g, h \in R$ esetén

$$(\exists a \in A)(g(a) = h(a)) \Rightarrow (\exists b \in B)(g(b) = h(b)).$$

Az $A \xrightarrow{d} B$ kapcsolatot tehát *d-függőségnek* nevezzük, és értelemszerűen használjuk az erős függőség (*s-függőség*), funkcionális függőség (*f-függőség*) stb. kifejezéseket is. Mielőtt a fent definiált függőségek alkalmazhatóságára próbálunk rámutatni, egy

példát ismertetünk. Legyen $\Omega = \{\text{szerző, cím, terem, polc}\}$. Az alábbi táblázatban megadunk egy R Ω feletti relációt, amely egy tizennyolc könyvvel felszerelt könyvtár adatait tartalmazza.

Szerző	Cím	Terem	Polc
1	1	1	2
2	2	1	3
3	3	1	1
4	4	1	2
5	5	2	3
6	6	2	1
7	7	2	2
8	8	2	3
9	9	3	1
10	10	3	2
11	11	3	3
12	12	3	1
1	4	1	1
5	8	3	3
4	1	1	3
7	10	3	2
6	10	2	2
6	9	2	1

A könyvtár három teremből áll, mindegyik teremben három, egyenként két könyv befogadó képességű polc van elhelyezve. A könyvtár úgy van megszervezve, hogy $\{\text{szerző, cím}\} \xrightarrow{d} \{\text{terem, polc}\}$. Továbbá $i=1, 2, \dots, 12$ -re az $\left[\frac{i+3}{4}\right]$ -ik terem $\left(1+3\left\{\frac{i}{3}\right\}\right)$ -ik polcán található az a könyv, amelynek a szerzője is és címe is i . (Itt $[x]$ és $\{x\}$ az x valós szám egész-, illetve törtrészét jelöli.) A könyvtárba érkező olvasó, aki a keresett könyv szerzőjét vagy címét ismeri — legyen i az ismert attributum értéke — megtalálhatja a könyvet, ha végignézi az $\left[\frac{i+3}{4}\right]$ -ik termet és az $\left(1+3\left\{\frac{i}{3}\right\}\right)$ -ik polcokat a másik két teremben. Nem szükséges az egész könyvtárat végignéznie.

A példa kapcsán most megkíséreljük végiggondolni, hogy az újonnan bevezetett függőségek milyen előnyöket rejthetnek magukban egyes konkrét relációk esetén. Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy egy $A \rightarrow B$ függőséget függvényekkel is megadhatunk. Ha $A \rightarrow B$ egy funkcionális függőség, akkor ezt egy $\varphi: \prod_{a \in A} T_a \rightarrow \prod_{b \in B} T_b$ (parciálisan értelmezett) függvénnyel adhatjuk meg. Az $A \xrightarrow{f} B$ -nek megfelelő információszolgáltatás pedig a φ függvény egy behelyettesítési értékének megadását jelenti. Az információszolgáltatás természetesen a φ függvény ismerete nélkül is lehetséges az R relációt megtestesítő táblázat végignézésével. Az $A \xrightarrow{d} B$ d -függőséget pedig $\delta_a: T_a \rightarrow \prod_{b \in B} T_b$ függvényekkel ($a \in A$) adhatjuk meg. A δ_a függvényektől azt kell megkövetelnünk, hogy valamely $b \in B$ esetén a δ_a értékének b -ik komponense helyes adatot szolgáltatasson. (Gondoljunk a példa kapcsán fellépő $\delta_{\text{szerző}}(x) = \delta_{\text{cím}}(x) = \left(\left[\frac{x+3}{4}\right], 1+3\left\{\frac{x}{3}\right\}\right)$ függvényekre.)

Mármost a többféle függőségfogalom tanulmányozását az alábbiak indokolják.

(1) A gyakorlat olyankor is felvetheti az információszolgáltatás kérdését, amikor nem ismerjük az összes A -beli attributum értékét, csak legalább egyet. Mint pl. a könyvtár látogatója. Az erős és d -függőség éppen ezzel a szituációval kapcsolatos.

(2) Egy függőséget függvényekkel megadva az információszolgáltatás meggyorsítható. Nem biztos, hogy a keresgélés elkerülhető, de legalább a táblázatnak csak egy részében kell keresgélni.

(3) Ha A és B között különböző függőségek is fellépnek, akkor mód nyílik a legkedvezőbb függőség kiválasztására és függvényekkel történő megadására. Ezek a függvények esetleg — mint példánkban is — egyszerűen megadhatók. Első látásra a funkcionális függőség tűnik a legelőnyösebbnek, hiszen azt függvényekkel megadva elkerülhető a táblázatban történő keresgélés időigényes feladata. Azonban egy „bonyolult” függvényt szintén csak táblázattal tudunk megadni, és így a behelyettesítési érték meghatározása egy másik — esetenként elég terjedelmes — táblázatban történő keresgélést tesz szükségessé. Korábbi példánkban

$$\{\text{szerző, cím}\} \xrightarrow{f_R} \{\text{terem, polc}\}$$

is teljesül, de az ezen funkcionális függőséget megadó függvény értéktáblázata megegyezik R -rel. Gyorsabban megtalálunk egy könyvet a péda ismertetése során leírt módon. Azaz e konkrét esetben célszerűbb a

$$\{\text{szerző, cím}\} \xrightarrow{d_R} \{\text{terem, polc}\}$$

d -függőséget választani.

(4) Esetenként elegendő lehet az is, ha csak egy B -beli attributum értékét tudjuk meg helyesen (nem tudva, hogy melyiket). Pl. ez a helyzet akkor, amikor C -beli attributumok értékeit keressük, B csak közbülső lépés, és $B \xrightarrow{d} C$ vagy $B \xrightarrow{s} C$ teljesül egy másik Q relációban. Ez a közvetett információszolgáltatás is hatékony lehet, továbbá a tárolandó adatok vagy függőségeket leíró függvények mennyisége is csökkenhet.

(5) Előfordulhat, hogy A és B között nincs funkcionális függőség, de egy másik típusú függőség fellép.

3. Különböző típusú függőségek kapcsolata

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogy milyen kapcsolatban állnak egymással az egyazon R Ω feletti relációban fellépő különböző típusú függőségek.

3.1. ÁLLÍTÁS. Legyen $A, B \subseteq \Omega$ és R egy Ω feletti reláció. Ekkor

$$A \xrightarrow{f_R} B \text{ akkor és csak akkor teljesül, ha } (\forall b \in B)(A \xrightarrow{w_R} \{b\});$$

$$A \xrightarrow{d_R} B \text{ akkor és csak akkor teljesül, ha } (\forall a \in A)(\{a\} \xrightarrow{w_R} B);$$

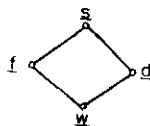
$A \xrightarrow{s} B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(\forall b \in B)(A \xrightarrow{d} \{b\})$;

és

$A \xrightarrow{s} B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(\forall a \in A)(\{a\} \xrightarrow{f} B)$.

Állításunk a definíciók közvetlen következménye, így a bizonyítást mellőzzük.

Vezessük be az $\{f, d, w, s\}$ halmazon a következő $\cong$ binér relációt¹: $x \cong y$ akkor és csak akkor, ha rögzített Ω esetén az R -beli x -függőségek halmaza egyértelműen és R -tól függetlenül meghatározza az R -beli y -függőségek halmazát. Nyilván parciális rendezést definiáltunk, melynek diagramja a 3.1. állítás szerint az alábbi:



(Egyszerű ellenpéldával igazolható, hogy f és d a rendezésben összehasonlíthatatlan.)

4. Függőségek absztrakt jellemzése

Tetszőleges R Ω feletti relációra és $z \in \{f, d, w, s\}$ -re legyen $\mathcal{Z}_R = \{(A, B) : A, B \subseteq \Omega \text{ és } A \xrightarrow{z} B\}$. A $\mathcal{Z}_R$ halmazt az R -beli z -függőségek teljes családjának, vagy röviden R z -családjának nevezzük. Minden egyes $\mathcal{Z}_R$ z -család rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal. Ezek egy része minden R esetén teljesül (mint pl. $(\forall A \subseteq \Omega)((A, A) \in \mathcal{Z}_R)$ a $z=f$ esetben), míg a többi tulajdonság az R reláció specialitása.

Természetesen merül fel az igény, hogy meghatározzuk a z -családok legáltalánosabb — azaz minden R esetén teljesülő — tulajdonságait. Ha egy elméletet szeretnénk kidolgozni relációs adatbázis modellel és z -függőségekkel kapcsolatban, akkor ezt többek között a z -függőségek legáltalánosabb tulajdonságaira — lehetőleg valamennyire — kell alapoznunk. CODD [3] szükségesnek tartotta, hogy számos példát közöljön az általa bevezetett funkcionális függőségen alapuló normálformák magyarázására és definíciói motiválására. A nagyszámú példa részben azt demonstrálta, hogy a normálformák elmélete a funkcionális függőségek legáltalánosabb tulajdonságaira épül. Kevesebb példa is elegendő lett volna, ha a funkcionális függőségek legáltalánosabb tulajdonságai már akkor ismertek lettek volna.

Nem lenne célszerű a z -függőségek valamennyi legáltalánosabb tulajdonságának felsorolására törekednünk. A célunk éppúgy megfelel, ha megadunk néhány olyan tulajdonságot (ún. axiómát) úgy, hogy éppen az axiómák következményei lesznek a z -függőségek legáltalánosabb tulajdonságai. A z -családok absztrakt jellemzésén egy ilyen axiómarendszer megadását fogjuk érteni. Az alábbi három tétel a $z=f$, $z=s$ és $z=d$ esetben nyújt absztrakt jellemzést.

Legyen $P(\Omega)$ az Ω részhalmazainak halmaza. A $P(\Omega) \times P(\Omega)$ Descartes-szorzat egy $\mathcal{F}$ részhalmazát absztrakt f -családnak nevezzük, ha $\mathcal{F}$ -re az alábbi négy axióma

¹ A reláció elnevezést itt a szokásos értelemben használjuk.

teljesül:

- (F1) Minden $A \subseteq \Omega$ -ra $(A, A) \in \mathcal{F}$;
- (F2) Ha $(A, B) \in \mathcal{F}$ és $(B, C) \in \mathcal{F}$, akkor $(A, C) \in \mathcal{F}$;
- (F3) Valahányszor $(A, B) \in \mathcal{F}$ és $A \subseteq C, B \supseteq D$, mindannyiszor $(C, D) \in \mathcal{F}$;
- (F4) Valahányszor $(A, B) \in \mathcal{F}$ és $(C, D) \in \mathcal{F}$, mindannyiszor $(A \cup C, B \cup D) \in \mathcal{F}$.

4.1. TÉTEL. (ARMSTRONG [1]). Tetszőleges R relációra $\mathcal{F}_R$ egy absztrakt f -család. Fordítva, minden $\mathcal{F}$ absztrakt f -családhoz létezik olyan R reláció, hogy $\mathcal{F} = \mathcal{F}_R$.

A tétel szerint egy funkcionális függőségekre vonatkozó ítélet akkor és csak akkor teljesül minden R relációra $\mathcal{F}_R$ -ben, ha következménye az F1, ..., F4 axiómáknak.

A $P(\Omega) \times P(\Omega)$ Descartes-szorzat egy $\mathcal{S}$ részhalmazát absztrakt s -családnak nevezzük, ha $\mathcal{S}$ -re az alábbi öt axióma teljesül:

- (S1) Valahányszor $(A, B) \in \mathcal{S}$, $A_1 \subseteq A$ és $B_1 \subseteq B$, mindannyiszor $(A_1, B_1) \in \mathcal{S}$;
- (S2) Ha $(A, B) \in \mathcal{S}$, $(B, C) \in \mathcal{S}$ és $B \neq \emptyset$, akkor $(A, C) \in \mathcal{S}$;
- (S3) Valahányszor $(A, B) \in \mathcal{S}$ és $(C, D) \in \mathcal{S}$, mindannyiszor $(A \cap C, B \cup D) \in \mathcal{S}$;
- (S4) Valahányszor $(A, B) \in \mathcal{S}$ és $(C, D) \in \mathcal{S}$, mindannyiszor $(A \cup C, B \cap D) \in \mathcal{S}$;
- (S5) Minden $a \in \Omega$ -ra $(\{a\}, \{a\}) \in \mathcal{S}$.

Hasonlóan, a $P(\Omega) \times P(\Omega)$ egy $\mathcal{D}$ részhalmazát absztrakt d -családnak nevezzük, ha $\mathcal{D}$ -re teljesül az alábbi öt axióma:

- (D1) Minden $A \subseteq \Omega$ -ra $(A, A) \in \mathcal{D}$;
- (D2) $\mathcal{D}$ tranzitív, azaz $(A, B) \in \mathcal{D}$ és $(B, C) \in \mathcal{D}$ esetén $(A, C) \in \mathcal{D}$;
- (D3) Valahányszor $(A, B) \in \mathcal{D}$, $C \subseteq A$ és $B \subseteq D \subseteq \Omega$, mindannyiszor $(C, D) \in \mathcal{D}$;
- (D4) Tetszőleges $(A, B) \in \mathcal{D}$ és $(C, D) \in \mathcal{D}$ esetén $(A \cup C, B \cup D) \in \mathcal{D}$;
- (D5) $(A, \emptyset) \in \mathcal{D}$ csak $A = \emptyset$ esetén teljesül.

A továbbiakban az alábbi két tételt fogjuk bizonyítani.

4.2. TÉTEL. Tetszőleges R relációra $\mathcal{S}_R$ egy absztrakt s -család. Fordítva, minden $\mathcal{S}$ absztrakt s -családhoz létezik olyan R reláció, hogy $\mathcal{S} = \mathcal{S}_R$.

4.3. TÉTEL. Tetszőleges nem üres R reláció esetén $\mathcal{D}_R$ egy absztrakt d -család. Fordítva, minden $\mathcal{D}$ absztrakt d -családhoz létezik olyan nem üres R reláció, amelyre $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R$.

Megjegyzés. A 4.3. tételből kirekesztettük az $R = \emptyset$ esetet. Ez azonban nem jelenti az általánosság megszorítását, hiszen egyrészt az üres reláció nem túlzottan érdekes, másrészt $\mathcal{D}_\emptyset = P(\Omega) \times P(\Omega)$ miatt $\mathcal{D}_\emptyset$ -ra a D1, ..., D5 axiómák közül csak D5 nem teljesül.

5. A 4.2. tétel bizonyítása

A definíciókból közvetlenül adódik, hogy $\mathcal{S}_R$ egy absztrakt s -család. Ezért csak azt kell igazolnunk, hogy minden $\mathcal{S}$ absztrakt s -családhoz található olyan R reláció, hogy $\mathcal{S} = \mathcal{S}_R$.

Legyen $\mathcal{S}$ egy absztrakt s -család, és definiáljunk egy $\psi_{\mathcal{S}}: P(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ leképezést a következőképpen:

$$X\psi_{\mathcal{S}} = \{a: a \in \Omega \text{ és } (\{a\}, X) \in \mathcal{S}\} \quad (X \subseteq \Omega).$$

5.1. SEGÉDTÉTEL. A $\psi = \psi_{\mathcal{S}}$ leképezés rendelkezik az alábbi öt tulajdonsággal (tetszőleges $X, Y, Z \subseteq \Omega$ -ra):

- (P1) $(X \cup Y)\psi = X\psi \cap Y\psi$;
- (P2) $X \subseteq Y$ esetén $X\psi \supseteq Y\psi$;
- (P3) Ha $Y \neq \emptyset$, $X \subseteq Y\psi$ és $Y \subseteq Z\psi$, akkor $X \subseteq Z\psi$;
- (P4) Minden $a \in \Omega$ -ra $a \in \{a\}\psi$;
- (P5) $\emptyset\psi = \Omega$.

Megjegyezzük, hogy — a segédtételre történő későbbi hivatkozások kedvéért — a felsorolt tulajdonságok nem teljesen függetlenek egymástól, például P5 következik a P2 és P4 tulajdonságokból.

Bizonyítás. Ha $(\{a\}, X) \in \mathcal{S}$ és $(\{a\}, Y) \in \mathcal{S}$, akkor S3 szerint $(\{a\}, X \cup Y) \in \mathcal{S}$. Így $X\psi \cap Y\psi \subseteq (X \cup Y)\psi$. A fordított irányú tartalmazás S1-ből következik, tehát P1 teljesül. P2 szintén S1-ből adódik. Ha P3 premisszái teljesülnek, akkor minden $y \in Y$ -ra $(\{y\}, Z) \in \mathcal{S}$. Innen S4 segítségével $(Y, Z) \in \mathcal{S}$ adódik, és S2-ből a P3 következik. S5 miatt P4 triviális. S1 és S5 együttes alkalmazásával $(\{a\}, \emptyset) \in \mathcal{S}$ minden $a \in \Omega$ -ra, ahonnan P5 következik.

Egy $\psi: P(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ leképezést s -leképezésnek nevezünk, ha rendelkezik a P1, ..., P5 tulajdonságok mindegyikével. Egy ilyen ψ s -leképezésre legyen

$$\mathcal{S}_{\psi} = \{(X, Y): X, Y \subseteq \Omega \text{ és } X \subseteq Y\psi\}.$$

5.2. SEGÉDTÉTEL. Tetszőleges ψ s -leképezésre $\mathcal{S}_{\psi}$ egy absztrakt s -család.

Bizonyítás. S1 adódik P2-ből, S2 P3-ból, S3 P1-ből, S4 P2-ből és végül S5 P4-ből.

5.3. LEMMA. Rögzített Ω esetén a $\psi \rightarrow \mathcal{S}_{\psi}$ megfeleltetés egy bijektív leképezést létesít az s -leképezések és az absztrakt s -családok halmaza között. Az inverz leképezés nem más, mint az $\mathcal{S} \mapsto \psi_{\mathcal{S}}$ leképezés.

Bizonyítás. Már láttuk, hogy $\mathcal{S}_{\psi}$ valóban absztrakt s -család és $\psi_{\mathcal{S}}$ valóban s -leképezés. Tetszőleges $X \subseteq \Omega$ -ra

$$X\psi_{\mathcal{S}_{\psi}} = \{a: (\{a\}, X) \in \mathcal{S}_{\psi}\} = \{a: \{a\} \subseteq X\psi\} = X\psi,$$

azaz $\psi = \psi_{\mathcal{S}_{\psi}}$. A másik irány bizonyításához vegyük észre, hogy $X \neq \emptyset$ esetén S1 és S4 következtében a $(\forall a \in X)((\{a\}, Y) \in \mathcal{S})$ feltétel ekvivalens az $(X, Y) \in \mathcal{S}$

feltétellel. Ez $X = \emptyset$ esetén is érvényes, hiszen $|Y| \leq 1$ esetén S1 és S5 következménye, egyébként pedig S3 és S5 folytán $(\emptyset, Y) = (\bigcap_{y \in Y} \{y\}, \bigcup_{y \in Y} \{y\}) \in \mathcal{S}$. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\psi &= \{(X, Y): X \subseteq Y\psi\} = \{(X, Y): X \subseteq \{a: (\{a\}, Y) \in \mathcal{S}\}\} = \\ &= \{(X, Y): \text{minden } a \in X\text{-re } (\{a\}, Y) \in \mathcal{S}\} = \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Egy R relációhoz definiáljuk a ψ_R s -leképezést: legyen $\psi_R = \psi_{\mathcal{S}_R}$.

5.4. KÖVETKEZMÉNY. A 4.2. tétel bizonyításához elegendő megmutatni, hogy minden ψ s -leképezéshez van olyan R reláció, hogy $\psi = \psi_R$.

Valóban, ekkor tetszőleges $\mathcal{S}$ absztrakt s -családra $\psi_\mathcal{S} = \psi_R = \psi_{\mathcal{S}_R}$, ahonnan $\mathcal{S} = \mathcal{S}_R$ következik.

5.5. DEFINÍCIÓ. Legyenek adva az $R_1, \dots, R_n$ ($n \geq 1$) Ω feletti relációk. Ekkor az adott relációk összegét az alábbi módon definiáljuk:

$$\sum_{i=1}^n R_i = \{(i, g): 1 \leq i \leq n, g \in R_i, \text{ és valamennyi } a \in \Omega\text{-ra } (i, g)(a) = (i, g(a))\}.$$

Azaz relációk összegét lényegében úgy képezzük, hogy értékkészleteiket indexeléssel diszjunktá téve vesszük a halmazelméleti uniójukat.

5.6. LEMMA. Legyenek $R_1, \dots, R_n$ ($n \geq 1$) Ω feletti nem üres relációk, A és B pedig Ω részhalmazai. Legyen $R = \sum_{i=1}^n R_i$. Ekkor

(a) $A \xrightarrow[R]{s} B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $i = 1, \dots, n$ -re $A \xrightarrow[R_i]{s} B$ teljesül;

(b) $A \xrightarrow[R]{d} B$ akkor és csak akkor teljesül, ha $i = 1, \dots, n$ -re $A \xrightarrow[R_i]{d} B$ teljesül.

A lemma bizonyítását — mely a definíciók közvetlen alkalmazásából áll — elhagyjuk.

5.7. DEFINÍCIÓ. Tetszőleges $A \subseteq \Omega$ -ra egy kételemű R_A Ω feletti relációt definiálunk: $R_A = \{g_A, h_A\}$, ahol $g_A(x) = 0$ minden $x \in \Omega$ -ra, $x \in A$ -ra $h_A(x) = 1$ és $x \in \Omega \setminus A$ -ra $h_A(x) = 0$.

Célunk az, hogy tetszőleges ψ -re az 5.4. következmény szerinti R relációt kételemű relációk összegeként állítsuk elő.

5.8. SEGÉDTÉTEL. Az R_A -hoz tartozó $\psi_A = \psi_{R_A}$ s -leképezés a következő:

$$X\psi_A = \Omega, \text{ ha } X \subseteq \Omega \text{ és } X \cap A = \emptyset;$$

$$X\psi_A = A, \text{ ha } X \subseteq \Omega \text{ és } X \cap A \neq \emptyset.$$

Bizonyítás: Triviális.

Adott $\psi_i: P(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) függvényekre definiáljuk a

$$\bigwedge_{i=1}^n \psi_i: P(\Omega) \rightarrow P(\Omega) \text{ függvényt: } X \subseteq \Omega\text{-ra legyen } X \bigwedge_{i=1}^n \psi_i = \bigcap_{i=1}^n X\psi_i.$$

5.9. SEGÉDTÉTEL. Legyen R az R_i ($i=1, \dots, n$) relációk összege. Ekkor $\psi_R = \bigwedge_{i=1}^n \psi_{R_i}$.

Bizonyítás. Az 5.6. lemmát fogjuk alkalmazni. $X \subseteq \Omega$ -ra

$$\begin{aligned} X\psi_R &= \{a: (\{a\}, X) \in \mathcal{S}_R\} = \{a: i=1, \dots, n\text{-re } (\{a\}, X) \in \mathcal{S}_{R_i}\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{a: (\{a\}, X) \in \mathcal{S}_{R_i}\} = \bigcap_{i=1}^n X\psi_{R_i} = X \bigwedge_{i=1}^n \psi_{R_i}. \end{aligned}$$

5.10. SEGÉDTÉTEL. Legyen ψ egy s -leképezés, $A, B \subseteq \Omega$, $A \cap B \neq \emptyset$ és $B\psi = A$. Ekkor az R_A relációhoz tartozó $\psi_A = \psi_{R_A}$ leképezésre $\psi \leq \psi_A$ (azaz minden $X \subseteq \Omega$ -ra $X\psi \subseteq X\psi_A$), de $B\psi = B\psi_A$.

Bizonyítás. Ha $X \cap A = \emptyset$, akkor az 5.8. segédtétel szerint $X\psi \subseteq \Omega = X\psi_A$. Tegyük fel, hogy $c \in X \cap A \neq \emptyset$, és tekintsük az $\mathcal{S}_\psi$ s -családot. Az 5.8. segédtétel szerint $X\psi_A = A$, és így $X\psi \subseteq B\psi$ -t kell megmutatnunk. Legyen $x \in X\psi$. Ekkor $(\{x\}, X) \in \mathcal{S}_\psi$, ahonnan S1 szerint $(\{x\}, \{c\}) \in \mathcal{S}_\psi$. Másrészt $c \in A = B\psi$ miatt $(\{c\}, B) \in \mathcal{S}_\psi$. Így S2 szerint $(\{x\}, B) \in \mathcal{S}_\psi$, azaz $x \in B\psi = X\psi_A$. (Az 5.3. lemmát is felhasználtuk.) Tehát $X\psi \subseteq X\psi_A$ teljesül. Végezetül $B\psi_A = A = B\psi$.

5.11. SEGÉDTÉTEL. Legyen ψ egy s -leképezés, és $a \in \Omega$ -ra legyen $\psi_a = \psi_{\{a\}\psi}$ az $R_{\{a\}\psi}$ relációhoz tartozó s -leképezés. Ekkor $\psi = \bigwedge_{a \in \Omega} \psi_a$.

Bizonyítás. P4 szerint $\{a\} \cap \{a\}\psi \neq \emptyset$, így $\{a\}\psi = \{a\}\psi_a$ és $\psi \leq \psi_a$. Ezért a $\psi' = \bigwedge_{a \in \Omega} \psi_a$ jelöléssel élve $\psi \leq \psi'$ és $\{a\}\psi = \{a\}\psi'$. Ha $X = \emptyset$, akkor $X\psi = X\psi'$ P5 miatt teljesül. Ha $X \neq \emptyset$, akkor P1 szerint (amely s -leképezések metszetére is teljesül)

$$X\psi = \left(\bigcup_{a \in X} \{a\} \right) \psi = \bigcap_{a \in X} \{a\} \psi = \bigcap_{a \in X} \{a\} \psi' = \left(\bigcup_{a \in X} \{a\} \right) \psi' = X\psi'.$$

Az 5.4. következmény szerint a 4.2. tétel azonnal adódik az 5.9. és 5.11. segédtételekből, hiszen az $R_{\{a\}\psi}$ ($a \in \Omega$) relációk összegét R -rel jelölve $\psi = \bigwedge_{a \in \Omega} \psi_a = \psi_R$. Ezzel a 4.2. tételt bebizonyítottuk.

6. A 4.3. tétel bizonyítása

A 4.3. tétel és ARMSTRONG tétele (4.1. tétel) között bizonyos dualitás tapasztalható. (Részben a dualitás szó kezdőbetűjéből ered a d -függőség elnevezés, másrészt pedig d a kezdőbetűje az egzisztenciális kvantornak megfelelő diszjunkciónak is.) Ennek köszönhetőleg a 4.3. bizonyításának egy része — körülbelül a 6.7. előtti része — is onnan ered, hogy ARMSTRONG bizonyítását dualizáltuk. A bizonyítás során bizonyos d -családokkal kapcsolatos halmazokra is absztrakt jellemzést adunk.

A definíciókból triviálisan adódik, hogy $\mathcal{D}_R$ egy absztrakt d -család. A fordított irányú állítás igazolásához némi előkészületre lesz szükség.

Vezessük be a $P(\Omega) \times P(\Omega)$ halmazon a következő parciális rendezést:

$(A, B) \leq (C, D)$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq C$ és $B \supseteq D$. Egy $\mathcal{D}$ absztrakt d -családra jelölje $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ a $\mathcal{D}$ maximális elemeinek halmazát. $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ -t a $\mathcal{D}$ m -családjának fogjuk nevezni.

6.1. SEGÉDTÉTEL. Az $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ halmaz rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

(M1) Bármely $A \subseteq \Omega$ -ra létezik $(X, Y) \in \mathcal{M}$, hogy $(A, A) \equiv (X, Y)$;

(M2) Ha $(A, B) \in \mathcal{M}$, $(C, D) \in \mathcal{M}$ és $(A, B) \equiv (C, D)$, akkor $(A, B) = (C, D)$;

(M3) Ha $(A, B) \in \mathcal{M}$, $B \subseteq C$ és $(C, D) \in \mathcal{M}$, akkor $A \subseteq C$;

(M4) Ha $(A, \emptyset) \in \mathcal{M}$, akkor $A = \emptyset$.

Bizonyítás. M1, M2 és M4 teljesülése evidens. Tegyük fel, hogy $(A, B) \in \mathcal{M}$, $B \subseteq C$ és $(C, D) \in \mathcal{M}$. Ekkor $(B, C) \in \mathcal{D}$ következik D1-ből és D3-ból, és így D2 miatt $(A, D) \in \mathcal{D}$. D4-et alkalmazva $(A \cup C, D) \in \mathcal{D}$ adódik. Azonban (C, D) $\mathcal{D}$ -beli maximalitása folytán $A \cup C = C$, és így $A \subseteq C$.

Nevezzük a $P(\Omega) \times P(\Omega)$ egy $\mathcal{M}$ részhalmazát m -családnak, ha rendelkezik az M1, ..., M4 tulajdonságokkal.

6.2. SEGÉDTÉTEL. Legyen $\mathcal{M}$ egy m -család. Ekkor $\mathcal{D}_{\mathcal{M}} = \{(A, B) : A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega \text{ és létezik } (X, Y) \in \mathcal{M}, \text{ hogy } (A, B) \equiv (X, Y)\}$ egy absztrakt d -család.

Bizonyítás. $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ -ben D1, D3 és D5 nyilván teljesül. D2 igazolása érdekében legyen (A, B) és (B, C) $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ -nek két eleme. Ekkor $(A, B) \equiv (A_1, B_1)$ és $(B, C) \equiv (B_2, C_2)$ teljesül valamely $(A_1, B_1) \in \mathcal{M}$ és $(B_2, C_2) \in \mathcal{M}$ esetén. Minthogy $B_1 \subseteq B \subseteq B_2$, M3-ból $A_1 \subseteq B_2$ adódik. Ennélfogva $(A, C) \equiv (B_2, C_2)$, és így $(A, C) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$.

Ami D4-et illeti, tegyük fel, hogy $(A, B) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ és $(C, D) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$. Válasszunk $\mathcal{M}$ -ből olyan (A_1, B_1) és (C_1, D_1) párt, hogy $(A, B) \equiv (A_1, B_1)$ és $(C, D) \equiv (C_1, D_1)$. M1 szerint létezik olyan $(U, V) \in \mathcal{M}$, melyre $(B_1 \cup D_1, B_1 \cup D_1) \equiv (U, V)$. Minthogy $B_1 \subseteq U$ és $D_1 \subseteq U$, M3 alkalmazható, és azt kapjuk, hogy $A_1 \subseteq U$, $C_1 \subseteq U$. Így a kívánt $(A \cup C, B \cup D) \in \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ azonnal adódik az alábbiából:

$$(A \cup C, B \cup D) \equiv (A_1 \cup C_1, B_1 \cup D_1) \equiv (U, V).$$

6.3. LEMMA. Tetszőleges $\mathcal{D}$ absztrakt d -családra $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ egy m -család. Fordítva, tetszőleges $\mathcal{M}$ m -családhoz pontosan egy olyan $\mathcal{D}$ d -család létezik — mégpedig az előző segédtételben definiált $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}$ —, amelyre $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$.

Bizonyítás. D3 szerint $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ egyértelműen meghatározza $\mathcal{D}$ -t. Az állítás többi része az előző két segédtételből adódik.

A most bizonyított lemma szerint absztrakt d -családok helyett m -családokkal is foglalkozhatnánk; elegendő lenne tetszőleges $\mathcal{M}$ m -családhoz egy olyan R relációt találni, amelyre $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{D}_R}$. (Az m -családok definíciója azonban még nem elég egyszerű ahhoz, hogy $\mathcal{M}$ függvényében egy ilyen R relációt közvetlenül megadjunk.) A 4.3. tétel igazolása után a 6.3. lemma a maximális d -függőségek családjának absztrakt jellemzését fogja szolgáltatni.

Most bizonyos félhálókat definiálunk. A rövidség kedvéért a $(P(\Omega); \cap)$ 0—1 részfélhálót (Ω feletti) d -félhálóknak fogjuk nevezni. Azaz egy $\mathcal{K} \subseteq P(\Omega)$ halmaz d -félháló, ha $\emptyset, \Omega \in \mathcal{K}$ és $\mathcal{K}$ tartalmazza bármely két elemének halmazelméleti metszetét. A d -félhálók lényeges szerephez jutnak a bizonyításban. Tetszőleges

$\mathcal{M}$ m -családhoz legyen

$$\mathcal{K}_{\mathcal{M}} = \{A: A \subseteq \Omega \text{ és } (A, B) \in \mathcal{M} \text{ valamely } B \subseteq \Omega\text{-ra}\}.$$

Egy $\mathcal{D}$ absztrakt d -családra pedig $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ legyen $\mathcal{K}_{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}}$.

6.4. SEGÉDTÉTEL. Tetszőleges $\mathcal{D}$ absztrakt d -családra és $\mathcal{M}$ m -családra $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ és $\mathcal{K}_{\mathcal{M}}$ d -félhálót alkot.

Bizonyítás. Elegendő azt ellenőrizni, hogy $\mathcal{K}_{\mathcal{M}}$ d -félháló. $\Omega \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$ adódik M1-ből. M1 és M4 miatt $\emptyset \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$. Tegyük fel, hogy $A, B \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$ és válasszunk olyan C, D, U, V halmazokat, amelyekre $(A, C) \in \mathcal{M}$, $(B, D) \in \mathcal{M}$, $(U, V) \in \mathcal{M}$ és $(A \cap B, A \cap B) \equiv (U, V)$. Minthogy $V \subseteq A$ és $V \subseteq B$, M3-at alkalmazva $U \subseteq A$ és $U \subseteq B$ adódik. Így $A \cap B = U \in \mathcal{K}_{\mathcal{M}}$.

6.5. SEGÉDTÉTEL. Tetszőleges $\mathcal{K}$ d -félhálóra

$$\mathcal{D}_{\mathcal{K}} = \{(A, B) \in P(\Omega) \times P(\Omega): (\forall X \in \mathcal{K})(B \subseteq X \Rightarrow A \subseteq X)\}$$

egy absztrakt d -család.

A bizonyítás közvetlen, elhagyjuk.

6.6. LEMMA. Tetszőleges $\mathcal{D}$ absztrakt d -család esetén $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ egy d -félháló. Fordítva, tetszőleges $\mathcal{K}$ d -félhálóra pontosan egy olyan $\mathcal{D}$ absztrakt d -család létezik — mégpedig az előző segédtételben definiált $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ —, amelyre $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$.

Bizonyítás. Már láttuk, hogy $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ absztrakt d -család és $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ d -félháló. Először megmutatjuk, hogy $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}}$. Tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{K}$, és válasszunk ki az A részhalmazai közül egy olyan B -t, amely minimális az $(A, B) \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ tulajdonságra nézve. $(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}}$ megmutatásához feltesszük, hogy $(A, B) < (C, D) \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}$. Ekkor B választás miatt $A \subset C$, és így $(A, B) < (C, B) \equiv (C, D)$. Így $(C, B) \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}$. Ekkor $B \subseteq A \in \mathcal{K}$ és így $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ definíciója következtében $C \subseteq A$. Ellentmondást kaptunk, tehát $(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}}$ és $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}}$.

A fordított irányú tartalmazás megmutatásához tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}}$. Feltehető, hogy $A \neq \Omega$. Ekkor valamely $B \subseteq \Omega$ -ra (A, B) maximális $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ -ban. Jelöljük $\mathcal{H}$ -val az $\{X: A \subset X \subseteq \Omega\}$ halmazt. Minthogy $X \in \mathcal{H}$ -ra $(X, B) \notin \mathcal{D}_{\mathcal{K}}$, minden $X \in \mathcal{H}$ -hoz létezik olyan $U_X \in \mathcal{K}$, hogy $B \subseteq U_X$, de $X \not\subseteq U_X$. Minthogy $\mathcal{K}$ véges félháló, $H = \bigcap_{X \in \mathcal{H}} U_X \in \mathcal{K}$. Mármost $B \subseteq H$ és $(A, B) \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ következtében $A \subseteq H$. Ha H eleme lenne $\mathcal{H}$ -nak, akkor $H \not\subseteq U_H$ ellentmondana $H = \bigcap_{X \in \mathcal{H}} U_X \subseteq U_H$ -nak. Ezért $A \not\subset H$ és így $A = H \in \mathcal{K}$. Ezzel a $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}}$ egyenlőséget igazoltuk.

Az egyértelműség megmutatásához tegyük fel, hogy $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{D}_1} = \mathcal{K}_{\mathcal{D}_2}$. Jelöljük $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_i}$ -t $\mathcal{M}_i$ -vel, $i = 1, 2$. Tegyük fel, hogy $(A, B) \in \mathcal{D}_1$, és válasszunk olyan $(A_i, B_i) \in \mathcal{M}_i$ párokat ($i = 1, 2$), hogy $(A, B) \equiv (A_1, B_1)$ és $(B, B) \equiv (A_2, B_2)$. Ekkor $A_2 \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{D}_2}$, és így alkalmas C -re $(A_2, C) \in \mathcal{M}_1$. M3-ból $A_1 \subseteq A_2$ adódik, ahonnan $(A, B) \equiv (A_2, B_2)$. Így $(A, B) \in \mathcal{D}_2$ következik D3 szerint. Eképpen megmutattuk, hogy $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$, míg a fordított irányú $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1$ tartalmazás hasonlóan következik.

Egy $\varphi: P(\Omega) \rightarrow P(\Omega)$ leképezést (Ω feletti) *lezárási operátornak* nevezünk, ha tetszőleges $X \subseteq Y \subseteq \Omega$ esetén $X \subseteq X\varphi = (X\varphi)\varphi$ és $X\varphi \subseteq Y\varphi$. Minden egyes $\mathcal{K}$ d -félháléhoz hozzárendelhetünk egy $\varphi_{\mathcal{K}}$ lezárási operátort a következőképpen: $X \subseteq \Omega$ -ra

$$X\varphi_{\mathcal{K}} = \bigcap \{Y: Y \in \mathcal{K} \text{ és } X \subseteq Y\}.$$

Könnyen látható, hogy bármely $X \subseteq \Omega$ esetén $X\varphi_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$. Továbbá $X \in \mathcal{K}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $X = X\varphi_{\mathcal{K}}$.

6.7. LEMMA. Legyen $\mathcal{K}$ egy d -félháló és $X \subseteq \Omega$. Ekkor $X\varphi_{\mathcal{K}} = \{a: (\{a\}, X) \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}\}$.

Bizonyítás. Jelöljük U -val a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalát és legyen $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{K}}$. D1 és D3 következtében $X \subseteq U$ és $(X, U) \in \mathcal{D}$, míg D4-ből $(U, X) \in \mathcal{D}$ adódik. Legyen A az X -nek egy minimális olyan részhalmaza, melyre $(U, A) \in \mathcal{D}$. Azt állítjuk, hogy $(U, A) \in \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy $(U, A) < (V, B) \in \mathcal{D}$. Az A választása miatt $U \subset V$ és $(U, A) < (V, A) \equiv (V, B)$. Ennélfogva

$$\begin{aligned} (V, A) &\in \mathcal{D} \text{ D3 szerint,} \\ (A, X) &\in \mathcal{D} \text{ D1 és D3 miatt, és} \\ (V, X) &\in \mathcal{D} \text{ D2 következtében.} \end{aligned}$$

Mármint D3 miatt valamennyi $v \in V$ esetén $(\{v\}, X) \in \mathcal{D}$. Ezért $V \subseteq U$, indirekt feltevésünkkel ellentétben. Azaz $(U, A) \in \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$, és így $U \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$. A 6.6. lemmát alkalmazva kapjuk, hogy $U \in \mathcal{K}$. S minthogy $X \subseteq U$ is teljesül, $X\varphi_{\mathcal{K}} \subseteq U$.

Annak igazolása maradt hátra, hogy $X \subseteq C \in \mathcal{K}$ esetén $U \subseteq C$. Ennek érdekében válasszunk $P(\Omega)$ -ből egy olyan D halmazt, melyre (C, D) maximális $\mathcal{D}$ -ben. Minthogy (U, A) szintén maximális $\mathcal{D}$ -ben és $A \subseteq X \subseteq C$, $U \subseteq C$ azonnal adódik M3-ból.

6.8. KÖVETKEZMÉNY. Legyen $\mathcal{K}$ egy d -félháló és $X \subseteq \Omega$. Ekkor X akkor és csak akkor eleme $\mathcal{K}$ -nak, ha $(\{a\}, X) \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ csakis $a \in X$ esetén teljesül.

A $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ Ω feletti d -félhálók összegén a legszűkebb olyan $\mathcal{K}$ Ω -feletti d -félhálót értjük, amelynek $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ részhalmaza. Könnyen igazolható az alábbi

6.9. SEGÉDTÉTEL. Legyen $\mathcal{K} = \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_i$ a $\mathcal{K}_i$ ($i=1, \dots, n$) d -félhálók összege. Ekkor $\mathcal{K} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n A_i : i=1, \dots, n\text{-re } A_i \in \mathcal{K}_i \right\}$.

Valamennyi R relációhoz rendeljük hozzá a $\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_{\mathcal{D}_R}$ d -félhálót. Ekkor érvényes az alábbi

6.10. LEMMA. Legyen R az $R_1, \dots, R_n$ ($n \geq 1$) nem üres relációk összege. Ekkor $\mathcal{K}_R = \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_{R_i}$.

Bizonyítás. A $\mathcal{D}_R, \mathcal{D}_{R_i}, \mathcal{K}_R, \mathcal{K}_{R_i}$ helyett rendre a $\mathcal{D}, \mathcal{D}_i, \mathcal{K}, \mathcal{K}_i$ jelöléseket bevezetve tegyük fel, hogy $A \in \mathcal{K}$, és számoljunk az 5.6. és 6.7. lemma, valamint a 6.8. következmény felhasználásával:

$$\begin{aligned} A = A\varphi_{\mathcal{K}} &= \{a: (\{a\}, A) \in \mathcal{D}\} = \{a: i=1, \dots, n\text{-re } (\{a\}, A) \in \mathcal{D}_i\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^n \{a: (\{a\}, A) \in \mathcal{D}_i\} = \bigcap_{i=1}^n A\varphi_{\mathcal{K}_i}. \end{aligned}$$

Innen a 6.9. segédétel segítségével $A \in \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_i$ adódik. Ezzel beláttuk, hogy $\mathcal{K} \subseteq \sum_{i=1}^n \mathcal{K}_i$.

Most azt tegyük fel, hogy valamely i -re ($1 \leq i \leq n$) $A \in \mathcal{K}_i$, de $A \notin \mathcal{K}$. Ekkor van olyan $a \in \Omega$, hogy $a \in A \cap \mathcal{K} \setminus A$. Ekkor a 6.7. lemma következtében $(\{a\}, A) \in \mathcal{D}$. Az 5.6. lemma alkalmazásával $(\{a\}, A) \in \mathcal{D}_i$ adódik, ahonnan viszont $a \in A \cap \mathcal{K}_i = A$ következik. Ez pedig $a \in A \cap \mathcal{K} \setminus A$ miatt lehetetlen. Ennélfogva $A \in \mathcal{K}$, és így $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}$. Végül $\mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}$ ($i=1, \dots, n$) következtében $\sum_{i=1}^n \mathcal{K}_i \subseteq \mathcal{K}$.

6.11. SEGÉDTÉTEL. Legyen R_A ($A \subseteq \Omega$) az 5.7. definícióban megadott kételemű reláció. Ekkor $\mathcal{K}_{R_A} = \{\emptyset, A, \Omega\}$.

A bizonyítást, amely a 6.8. következmény alapján igen egyszerű, az olvasóra hagyjuk.

Az előkészítő lépések után a 4.3. tétel bizonyítása a következő. Legyen $\mathcal{D}$ egy absztrakt d -család, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ pedig a $\mathcal{D}$ -nek megfelelő d -félháló. Legyen továbbá $R = \sum_{A \in \mathcal{K}} R_A$. Minthogy $\mathcal{K} = \sum_{A \in \mathcal{K}} \{\emptyset, A, \Omega\}$, a 6.10. lemma és a 6.11. segédétel szerint $\mathcal{K} = \mathcal{K}_R$. Végül a 6.6. lemmát alkalmazva kapjuk a kívánt $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R$ egyenlőséget. A 4.3. tételt bebizonyítottuk.

Köszönetnyilvánítás. A szerző őszinte hálával tartozik CSÁKÁNY BÉLA és GÉCSE FERENC professzoroknak, amiért figyelmét a relációs adatbázis modellre irányították. Szíves tanácsaikért ugyancsak köszönet illeti DEMETROVICS JÁNOST és MAKAY ÁRPÁDOT.

IRODALOM

- [1] ARMSTRONG, W. W., "Dependency structures of data base relationships", *Information Processing* 74, North Holland Publ. Comp. 1974, 580–583.
- [2] CODD, E. F., "A relational model of data for large shared data banks", *Communications of the ACM*, 13 (1970) 377–387.
- [3] CODD, E. F., "Further normalization of the data base relational model", Courant Inst. Comp. Sci. Symp. 6, *Data Base Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1971, 33–64.
- [4] CZÉDLI, G., "d-dependency structures in the relational model of data", *Acta Cybernetica* 5 (1980) 49–57.
- [5] DEMETROVICS, J., "Relációs adatbázis modell", *MTA SZTAKI Közlemények* 20/1978.

(Beérkezett: 1979. szeptember 30.)

CZÉDLI GÁBOR
JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI INTÉZETE
6720 SZEGED, ARADI VÉRTANÚK TERE 1.

DEPENDENCIES IN THE RELATIONAL MODEL OF DATA

G. CZÉDLI

The relational model of data is one of the most promising tools for handling data. In this model the user's data are represented by relationships. A relationship can be visualized by a matrix whose columns and rows correspond to attributes and records, respectively. It was E. F. CODD who introduced the concept of functional dependency and showed its importance in the relational model of data. This concept was characterized by W. W. ARMSTRONG in an abstract way. In the present paper the author introduces three other concepts of dependencies. Abstract characterizations for two of the new concepts are also given.

Alkalmazott Matematikai Lapok 6 (1980)