

Fogalomhálók*

CZÉDLI GÁBOR ÉS SCHMIDT TAMÁS

1. Bevezetés Az ismeretelmélet (más szóval episztemológia) több mint kétezer éve foglalkozik azzal, hogy mi a tudás, hogyan szerezhető meg, hogyan ábrázolható és adható tovább. Az adatok pusztá birtoklása még nem azonos a tudással, így ez a problémakör különösen érdekes az adatok, információk korábban nem tapasztalt bőségét nyújtó korunkban. Az adatok ügyes ábrázolása, rendszerbe foglalása lényeges kérdés. Jól példázza ezt a kémiai elemek periódusos rendszere, melynek segítségével D. I. Mengyelejev (1834–1907) számos akkoriban még ismeretlen kémiai elem létezését és tulajdonságait jósolta meg. Cikkünkben egy olyan matematikai modell ismertetésére vállalkozunk, melynek használata viszonylag kevés előzetes ismeretet igényel, és szinte minden tudományágban alkalmazható az ismeretek rendszerezésére, sőt újabb ismeretek feltárására is.

A fogalomhálók és az ezekre épülő foglomanalízis kialakulását *Rudolf Wille* darmstadti algebrista [3] cikke indította el az 1980-as évek elején. Azóta több száz cikk jelent meg ebben a témában, főleg Wille és a körülötte Darmstadtban kialakult fogalomhálós iskola munkájának köszönhetően: ezek közül további forrásmunkaként [1]-et és [3]-mat említjük. Az ismeretelméletben központi helyet foglal el a *fogalom*, melyet terjedelme és tartalma együttesen határoz meg. Terjedelmen a fogalomba tartozó

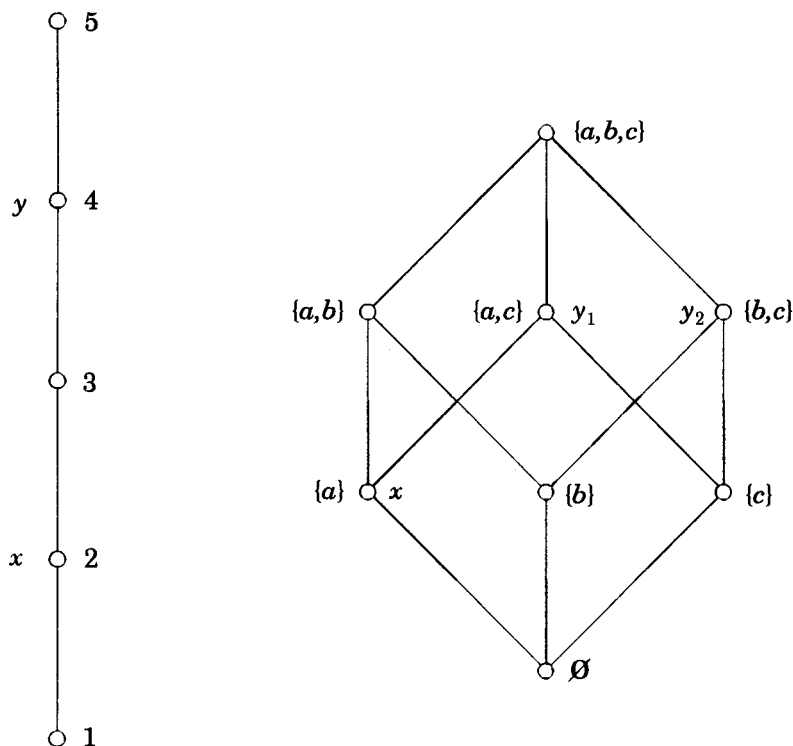
* A szerzők ezen munkája az Országos Tudományos Kutatási Alap OTKA T7442 sz. támogatásával készült.

egyedek. objektumok összességét, tartalomra pedig a fogalomra jellemző tulajdonságok, attribútumok összességét értjük. Tekintsük például azt a fogalmat, melyet nyelvünk a „folyadék” szóval jelöl meg. Ekkor a tej, víz, málnaszörp, benzin, stb. a folyadék terjedelméhez tartozik. A tartalomhoz tartoznak olyan tulajdonságok mint pl. „a padlón elterül”, „lyukas edényből távozik”, stb. A kisgyermek a „folyadék” szó jelentését úgy sajátítja el, hogy egyre jobban megismeri a fogalom terjedelmét is és tartalmát is. Bizonyára hasonló folyamat ment végbe a nyelv és az emberi gondolkodás kialakulásakor.

A cikk további két fejezetében részletesen megismerkedünk a fogalomanalízishez szükséges matematikai apparátussal. A nem-matematikus felhasználónak viszonylag kevés előismeretre van szüksége, ezt adjuk meg a 2. fejezetben bizonyítások nélkül, inkább szemléletességre s nem pedig túlzott egzaktyságra törekedve. A 3. fejezetben pedig matematikai alapossággal tárgyaljuk a fogalomanalízis modelljét, s a bizonyításokat sem kerüljük el.

2. A foglomanalízis szemléletes tárgyalása *Hálón* bizonyos tulajdonságokkal rendelkező irányított gráfot (a hálóelméletben elterjedt terminológiával: diagramot) fogunk érteni. A diagram síkra rajzolt szögpontokból és bizonyos szögpontokat összekötő egyenes szakaszokból áll. Az apró körökkel jelölt szögpontok a háló elemeit reprezentálják. Az egyenes szakaszokat a diagram éleinek nevezzük; nem engedünk meg vízszintes helyzetű élet. Az éleknek az a szerepe, hogy segítségükkel rendezést értelmezzünk a háló elemei között, azaz hogy meg tudjuk mondani, hogy az egyik elem mikor kisebb a másiknál.

DEFINÍCIÓ. *Akkor mondjuk, hogy a diagram x szögpontja által reprezentált elem kisebb-egyenlő mint az y szögpont által reprezentált elem, jelben $x \leq y$, ha az x szögpontból elindulva, éleken át mindig csak felfelé haladva eljuthatunk az y szögpontba. (Megengedett az is, hogy semmit se haladjunk, azaz $x = y$ esetén is $x \leq y$.)*



1-2. ábra

Az 1. ábra az iskolai osztályzatok diagramját mutatja; a kettes kisebb-egyenlő mint a négyes, mert az x szögpontról felfelé haladva két lépésben eljuthatunk az y szögpontra. Itt a „ $\leq$ ” diagram által definiált jelentése megegyezik a hétköznapi jelentésével. A második ábrán a diagram szögpontjai az $\{a, b, c\}$ halmaz részhalmazait reprezentálják. Ha x és y részhalmaza $\{a, b, c\}$ -nek, akkor $x \leq y$ (a diagram szerint) pontosan akkor teljesül, ha $x \subseteq y$. Most a „ $\leq$ ” jelentése nem a hétköznapival egyezik meg (olyan nincs is), hanem azt jelenti hogy „részhalmaza”. Megfigyelhető még az ábrán, hogy $x \not\leq y_2$ és $y_2 \not\leq x$, tehát nem követeljük meg, hogy tetszőleges két elem közül valamelyik kisebb-egyenlő legyen a másiknál.

DEFINÍCIÓ. Legyen a és b egy-egy, a diagram által reprezentált elem. Azon c elemeket, melyekre $a \leq c$ és $b \leq c$ egyidejűleg teljesül, az a, b elemek felső korlátjainak nevezzük. Ha egy d elem olyan felső korlátja az a, b elemeknek amely az a, b bármelyik c felső korlátjánál kisebb-egyenlő, akkor d -t az a, b elemek legkisebb felső korlátjának, más szóval egyesítésének nevezzük. Analóg módon definiáljuk a legnagyobb alsó korlátot, más szóval metszetet is: egy c elemet az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek (egyik) alsó korlátjának nevezzük, ha $c \leq a_1, c \leq a_2, \dots, c \leq a_n$. Ha d olyan alsó korlátja az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemeknek hogy ugyenezen elemek bármely c alsó korlátjára $c \leq d$, akkor d -t az $a_1, a_2, \dots, a_n$ elemek metszetének nevezzük. Az a, b elemek egyesítését $a \vee b$, metszetét pedig $a \wedge b$ jelöli.

Például az 1. ábrán $x \wedge y = x, x \vee y = y$. A 2. ábrán $\{a\} \vee \{c\} = \{a, c\}$ és $\{a\} \wedge \{c\} = \emptyset$; innen ered az egyesítés és metszet elnevezés. A 3. ábrán az a, b elemeknek nincs egyesítése, hiszen felső korlátjaik a p, q, r, s, t elemek, és $p \not\leq s, s \not\leq p, q \not\leq p, r \not\leq p, t \not\leq p$ szerint közülük egyik sem „legkisebb”. Tehát két elemnek nem mindig létezik metszete illetve egyesítése. Ha viszont két elemnek van metszete illetve egyesítése, akkor az egyértelműen meghatározott.

DEFINÍCIÓ. Egy diagram hálót határoz meg, ha bármely két elemnek létezik egyesítése és metszete.

Például az első két diagram hálót ábrázol, de a harmadik nem.

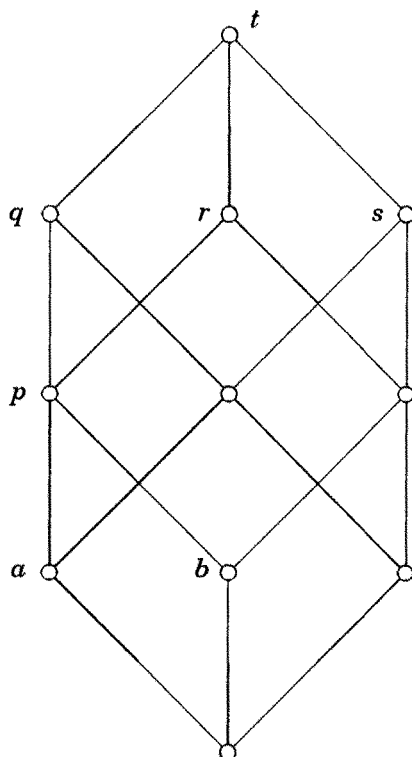
Ha fogalmakkal akarunk dolgozni, akkor nehéz lenne a terjedelem illetve a tartalom valamennyi elemét számba venni. Ezért rögzítsük objektumoknak egy G , attribútumoknak egy M halmazát, s továbbá egy I relációt ezen két halmaz között. Azaz minden $g \in G$ és $m \in M$ esetén $g I m$ vagy nem $g I m$. A $g I m$ jelentése az, hogy a g objektum rendelkezik az m attribútummal. Nevezzük a most lerögzített G, M és I együttesét, azaz a (G, M, I) rendezett hármast kontextusnak.

DEFINÍCIÓ. Legyen (G, M, I) egy rögzített kontextus. $A \subseteq G$ -re, illetve $B \subseteq M$ -re legyen

$$A' = \{m \in M: \text{minden } g \in A \text{—ra } g I m\},$$

$$B' = \{g \in G: \text{minden } m \in B \text{—re } g I m\}.$$

Ha $A' = B$ és $A = B'$, akkor az (A, B) párt fogalomnak nevezzük.



3. ábra

A fenti definíció szerint A' mindazon attribútumok halmaza, melyekkel A mindegyik eleme rendelkezik. Ha (A, B) fogalom, pl. a folyadék fogalma egy korábbi példánkban, akkor elég természetes az, hogy ezen fogalom tartalma éppen a tej, víz, málnaszörp, benzin, stb. közös tulajdonságaiból áll. Tehát a definícióban szereplő $A' = B$ feltétel egyáltalán nem meglepő. Másrészt az is természetes, hogy a „padlón elterül”, „lyukas edényből távozik”, stb. tulajdonságok mindegyikével rendelkező objektumok alkotják a fogalom terjedelmét; innen ered az $A = B'$ feltétel a definícióban.

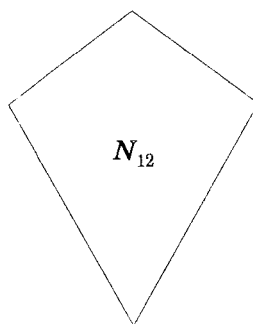
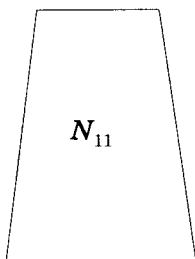
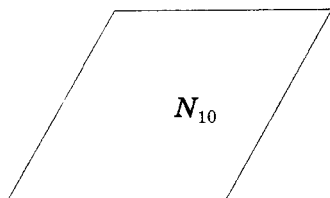
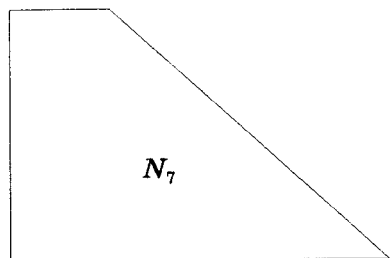
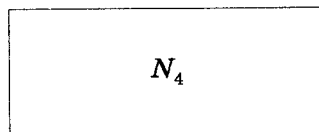
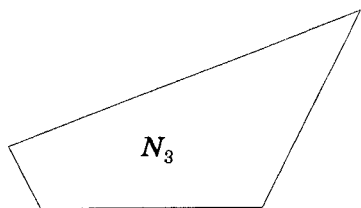
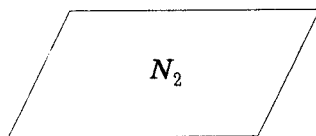
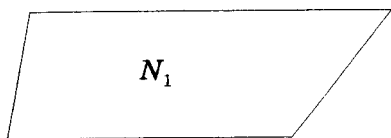
DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathcal{L}(G, M, I)$ a (G, M, I) kontextushoz tartozó fogalmak halmaza. Azt a hálót, melynek elemei éppen az $\mathcal{L}(G, M, I)$ elemei, $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ pedig azt jelenti hogy $A_1 \subseteq A_2$, a (G, M, I) kontextushoz tartozó fogalomhálónak nevezzük.

A (G, M, I) kontextusbeli G és M halmazok többnyire végesek lesznek. Egyelőre fogadjuk el bizonyítás nélkül, hogy van olyan háló (tehát olyan hálót meghatározó diagram), amelyre a fenti definíció feltételei teljesülnek. Ha $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$, akkor az (A_2, B_2) fogalmat bővebbnek mondjuk, mint az (A_1, B_1) fogalmat. Például a „folyadék” fogalma bővebb mint az „innivaló” fogalma. Várható, hogy $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ azzal is ekvivalens hogy $B_2 \subseteq B_1$; ezt majd igazolni is fogjuk.

Egy (G, M, I) kontextust például úgy adhatunk meg, hogy egy kétbemenetű táblázat sorait G , oszlopait pedig M elemeivel indexeljük. A g -vel indexelt sor és az m -mel indexelt oszlop metszéspontjába pontosan akkor írunk I -t, ha $g I m$. Tekintsük például az egyik jelenleg használatos hetedikos matematika tankönyv [2] 292. oldalán található VII/634. feladatban szereplő attribútumokat és objektumokat. (A rövidség kedvéért négy objektumtól eltekintünk; erre később adunk magyarázatot.) Az objektumok éppen a 4. ábrán található négyszögek, az attribútumok pedig az alábbiak

tszim : tengelyesen szimmetrikus
 kszim : középpontosan szimmetrikus
 vkeol : van két egyenlő oldala
 pkole : pontosan két oldala egyenlő
 vpold : van párhuzamos oldalpárja
 szolp : szemközti oldalai párhuzamosak
 nolde : a négy oldala egyenlő
 kkole : két-két oldala egyenlő
 szeoe : szemközti oldalai egyenlők
 kkszo : két-két szomszédos oldala egyenlő.

A tankönyvbeli feladat éppen az I reláció meghatározását, azaz az alábbi táblázat kitöltését kéri:



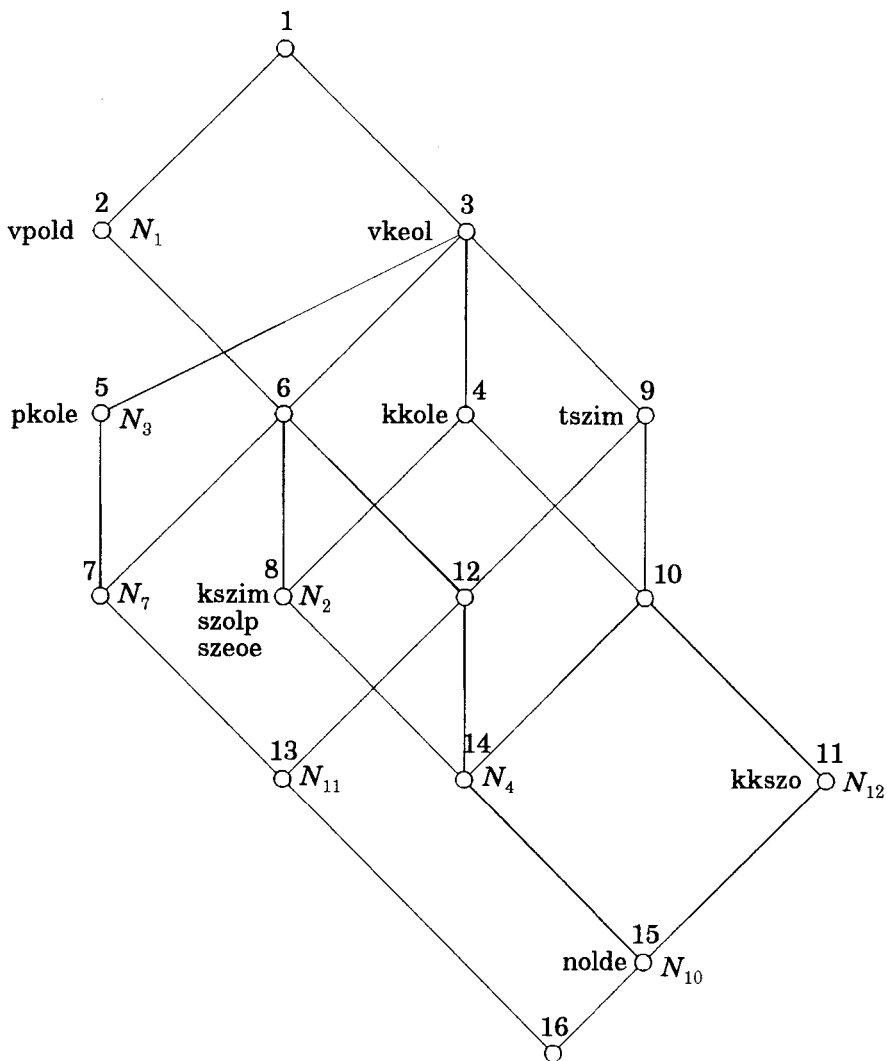
4. ábra

	tszim	kszim	vkeol	pkole	vpold	szolp	nolde	kkole	szeoe	kkszo
N_1					I					
N_2		I	I		I	I		I	I	
N_3			I	I						
N_4	I	I	I		I	I		I	I	
N_7			I	I	I					
N_{10}	I	I	I		I	I	I	I	I	I
N_{11}	I		I	I	I					
N_{12}	I		I					I		I

Az ezen kontextushoz tartozó fogalomháló az 5. ábrán látható. A diagram nagyrészt egy *P. Burmeister* által Darmstadtban kifejlesztett számítógépes program segítségével készült (v.ö. [1]). A könnyebb hivatkozás kedvéért a szögpontokat 1-től 16-ig sorszámokkal láttuk el. Pl. az 1 sorszámú szögpont a legbővebb fogalmat reprezentálja, melynek terjedelme az összes tekintett négyszöget tartalmazza, tartalma pedig az üres halmaz. Ezt a fogalmat nevezhetjük a „négyszög” fogalmának. Vegyük észre, hogy a tizenhat fogalom közül nem mindegyik nevezhető el egyetlen szóval, bizonyosakra talán nem is gondoltunk eddig. Ilymódon a fogalomháló elkészítése során új fogalmakat is felfedezhetünk — az más kérdés hogy ezek közül melyek lesznek hasznosak.

A fogalomháló azok számára is igen hasznos, akik nem ismerkednek meg a „fogalom” fogalmával. Ugyanis nemcsak a példánkban szereplő fogalomháló esetén hanem általában is az objektumokat és az attribútumokat hozzárendelhetjük a háló elemeihez (azaz a diagram egyes szögpontjaihoz) úgy, hogy az alábbiak teljesüljenek (példánkban a hozzárendelést szintén az említett program végezte):

- (A) Tetszőleges g objektumra és m attribútumra $g I m$ pontosan akkor teljesül, ha a g objektumhoz rendelt hálóelem kisebb-egyenlő mint az m attribútumhoz rendelt hálóelem.
- (B) Tetszőleges $m_1, m_2, \dots, m_k$ és m attribútumok esetén az $m_1, m_2, \dots, m_k$ attribútumok együttes teljesüléséből pontosan akkor következik az m attribútum teljesülése, ha az $m_1, m_2, \dots, m_k$ attribútumokhoz rendelt hálóelemek metszete kisebb-egyenlő mint az m -hez rendelt hálóelem.



5. ábra

Példánkban a hozzárendelés mindkét tulajdonsága jól megfigyelhető.
(Az egyszerűbb jelölés kedvéért most ideiglenesen $\mathcal{L}(G, M, I)$ egyes ele-

meit a hozzájuk rendelt objektummal vagy attribútummal jelöljük.) Pl. $N_4 \leq \text{vkeol}$ annak megfelelően, hogy N_4 I vkeol, $N_7 \not\leq \text{tszim}$ annak megfelelően, hogy az N_7 négyszög tengelyesen nem szimmetrikus, stb. Azaz az $\mathcal{L}(G, M, I)$ hálóból könnyen rekonstruálható a (G, M, I) kontextus. Mondhatjuk tehát, hogy a kontextust megadó kétbementű táblázatot (ami végül is tetszőleges adatokat tartalmazhat és nem feltétlenül szükséges kontextusnak tekinteni) egy tetszetős új módon sikerült ábrázolnunk. A (B) pont szerint ennek a fogalomháló ábrázolásmódnak a kétbemenetű táblázattal szemben komoly előnye, hogy igen könnyen leolvasható róla az attribútumokra vonatkozó számos összefüggés. Lássunk erre néhány példát. $\text{kpszim} \leq \text{szeoe}$ azt jelenti, hogy a középpontos szimmetriából következik hogy a szemközti oldalak egyenlők (itt kpszim egytényezős metszetnek fogható fel!), ez mindenki számára ismerős. Mivel $\text{pkole} \wedge \text{szolp}$ a háló 16-tal jelölt eleme, $\text{pkole} \wedge \text{szolp} \leq \text{tszim}$, s így adódik, hogy ha egy négyszögnek pontosan két oldala egyenlő és szemközti oldalai párhuzamosak, akkor ez a négyszög tengelyesen szimmetrikus. (Könnyű meggondolni, hogy ez a „tétel” azért igaz, mert nincs olyan négyszög, melynek pontosan két oldala egyenlő és szemközti oldalai párhuzamosak.) Érdekesebb geometriai tételt ad a $\text{tszim} \wedge \text{pkole} \leq \text{vpold}$ formula, amely szerint ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus és pontosan két oldala egyenlő, akkor van párhuzamos oldalpárja is. Ezt az egyébként igen könnyen igazolható „tételt” korábban a szerzők sem ismerték, ez a jelen cikk írását megelőző foglomanalízis terméke.

A figyelmes olvasó joggal vélhette az előző sorok olvasásakor, hogy a mindössze nyolc négyszög felhasználásával készült fogalomháló alapján korai még *tetszőleges* négyszögre tételeket megfogalmaznunk, hiszen „tételeink” esetleg csak a tekintett nyolc négyszögre érvényesek. Ezen joggal felmerülő kétely jó alkalmat ad, hogy néhány szót szóljunk a már korábban említett számítógépes program működéséről. A programba elég először csak a táblázat első sorát betáplálni, azaz a kontextusnak kezdetben csak egyetlen objektuma van: N_1 . A program elkezd keresni a kontextusban érvényes (B)-ben említett alakú összefüggéseket az attribútumok között. Amint talál egyet, megkérdezi a felhasználót, hogy igaz-e a kérdéses összefüggés általában (azaz nemcsak a kontextusban szereplő négyszögekre). Esetünkben megkérdezi pl. hogy vajon minden négyszögnek van-e párhuzamos oldalpárja

(vpold), hiszen az egyetlen N_1 négyszög alapján ezt joggal hiheti. Erre persze az a válasz hogy nem. Ekkor a program arra kéri a felhasználót, hogy nevezzen meg egy ellenpéldát (nevezzük meg pl. N_3 -at), s bővítsük vele a kontextust leíró táblázatot (azaz gépeljük be az N_3 -nak megfelelő sort). A bővített kontextusban a program újra elkezd keresni az érvényes összefüggéseket. Most már nem véli úgy a táblázat alapján hogy minden négyszögre vpold teljesül, ezért mást kérdez, mondjuk azt, hogy minden kpszim négyszögre teljesül-e szolp. Erre — persze geometriai tudásunkra támaszkodva, ami a programtól és a fogalomanalízistől független tényező — azt válaszoljuk hogy igen. Ebben az esetben a program nem bővíti a táblázatot, hanem újabb kérdést tesz fel, mondjuk azt, hogy igaz-e, hogy ha egy négyszögre kpszim és szeoe, akkor kkszo? Erre nemleges választ adunk, s például az N_2 -vel bővítjük a táblázatot.

És ez a továbbiakban is így folytatódik. Igenlő válaszainkat a program megjegyzi (s nem fogja újra megkérdezni), nemleges válaszaink esetén pedig a „nem”-et alátámasztó objektummal (azaz ellenpéldával) kell bővítenünk a táblázatot. Előbb-utóbb a program nem tud további kérdést feltenni, mert az igenlő válaszokat érdemlő kérdéseket már korábban megkérdezte, a nemleges válaszokat pedig az immár elég bő táblázatból önállóan állapítja meg. Ekkor a program elkészíti a fogalomhálót, hozzárendeli a háló elemeihez az attribútumokat és az objektumokat, s működését ezzel befejezi. Mindehhez még annyit kell hozzáfűznünk, hogy program igyekszik minél kevesebbet kérdezni, s ezt az alapján teheti, hogy bizonyos válaszokra adott feleleteink számos újabb kérdés feltevését teszik szükségtelessé. Ha pl. már kinyilvánítottuk hogy kszim esetén szolp, továbbá hogy szolp esetén szeoe, akkor a program nem fogja megkérdezni, hogy kszim és tszim együttes teljesüléséből következik-e szeoe, hanem tudni fogja hogy „igen”.

A fentiekből kitűnik, hogy végső soron az adott témakörben (jelen esetben az általános iskolai geometriában) jártas felhasználó dönti el, hogy az attribútumok között teljesül-e egy adott összefüggés, vagy sem. A program által támogatott fogalomanalízis azonban mégis nagy segítség, hiszen így a lehető legkevesebb kérdésre kell csak válaszolnunk, s végeredményként mégis előttünk lesz az összes olyan alakú összefüggés, amelyet (B)-ben említettünk. S ráadásul ezen összefüggéseket igen áttekinthető formában kapjuk.

Egyúttal az is kiderült, hogy a tekintett kontextusban miért nem szerepeltettük a az említett VII/634. feladatban szereplő összes négyszöget: ha több négyszöget tekintettünk volna, akkor se kaptunk volna „lényegesen más” fogalomhálót.

Az ismertetett módszer természetesen nem csak négyszögek tanulmányozására alkalmas. Hogy ezt érzékeltessük, megemlítünk néhányat azon nagyszámú kontextus közül, melyet Wille és munkatársai a fogelmanalízis módszerével vizsgáltak:

Naprendszer. Objektumok a bolygók, az attribútumok pedig: kicsi, közepes, nagy, Naphoz közeli, van-e holdja, stb.

Vértípusok. Objektumok az emberi vértípusok (pl. Rh-pozitív, stb.), az attribútumok pedig az egyes teszt-szérumokra való pozitív reakciókészséget jelentik.

Meteorológia. Objektumok a hét napjai, attribútumok pedig az időjárásra vonatkozó jelzők (pl. borult, esős, stb.)

Zene. Néhány zenei stílusirányzat (pl. ragtime, Dixiland) alkotja az objektumok halmazát, s az attribútumok között ilyenek szerepelnek hogy melankólikus, tánczene, szabályos ritmusú, stb.

Svájci bicskák. Objektumok a svájci hadseregben rendszerezett tiszti zsebkések, s az attribútumok között szerepel: van-e rajta olló, van-e rajta dugóhúzó, stb.

Társasági élet. Objektumok egy adott kisvárosi lap társasági rovatában szereplő közismert hölgyek, az attribútumok pedig bizonyos társadalmi eseményeken, partikon való részvételt jelentenek.

Pszichológia. Objektumok: a vizsgálati alany és szűkebb környezetének, családjának tagjai. Az attribútumok a pszichológus által előre adott emberi tulajdonságok (pl. szorgalmas, önző, stb). A páciens dolga a kontextus-táblázat kitöltése.

A sort még sokáig folytathatnánk, de ízelítőnek talán ennyi is elég.

3. A fogelmanalízis matematikája. Legyen p egy nemüres A halmazon értelmezett reláció. Azaz az A tetszőleges a, b elemeire vagy $a p b$

vagy nem $a \rho b$. Az (A, ρ) rendezett pár egy relációrendszert alkot. Ezt a relációrendszert *részbenrendezett halmaznak* nevezzük, ha a ρ reláció rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

ρ reflexív, azaz minden $a \in A$ -ra $a \rho a$;

ρ antiszimmetrikus, azaz minden $a, b \in A$ -ra ha $a \rho b$ és $b \rho a$, akkor $a = b$;

ρ tranzitív, azaz minden $a, b, c \in A$ -ra ha $a \rho b$ és $b \rho c$, akkor $a \rho c$.

A tradíciót követve részbenrendezett halmaz esetén a relációt többnyire nem ρ -val, hanem „ $\leq$ ”-vel jelöljük (még akkor is, ha nem a kisebb-egyenlő szokásos jelentésére gondolunk, illetve ha az A halmazon a szokásos kisebb-egyenlőnek nincs is értelme). Egyes esetekben más megszokott jelölést is szokás ρ helyett alkalmazni, pl. ha A egy adott halmaz részhalmazából áll és ρ történetesen a „részhalmaza” relációt jelenti, akkor ρ helyett a „ $\subseteq$ ” jelölést használjuk. Szemben a kisebb-egyenlő szokásos jelentésével, azt nem követeljük meg, hogy az A alaphalmaz bármely a, b elemére $a \leq b$ vagy $b \leq a$; de ha ez a tulajdonság tetszőleges a, b elemekre fennáll, akkor az $(A, \leq)$ részbenrendezett halmazt *láncnak* nevezzük. Ugyancsak láncnak (pontosabban szólva A láncának) nevezzük az A részbenrendezett halmaz olyan részhalmazát, melynek bármely két eleme közül az egyik kisebb-egyenlő a másiknál (azaz bármely két eleme összehasonlítható).

Legyen $(A, \leq)$ egy részbenrendezett halmaz. Defináljunk egy $<$ jellel jelölt „kisebb” relációt az A halmazon úgy, hogy $a < b \stackrel{\text{def}}{\iff} (a \leq b \text{ és } a \neq b)$. Könnyű látni, hogy a $<$ reláció is tranzitív. Valóban, ha $a < b$ és $b < c$, akkor egyfelől $a \leq c$ a „ $\leq$ ” tranzitivitása miatt, továbbá $a \neq c$ mert ellenkező esetben $b \leq c \leq a$ -ból $b \leq a$, majd az antiszimmetria miatt $a = b$ adódna, ami ellentmondás. Ha $a < b$ és nincs olyan $c \in A$ amelyre $a < c$ és $c < b$, akkor azt mondjuk hogy b követi az a elemet, s ezt a tényt $a \prec b$ fogja jelölni.

1. ÁLLÍTÁS. Legyen $(A, \leq)$ egy véges részbenrendezett halmaz. Az A tetszőleges a, b elemeire $a \leq b$ pontosan akkor teljesül, ha létezik egy n nemnegatív egész szám és léteznek $c_0 = a, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n = b$ elemek az A -ban úgy, hogy $c_0 \prec c_1, c_1 \prec c_2, \dots, c_{n-1} \prec c_n$.

Bizonyítás. Ha léteznek a mondott $c_0, c_1, \dots, c_n$ elemek, akkor a követési reláció definíciója miatt $a = c_0 < c_1, c_1 < c_2, \dots, c_{n-1} < c_n$ is teljesül. A tranzitivitás miatt $c_0 < c_2$, majd a tranzitivitást ismételten alkalmazva rendre $c_0 < c_3, c_0 < c_4, \dots, c_0 < c_n$ adódik, s innen $a \leq b$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $a \leq b$. Ha $a = b$, akkor n -et 0-nak választhatjuk, s nincs mit bizonyítani. Ellenkező esetben az A halmaznak van olyan C' lánc, pl. az $\{a, b\}$, amely egyrészt tartalmazza az a, b elemeket, másrészt a C' minden x elemére $a \leq x$ és $x \leq b$. Az A végeessége miatt az ilyen C' láncok közül tekinthetünk egy maximális elemszámút, jelöljük ezt C -vel. Vegyük észre, hogy minden véges láncban van egy és csakis egy legkisebb elem, azaz egy olyan elem, amely a lánc minden eleménél kisebb-egyenlő. Ha ugyanis a láncnak nincs legkisebb eleme, akkor vegyünk ki a láncból egy y_1 elemet. Ez nem legkisebb elem, így választhatunk a láncból egy olyan y_2 elemet, melyre $y_1 \not\leq y_2$. De a lánc bármely két eleme összehasonlítható, így $y_2 < y_1$. De y_2 sem legkisebb eleme a láncnak, tehát van olyan y_3 elem a láncban, melyre $y_3 < y_2$. És így tovább, minden $i > 1$ -re lesz olyan y_i eleme a láncnak, hogy $y_i < y_{i-1}$. Minthogy a lánc véges, valamely $i < j$ indexekre $y_i = y_j$. Nyilván $i \neq j - 1$. Ekkor azonban a tranzitivitást $(j - i - 2)$ alkalommal felhasználva $y_{j-1} < y_i = y_j$, másrészt $y_j < y_{j-1}$, így a „ $\leq$ ” antiszimmetriája miatt $y_j = y_{j-1}$, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy minden láncnak van legkisebb eleme. Ha u_1 és u_2 is legkisebb eleme a láncnak, akkor $u_1 \leq u_2$ és $u_2 \leq u_1$, így az antiszimmetria miatt $u_1 = u_2$. Tehát a láncnak csak egy legkisebb eleme lehet.

Most alkalmas $c_0, c_1, \dots, c_n$ C -beli elemeket fogunk definiálni. Legyen $c_0 = a$. Ha $c_0, c_1, \dots, c_i$ már definiált és a $C \setminus \{c_0, c_1, \dots, c_i\}$ különbségalmaz nem üres, akkor ezen különbségalmaz (ami szintén lánc A -nak) legkisebb elemét jelölje c_{i+1} . Ha pedig a különbségalmaz üres, akkor legyen $n = i$. Egyfelől azt kell most igazolnunk, hogy minden értelmes i -re $c_i < c_{i+1}$. A c_i elem legkisebbnek történő választása miatt $c_i \leq c_{i+1}$, de a c_{i+1} választása miatt $c_i \neq c_{i+1}$, tehát $c_i < c_{i+1}$. Ha lenne az A halmaznak olyan q eleme, melyre $c_i < q < c_{i+1}$, akkor egyrészt (a c_{i+1} választása miatt) $q \notin C$, másrészt a tranzitivitás szerint $a \leq q \leq b$ és $C \cup \{q\}$ is lánc lenne, ami ellentmondana annak hogy C -t maximális elemszámúnak választottuk. Ezért $c_i < c_{i+1}$. Mivel b -nek is fel kell lépnie a c_i elemek között, valamely j -re $c_j = b$. Ha $j < n$ lenne, akkor a tranzitivitásból előbb $b = c_j < c_n \leq b$

majd $b < b$ adódna, ami ellentmondás. Tehát $b = c_n$ és $c_0 < c_1$, $c_1 < c_2$, ..., $c_{n-1} < c_n$.

□

A most igazolt állítás szerint véges A esetén a követési reláció meghatározza a „ $\leq$ ” relációt. Ez módot ad arra, hogy diagrammalszemléltessük a véges $(A, \leq)$ részbenrendezett halmazt: elemeit apró körökkel jelzett szögpontok fogják reprezentálni, s ha $a < b$, akkor az a szögpontot a b szögpontnál alacsonyabbra rajzoljuk, és ezen két szögpontot összekötjük egy egyenes szakasszal.

Legyen $\{a_j: j \in J\}$ egy részhalmaza A -nak. Ha b olyan eleme A -nak, hogy egyrészt bármely $j \in J$ -re $a_j \leq b$, másrészt tetszőleges $c \in A$ esetén ha minden $j \in J$ -re $a_j \leq c$ akkor $b \leq c$, akkor b -t az $\{a_j: j \in J\}$ részhalmaz (vagy másszóval az a_j ($j \in J$) elemek) *egyesítésének* nevezzük. Az antiszimmetriából könnyen adódik, hogy ha ezen egyesítés létezik, akkor csak egyetlen egyesítés létezik; jelöljük ezt $\bigvee_{j \in J} a_j$ -vel.

Engedjük meg az $a \geq b$, $a > b$, $a \succ b$ jelöléseket is a $b \leq a$, $b < a$ illetve $b < a$ helyett. A relációjelek „megfordításával” (későbbi szóhasználatunk szerint *dualizálásával*) tehát újabb relációkat definiálhatunk. Könnyű látni, hogy a $\geq$ reláció is reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, tehát az $(A, \geq)$ is részbenrendezett halmaz, melyet az $(A, \leq)$ részbenrendezett halmaz duálisának nevezünk. Látható az is, hogy $(A, \leq)$ diagramját megfordítva (azaz a feje tetejére állítva) megkapjuk a duálisának a diagramját. Ha egy tételben vagy definícióban minden jelet és felhasznált fogalmat dualizálunk (azaz a duális jelre illetve fogalomra cserélünk ki), akkor a tétel illetve definíció duálisához jutunk. A *dualitási elv* szerint ha egy P állítás igaz minden részbenrendezett halmazra, akkor a P állítás duálisa is érvényes. Valóban, ha P igaz az összes részbenrendezett halmazra, akkor P duálisa igaz a részbenrendezett halmazok duálisaira, viszont minden részbenrendezett halmaz egy alkalmas részbenrendezett halmaznak (nevezetesen a saját duálisának) duálisa.

A dualitási elvnek köszönhetően tételeink duálisát nem kell külön igazolnunk. Sőt, gyakran az egyes állítások vagy definíciók duálisát nem is szokás külön megfogalmazni. Így például elhagyható lenne a metszet definíciója (csak annyit kellene mondnunk, hogy az egyesítés duálisát metszetnek nevezzük), de a dualizálás illusztrálása kedvéért mégsem hagyjuk el.

Legyen $\{a_j: j \in J\}$ egy részhalmaza A -nak. Ha b olyan eleme A -nak, hogy egyrészt bármely $j \in J$ -re $a_j \geq b$, másrészt tetszőleges $c \in A$ esetén ha minden $j \in J$ -re $a_j \geq c$ akkor $b \geq c$, akkor b -t az $\{a_j: j \in J\}$ részhalmaz (vagy másszóval az a_j ($j \in J$) elemek) *metszetének* nevezzük. Az antiszimetriából könnyen adódik, hogy ha ezen metszet létezik, akkor csak egyetlen metszet létezik; jelöljük $\bigwedge_{j \in J} a_j$ -vel. Véges $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ részhalmaz egyesítését $a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ vagy $\bigvee_{i=1}^n a_i$, metszetét pedig $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ vagy $\bigwedge_{i=1}^n a_i$ is jelölheti.

Egy $(A, \leq)$ részbenrendezett halmazt *hálónak* (illetve *teljes hálónak*) nevezzünk, ha bármely kételemű részhalmazának (illetve bármely részhalmazának) van egyesítése is és metszete is. Tehát minden teljes háló egyúttal háló is; fordítva ez nem igaz.

Látható ezen definícióból, hogy ha $(A, \leq)$ háló, akkor $(A, \geq)$ is háló. Ennek köszönhetően a dualitási elv a hálókra is érvényes. Az is látszik, hogy véges esetben a hálók ezen utóbbi definíciója egyenértékű az előző fejezetben szereplő definícióval. (Végtelen háló definiálására pedig csak az itteni definíció alkalmas.)

Egy (G, M, I) kontextus *duálisán* az (M, G, I^{-1}) kontextust értjük, ahol $m \in M$ és $g \in G$ esetén $m I^{-1} g$ azt jelenti, hogy $g I m$. Tehát az objektumok és fogalmak szerepének felcserélésével kapjuk a kontextus duálisát, melyre a későbbi bizonyításban lesz szükség. Adott (G, M, I) kontextus esetén a megfelelő $\mathcal{L}(G, M, I)$ „fogalomhálót” az előző fejezetben definiáltuk, azaz megmondtuk, hogy mik az elemei és mit jelent a „ $\leq$ ”. Adósok vagyunk viszont annak bizonyításával, hogy $\mathcal{L}(G, M, I)$ tényleg háló.

1. TÉTEL. Legyen (G, M, I) egy kontextus. Ekkor $\mathcal{L}(G, M, I)$ teljes háló, melyben az egyesítés és a metszés műveletét az alábbi formulák adják meg:

$$\bigvee_{j \in J} (A_j, B_j) = \left(\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)'', \bigcap_{j \in J} B_j \right), \quad (1)$$

$$\bigwedge_{j \in J} (A_j, B_j) = \left(\bigcap_{j \in J} A_j, \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)'' \right). \quad (2)$$

Továbbá az is igaz, hogy $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathcal{L}(G, M, I)$ esetén

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \iff B_1 \supseteq B_2. \quad (3)$$

Bizonyítás. Legyen az alábbiakban X és Y a G vagy az M tetszőleges részhalmaza. Mivel több objektumnak csak kevesebb közös attribútuma lehet (és több attribútumnak csak kevesebb objektum felelhet meg), kapjuk hogy

$$X \subseteq Y \implies X' \supseteq Y'. \quad (4)$$

Ha $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ akkor $A_1 \subseteq A_2$, így (4) és a fogalom definíciója miatt $B_1 = A_1' \supseteq A_2' = B_2$. A (3) másik irányának igazolásához tegyük fel, hogy $B_1 \supseteq B_2$. A fogalom definíciójának és (4)-nek figyelembevételével ekkor $A_1 = B_1' \subseteq B_2' = A_2$, ahonnan $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$. Ezzel (3) teljesülését beláttuk.

A továbbiakban szükségünk lesz az

$$X \subseteq X'' \quad (5)$$

és

$$X' = X''' \quad (6)$$

formulákra. Ha X mondjuk G -nek részhalmaza, akkor $X'' = (X')'$ azon objektumokból áll, amelyek rendelkeznek az X' -beli attribútumokkal, azaz az X összes elemének közös attribútumaival. Viszont az X elemei is ilyenek, tehát $X \subseteq X''$, s ezzel az (5) képletet igazoltuk. Az (5) formulára a (4)-et alkalmazva $X' \supseteq (X'')' = X'''$, míg (5)-ben X helyére X' -t helyettesítve $X' \subseteq (X')'' = X'''$; mindez (6)-ot igazolja. A definíciók közvetlen következménye, hogy

$$\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)' = \bigcap_{j \in J} A_j'. \quad (7)$$

Az aligha szorul bizonyításra, hogy $\mathcal{L}(G, M, I)$ részbenrendezett halmaz. Jelölje (A, B) az (1) jobboldalán álló rendezett párt. A (7) mindkét oldalára az $'$ operátort alkalmazva és kihasználva hogy (A_j, B_j) fogalom:

$$A = \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)'' = \left(\bigcap_{j \in J} A_j' \right)' = \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right)' = B'.$$

Másfelől (6)-ot majd (7)-et alkalmazva kapjuk, hogy

$$A' = \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)''' = \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)' = \bigcap_{j \in J} A'_j = \bigcap_{j \in J} B_j = B.$$

Ezzel beláttuk, hogy (A, B) is fogalom, azaz $(A, B) \in \mathcal{L}(G, M, I)$. Az (5) szerint minden egyes $k \in J$ -re $A_k \subseteq \bigcup_{j \in J} A_j \subseteq \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)'' = A$, azaz $(A_k, B_k) \leq (A, B)$. Tehát (A, B) felső korlátja a tekintett hálóelemeknek. Legyen $(C, D) \in \mathcal{L}(G, M, I)$ is egy felső korlát. Ekkor minden egyes $k \in J$ -re $A_k \subseteq C$, ahonnan $\bigcup_{j \in J} A_j \subseteq C$. A (4) szerint innen $\left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)' \supseteq C' = D$, majd a (4)-et még egyszer felhasználva $A = \left(\bigcup_{j \in J} A_j \right)'' \subseteq D' = C$ adódik. Ezért $(A, B) \leq (C, D)$, tehát (A, B) valóban a tekintett elemek legkisebb felső korlátja, azaz egyesítése. Az (1) formulát ezzel igazoltuk.

Az (1)-hez hasonló módon lehetne a (2)-t is igazolni, de mi inkább a dualitási elv által kínált utat választjuk. Az (1) érvényes az (M, G, I^{-1}) duális kontextus által meghatározott $\mathcal{L}(M, G, I^{-1})$ fogalomhálóban is. Ez a fogalomháló (pontosabban szólva most még csak részbenrendezett halmaznak jogos nevezni) csak annyiban különbözik az $\mathcal{L}(G, M, I)$ -től, hogy elemeinek (melyek rendezett párok) komponenseit fordított sorrendben írjuk. Tekintsük az $\mathcal{L}(G, M, I)$ tetszőleges (A_j, B_j) ($j \in J$) elemeit. Ekkor az $\mathcal{L}(M, G, I^{-1})$ -nek elemei lesznek a (B_j, A_j) párok, s ezekre a már igazolt (1) szerint

$$\bigvee_{j \in J} (B_j, A_j) = \left(\left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)'', \bigcap_{j \in J} A_j \right).$$

Felhasználva hogy a metszés az egyesítés duálisa, az előbbi formulából adódik, hogy az $\mathcal{L}(M, G, I^{-1})$ háló duálisában érvényes az alábbi

$$\bigwedge_{j \in J} (B_j, A_j) = \left(\left(\bigcup_{j \in J} B_j \right)'', \bigcap_{j \in J} A_j \right) \quad (8)$$

összefüggés. Most vegyük észre, hogy az $\mathcal{L}(M, G, I^{-1})$ háló duálisa lényegében azonos az $\mathcal{L}(G, M, I)$ hálóval, mert a kettő között pusztán az a különbség, hogy az elemeik (amelyek rendezett párok) komponenseit fordított sorrendben írjuk. Valóban, egyrészt ha $A \subseteq G$ és $B \subseteq M$, akkor a (G, M, I) kontextusra vonatkozó $A' = B$ és $A = B'$ azzal egyenértékű, hogy az (M, G, I^{-1}) kontextusban $B' = A$ és $B = A'$, tehát $(A, B) \in \mathcal{L}(G, M, I) \iff (B, A) \in \mathcal{L}(M, G, I^{-1})$. Másrészt, (3)-at is használva, $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$ $\mathcal{L}(G, M, I)$ -ben $\iff B_1 \supseteq B_2 \iff (B_1, A_1) \geq (B_2, A_2)$ az $\mathcal{L}(M, G, I^{-1})$ -ben $\iff (B_1, A_1) \leq (B_2, A_2)$ az $\mathcal{L}(M, G, I^{-1})$ duálisában.

Tehát az $\mathcal{L}(M, G, I^{-1})$ részbenrendezett halmaz duálisa tényleg csak abban különbözik az $\mathcal{L}(G, M, I)$ -től, hogy az (A, B) elemek helyett (B, A) -t írunk. Ezért (8)-ból következik (2). □

Most úgy fogjuk az objektumokat illetve az attribútumokat az $\mathcal{L}(G, M, I)$ elemeihez hozzárendelni, hogy az előző fejezetben említett (A) és (B) érvényes legyen. Legyen (G, M, I) egy kontextus. Tetszőleges $g \in G$ objektum illetve $m \in M$ attribútum esetén legyen $\hat{g} = (\{g\}'', \{g\}')$ illetve $\hat{m} = (\{m\}', \{m\}'')$. Legyenek m és m_j ($j \in J$) tetszőleges M -beli attribútumok. Akkor mondjuk, hogy a (G, M, I) kontextusban az m_j ($j \in J$) együttes teljesüléséből következik az m attribútum, ha bármely G -beli objektumra ha minden $j \in J$ -re $g I m_j$, akkor $g I m$.

2. TÉTEL. Legyen (G, M, I) egy kontextus.

(A) Tetszőleges $g \in G$ -re és $m \in M$ -re $g I m$ pontosan akkor, ha az $\mathcal{L}(G, M, I)$ hálóban $\hat{g} \leq \hat{m}$.

(B) Tetszőleges m és $j \in J$ -re m_j M -beli attribútumok esetén az m_j ($j \in J$) együttes teljesüléséből akkor és csak akkor következik a (G, M, I) kontextusban az m attribútum, ha az $\mathcal{L}(G, M, I)$ fogalomhálóban $\bigwedge_{j \in J} \hat{m}_j \leq \hat{m}$.

Bizonyítás. (6)-ból közvetlenül adódik, hogy $\hat{g}$ és $\tilde{m}$ eleme $\mathcal{L}(G, M, I)$ -nek. Ha $g \ I \ m$, akkor $g \in \{m\}'$ miatt $\{g\} \subseteq \{m\}'$, (4) szerint $\{g\}' \supseteq \{m\}''$ majd (4)-et mégegyszer és (6)-ot is alkalmazva $\{g\}'' \subseteq \{m\}''' = \{m\}'$. ezért $\hat{g} = (\{g\}'', \{g\}') \leq (\{m\}', \{m\}'') = \tilde{m}$. Ha pedig azt tesszük fel hogy $\hat{g} \leq \tilde{m}$, akkor $\{g\}'' \subseteq \{m\}'$, innen (5) szerint $g \in \{g\} \subseteq \{g\}'' \subseteq \{m\}'$, tehát $g \in \{m\}'$, azaz $g \ I \ m$. Ezzel (A)-t beláttuk.

A (B) igazolását előkészítendő vegyük észre, hogy a (2) formula szerint

$$\bigwedge_{j \in J} \tilde{m}_j = \bigwedge_{j \in J} (\{m_j\}', \{m_j\}'') = \left(\bigcap_{j \in J} \{m_j\}', \left(\bigcup_{j \in J} \{m_j\}'' \right)' \right). \quad (9)$$

Tegyük most fel, hogy az m_j ($j \in J$) együttes teljesüléséből következik az m attribútum. Ez azt jelenti, hogy $\bigcap_{j \in J} \{m_j\}' \subseteq \{m\}'$. Így (9) szerint $\bigwedge_{j \in J} \tilde{m}_j \leq (\{m\}', \{m\}'') = \tilde{m}$, valóban. Tegyük most fel, hogy $\bigwedge_{j \in J} \tilde{m}_j \leq \tilde{m} = (\{m\}', \{m\}'')$, ekkor (9) szerint $\bigcap_{j \in J} \{m_j\}' \subseteq \{m\}'$. Ez azt jelenti, hogy az $\{m_j\}'$ halmazok közös elemei, azaz az összes m_j attribútummal rendelkező objektumok egyúttal $\{m\}'$ -nek is elemei, azaz az m attribútummal is rendelkeznek. Tehát az m_j ($j \in J$) együttes teljesüléséből következik az m attribútum. □

Azon célkitűzésünket, hogy az előző fejezet állításait bizonyítsuk, megvalósítottuk.

IRODALOM

- [1] Peter Burmeister: Merkmalsimplikationen bei unsicherem Wissen, preprint, Darmstadt 1989.
- [2] Czegléd István, Czegléd Istvánné, Hajdu Sándor, Novák Lászlóné, Sümegi Lászlóné: Matematika (általános iskola 7.), Tankönyvkiadó, Budapest 1990. ISBN 963 18 2657 0
- [3] R. Wille, Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: I. Rival (ed.): *Ordered Sets*. Reidel, Dordrecht–Boston 1982, 445–470.
- [4] R. Wille, Concept lattices and conceptual knowledge systems, preprint, Darmstadt 1990.

Czédli Gábor, JATE Bolyai Intézet, 6720 Szeged, Aradi vértanúk tere 1.
 Schmidt Tamás, BME Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszék, 1111 Budapest, Műgyetem rkp. 9.