

A III. Béla Gimnáziumtól az egyszerű zsonglőrminták átlagtételéig

Dr. Czédli Gábor egyetemi tanár, Szeged
2007. január 26.

Jelen tanulmányom először is arról szól, mit vihettem magammal a Gimnáziumból arra az útra, amelynek eredményeként most a **Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének** katedráján a „komoly tantárgyak” mellett a zsonglőrökös matematika is oktatható. Megemlítek egy-két érdekességet a zsonglőrökös világából. Végül igyekszem ízelítőt adni abból, miként változtatható egy játék igazi tudománnyá, remélve, hogy írásommal a matematika iránt nem feltétlenül vonzódó olvasót sem untatom majd.

Mit is kaptam a **III. Béla** Gimnáziumtól? A teljesség igénye nélkül csak néhányat említek. Hegedűs József tanár úr biztos tudása és matematika órái meghatározóak voltak a pályámon. Pécsi József tanár úr fizika óráin azt láthattam, hogyan kell a tanítványokat tisztelve a tantárgy szeretetét is átadni. Mivel a későbbiekben sok szó esik labdákról, hadd említsem végül, hogy a Gimnáziumban alakult ki bennem a labdajátékok szeretete is. Bár nem sok tehetségem volt a focihoz, a testnevelés órával szomszédos szünetekben (is) sokat rúgtuk a labdát a tornateremben.

A **zsonglőrökös** sokak számára csak bohóckodás, amolyan cirkuszi produkció: tányértáncoltatás, röpködő labdák és buzogányok. Története a távoli múltban kezdődött. A legősibb dokumentált emlék közel négyezer éves: egy zsonglőrt ábrázoló egyiptomi sírkamrarajz a Középső Királyság idejéből. James Cook kapitány felfedezései nyomán pedig azt a meglepőényt jegyezték fel, hogy Tonga szigetén a leányok mindegyike tudott zsonglőrökösni, esetenként hat labdával is.

A matematikus számára persze a zsonglőrökös – mint sok minden a világon – izgalmas matematikai feladvány, nagyon is komoly dolog. A zsonglőrököshez hasonlóan a **matematika** szintén a sok ezer éves csodák világa, melyben egyszerű axiómákra tartalmas és csalhatatlan elméletek épülnek, amelyek a tudomány és az élet megannyi területén kamatoztathatóak. Jó példa erre a Neptunusz bolygó felfedezése 1846-ban. Leverrier francia matematikus az Uránusz pályaháborgásaiból levezette, hogy létezik további bolygó is. Kiszámolta azt is, hogy hol kell lennie – és csakugyan ott is volt! A matematika ilyen **látványos** sikereinek bonyolult részleteit többnyire nehéz széles körben ismertetni. Ezzel szemben a zsonglőrökös matematika könnyebben átlátható, így akár az általános iskolai ismeretekre építve is érdekes tételeket lehet közérthetően ismertetni. Ezen tételek gyakorlati alkalmazásaként az előadó új zsonglőrmutatványokat fedezhet fel, amelyek bemutatása esetén **a látványosság sem marad el**. Bármily meglepő, a ma ismert zsonglőrmutatványok egy részét matematikusok „találták fel”, nem pedig cirkuszi mutatványosok.

A továbbiakban csak a zsonglőrmutatványok egyik elemével, az úgynevezett egyszerű zsonglőrökös mintákkal foglalkozunk. **Egyszerű zsonglőrökös** egy periodikus folyamatot értünk, amelynek során a zsonglőr adott számú tárgyat (a továbbiakban az egyszerűség kedvéért csak labdákat) „ütemre” dobál. Ezt úgy kell elképzelni, hogy egyenletesen kattog egy metronóm: tik-tak-tik-tak-tik-tak ... A zsonglőr a kezét felváltva használja, tehát „tik” kattánásra csak a bal, „tak”-ra pedig csak a jobb kezét. Megengedett az is, hogy egy adott kattánásra ne tegyen semmit. Cselekvésként pedig csak egy dolgot tehet: kattánásra a soros kezével elkap egy

labdát és abban a pillanatban fel is dobja. A képhez az is hozzátartozik, hogy a zsonglőr kezei nem kalandoznak el, azaz balkeze a bal-, jobb keze pedig a jobboldalon „dolgozik”. A zsonglőrminta fogalmára további definíció épül majd, ezért igen ügyes (tehát akárhány, de véges sok labdát uralni képes) „elméleti zsonglőrt” tételezünk fel. Ugyanakkor a tanulmányban említendő példák távolról sem haladják meg az igazi zsonglőrök tudását.

Természetesen a **dobás magasságát** a zsonglőrnek úgy kell megválasztania, hogy a labda pontosan valamelyik későbbi kattanáskor landoljon, és ne két kattanás között. Célszerű ezért számunkra a **dobás magasságát időben mérni**. Például 1 magasságúnak nevezzük az egy ütem múlva (tehát a következő kattanáskor) landoló dobást, 4 magasságúnak pedig a négy ütem múlva landolót. **Periódusidőn** azt a **legrövidebb** időtartamot értjük, amelynek elteltével a zsonglőrminta önmagát ismétli. Jegyezzük fel a zsonglőrminta periódusideje alatt rendre a **dobások magasságát**. Ekkor kapunk egy számsorozatot. Az így kapott (véges) sorozatokat **nevezzük zsonglőrsorozatoknak**. A két legismertebb háromlabdás zsonglőrmintához tartó sorozat a következő: a 3 (a kaszkád nevű zsonglőrmintához tartozó egytagú sorozat), valamint az 5,1 (azaz öt-egy, a koszorú nevű mintához tartozó sorozat). Látható, hogy a zsonglőrsorozat tagjai számának nem sok köze van a labdák számához. A p tagú tetszőleges sorozatot az $a_1, a_2, \dots, a_p$ képlet fogja jelölni.

Célszerű megállapodnunk abban, hogy 0 magasságú dobásnak nevezzük azt, amikor a zsonglőr egy adott ütemnél nem csinál semmit. Kétféleképpen lehet egy labdát feldobni: vagy ugyanazzal a kézzel kapjuk el, vagy a másikkal. A tik-tak, bal-jobb váltakozása miatt könnyű belátni, hogy a páros magasságba dobott labdát a dobó kéz, a páratlan magasságba dobottat pedig a másik kéz fogja elkapni. Ennek alapján már nem meglepő az a tény, hogy a **zsonglőrsorozatból rekonstruálható a zsonglőrminta**. A zsonglőrsorozat körülbelül úgy határozza meg a zsonglőrmintát, ahogy a kotta a zenét. Egyazon kottát persze különféle hangszereken le lehet játszani, miként a zsonglőrsorozat is többféleképpen adható elő. Ezekről az apró finomságokról azonban most eltekintünk. Nem ez az egyetlen pont, ahol idealizáljuk a modellt, hiszen pl. a valóságban lehetetlen az elkapott labdát idővesztés nélkül eldobnunk. Az efféle idealizálás megszokott dolog a matematika alkalmazásai során, és az idealizált modell tanulmányozása is lényeges ismeretekhez vezet. Példa erre az, amikor a fizikában pontszerű testekről van szó, vagy eltekintünk a súrlódástól. A jelen bekezdést összefoglalva: mivel a zsonglőrminták és a zsonglőrsorozatok egymást kölcsönösen meghatározzák, nem sokat veszítünk, ha **a továbbiakban csak a zsonglőrsorozatokra koncentrálunk**.

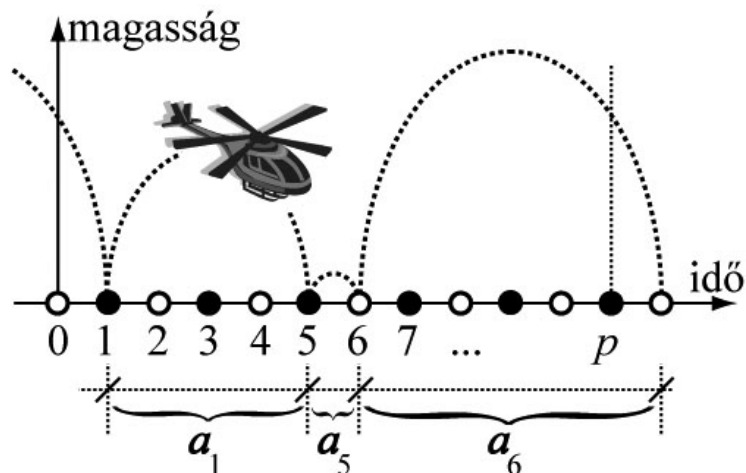
Ennél a pontnál a matematikusok azon kezdtek el gondolkodni, hogy – bizonyos feltételek esetén (pl. a sorozat tagjainak számát rögzítve és a dobások magasságát maximálva) – hány zsonglőrsorozat van. Ismerik-e ezeket mind a profi zsonglőrök? Hamar kiderült, hogy nem! Olyan egyszerű zsonglőrsorozatokat sem ismertek, mint pl. a **4,4,1** vagy az **1,2,3,4,5**. Megint előállt az az öröndetes esemény, hogy matematikailag fedezünk fel valami újat, és ez által **a matematikát népszerűsíthetjük**.

A kérdés mármost az, hogy melyek a zsonglőrsorozatok. Az alábbi tétel szerint nem minden számsorozat zsonglőrsorozat.

ÁTLAGTÉTEL. *Tetszőleges zsonglőrsorozat tagjainak átlaga éppen a labdák száma, tehát egész szám.*

A tétel **bizonyítása** szép és elég közérthető ahhoz, hogy érdemes legyen az alábbiakban ismertetni. Legyen $a_1, a_2, \dots, a_p$ zsonglőrsorozat, és figyeljük meg a zsonglőrmintát. A szemléletesség kedvéért tegyük fel, hogy labdák helyett helikopterek szállnak, és két kezünk egy-egy benzinkúttal felszerelt leszállópálya. Az ábrán a sötét, illetve

világos körök a metronóm „tik” illetve „tak” kattanásait jelentik az időtengelyen. A helikopter magassága az idő függvénye, és ennek a függvénynek a grafikonját jelöltük szaggatott görbe vonallal. Az ábrán $p = 11$ és csak egy helikopter útját ábrázoltuk.



Tegyük fel a következőket: mindegyik helikopter időegység alatt 1 liter benzint fogyaszt, a leszállás pillanatára a tankja mindig kiürül, továbbá minden egyes landoláskor egy szempillantás alatt pontosan annyi benzint tankol, amennyi a következő leszállásig éppen hogy csak elegendő. Jelölje b a helikopterek (azaz a labdák) számát. A folyamatot csak egy periódusidőn keresztül figyeljük, azaz az ábrán a két függőleges vonal között. Mármost tegyük fel azt a kérdést, hogy ezen idő alatt a helikopterek összesen mennyi benzint használtak el.

Kérdezzük meg a pilótákat. Mindegyik azt fogja mondani, hogy p ideig volt levegőben (a leszállások együttes ideje ugyanis nulla), ezért az ő helikoptere p liter benzint fogyasztott. A b darab helikopter így összesen bp liter benzint használt fel.

Kérdezzük meg a benzinkutasokat is. Az első azt mondja, hogy ő egy a_1 magasságú (azaz a_1 ideig tartó) repüléshez a_1 liter benzint szolgáltat ki. (Az ábrán $a_1 = 4$.) A második azt mondja, hogy az a_2 ideig tartó repüléshez a_2 litert. (Az a_2 litert felhasználó helikoptert nem tüntettük fel az ábrán.) És így tovább. A benzinkutasok állításait összegezve kapjuk, hogy összesen $a_1 + a_2 + \dots + a_p$ liter benzint tankoltak a helikopterek. Mivel a benzint a lehető legszűkebben mértük, a helikopterek összesen $a_1 + a_2 + \dots + a_p$ litert használtak fel.

Látszólag lehet egy kis gond az előző mondat kapcsán a p hosszúságú időintervallum széleinél, hiszen nem vettük figyelembe az ábrán látható helikopter esetében az első (az ábrán az 1. ütemben történő) landolás *előtt* fogyasztott benzint, valamint az utolsó (az ábrán a 6. ütemben történő) tankolásból az intervallum *végén* megmaradt benzint. Szerencsére ez a két hatás kinullazza egymást, hiszen (a periodicitás miatt) az ábrán az első landolás *előtti* ívnek az intervallumon belüli darabja egybevágó az utolsó landolás *utáni* ívnek az intervallumon kívül eső darabjával.

Két kifejezést is nyertünk a felhasznált benzin mennyiségére. Ezért ez a két kifejezés egyenlő, azaz $a_1 + a_2 + \dots + a_p = bp$. Az egyenlőség mindkét oldalát p -vel elosztva éppen az Átlagtétel állítását kapjuk. Az Átlagtételt ezzel **bebizonyítottuk**.

Mielőtt egy számsorozat alapján kézbe vesszük a labdákat egy új zsonglőrminta megtanulásának reményében, célszerű a sortozatot matematikailag megvizsgálnunk. Így elkerülhető, hogy hónapokat fecséreljünk egy nem létező zsonglőrminta tanulására. Például az 5,1,2 sorozat esetén a sorozat tagjainak átlaga $(5+1+2)/3 = 8/3$ nem egész szám. Tehát ez a

sorozat nem zsonglőrsorozat, hiába is próbálnánk labdákkal végrehajtani. Sajnos az Átlagtétel csak annak kimutatására alkalmas, hogy egy adott sorozat nem zsonglőrsorozat, de nem elegendő annak eldöntésére, hogy például a 4,7,3,6 sorozat (ahol a tagok átlaga 5, tehát egész szám) zsonglőrsorozat-e. Az igazán hasznos tétel így szól.

PERMUTÁCIÓTESZT. *Tekintsünk egy nemnegatív egész számokból álló tetszőleges $a_1, a_2, \dots, a_p$ sorozatot. Ez a sorozat akkor és csak akkor zsonglőrsorozat, ha teljesül az alábbi két feltétel:*

- (1) az $a_1+1, a_2+2, \dots, a_p+p$ számokat p -vel (azaz a tagok számával) maradékosan osztva egymástól különböző maradékokat kapunk;*
- (2) a sorozat nem áll elő egy rövidebb sorozat periodikus ismétléseként.*

Például a 4,4,1,4,4,1 sorozatra a (2) feltétel nem teljesül, hiszen ez a sorozat előáll a 4,4,1 sorozat kétszeri megismétléseként. Ezért ezt a sorozatot mi nem tekintjük zsonglőrsorozatnak¹. Hasonló okból a 3,3,3 sem zsonglőrsorozat. A (2) feltétel szoros összhangban van azzal, hogy a zsonglőrminta periódusidején a **legrövidebb** időtartamot értjük, amelynek elteltével a zsonglőrminta önmagát ismétli.

A 4,4,1 sorozatra (2) nyilvánvaló, az (1) ellenőrzésekor pedig a $4+1=5$, $4+2=6$, $1+3=4$ számokat kell 3-mal osztanunk. Rendre a 2, 0, 1 maradékokat kapjuk, ezek egymástól különbözőek, tehát a 4,4,1 zsonglőrsorozat.

Vizsgáljuk most meg a korábban említett 4,7,3,6 sorozatot. (2) nyilván teljesül. A $4+1=5$, $7+2=9$, $3+3=6$ és $6+4=10$ számokat 4-gyel osztva rendre az 1, 1, 2, 2 maradékokat kapjuk. Most nem igaz, hogy ezek a maradékok egymástól különböznek, tehát a 4,7,3,6 nem zsonglőrsorozat.

Természetesen a Permutációteszt akkor is alkalmazható, amikor a sorozat már az Átlagtétel szerint sem zsonglőrsorozat; pl. a 3,3,7,1 nem zsonglőrsorozat, hiszen a megfelelő maradékok a 0,1,2,1, azaz nem különbözőek.

A Permutációteszt bizonyítása meghaladná a jelen tanulmány kereteit, és így még arról sem esik szó, honnan nyerte a nevét. Mindkét tétel (a fentieknél erősebb formában) megtalálható egy 1994-ben megjelent cikkben (Juggling drops and descents, American Mathematical Monthly **101**, 507-519). A cikk szerzőinek egyike, **Ronald L. Graham** több vonatkozásban is nevezetes: a Magyar Tudományos Akadémia Tiszteleti tagja, 1993-ban az Amerikai Matematikai Társulat elnöke, 1972-ben pedig a Nemzetközi Zsonglőrszövetség elnöke.

¹ Amit mi most – az egyszerűség érdekében – zsonglőrsorozatnak nevezünk, azt az elmélet mélyebb felépítése során más szerzők **minimális zsonglőrsorozatnak** hívják.