

Definiálhatta volna-e Neumann János a folytonos geometriákat jobban?

Czédli Gábor

SZTE Bolyai Intézete, 2007. május 10.

<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/>



2007. május 10.

Huhn András (1947–1985)

emlékére

29' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 1'

Legyen G egy n -dimenziós projektív geometria. Pl. $\mathbb{R}^{n+1}$. (Homogén koordinátákra gondoljunk.) **A G geometriát teljesen meghatározza**

Legyen G egy n -dimenziós projektív geometria. Pl. $\mathbb{R}^{n+1}$. (Homogén koordinátákra gondoljunk.) **A G geometriát teljesen meghatározza**

altéréinek a $\subseteq$ tartalmazásra nézve hierarchikus rendszere,
azaz az

Legyen G egy n -dimenziós projektív geometria. Pl. $\mathbb{R}^{n+1}$. (Homogén koordinátákra gondoljunk.) **A G geometriát teljesen meghatározza**

altéréinek a $\subseteq$ tartalmazásra nézve hierarchikus rendszere, azaz az $L(G)$ **altérháló**.

Legyen G egy n -dimenziós projektív geometria. Pl. $\mathbb{R}^{n+1}$. (Homogén koordinátákra gondoljunk.) **A G geometriát teljesen meghatározza**

altéréinek a $\subseteq$ tartalmazásra nézve hierarchikus rendszere, azaz az $L(G)$ **altérháló**.

Def.: Háló: $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz és

$\forall a, b \in A \quad \exists a \vee b \in A$ (egyesítés, szupremum)

$\forall a, b \in A \quad \exists a \wedge b \in A$ (metszet, infimum).

28' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 2'

Az $L(G)$ altérháló esetén: $a, b \in L(G)$ -re

$$a \wedge b = a \cap b \quad \text{és}$$

Az $L(G)$ altérháló esetén: $a, b \in L(G)$ -re

$$a \wedge b = a \cap b \quad \text{és}$$

$a \vee b$ az $a \cup b$ által kifeszített altér.

Az $L(G)$ altérháló esetén: $a, b \in L(G)$ -re

$$a \wedge b = a \cap b \quad \text{és}$$

$a \vee b$ az $a \cup b$ által kifeszített altér.

Az $L(G)$ altérháló ismert tulajdonságai:

27' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 3'

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z), \quad (\text{moduláris})$$

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z), \quad (\text{moduláris})$$

$$\exists 0, 1 \in L(G) : \forall x \in L(G) : 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{korlátos})$$

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z), \quad (\text{moduláris})$$

$$\exists 0, 1 \in L(G) : \forall x \in L(G) : 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{korlátos})$$

$$\forall x \in L(G) \quad \exists y \in L(G) : \quad x \wedge y = 0 \text{ és } x \vee y = 1, \quad (\text{komplem.})$$

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z), \quad (\text{moduláris})$$

$$\exists 0, 1 \in L(G) : \forall x \in L(G) : 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{korlátos})$$

$$\forall x \in L(G) \quad \exists y \in L(G) : \quad x \wedge y = 0 \text{ és } x \vee y = 1, \quad (\text{komplem.})$$

$$\exists d : L(G) \rightarrow [0, 1]_{\mathbf{R}}, \quad d(x \wedge y) + d(x \vee y) = d(x) + d(y) \quad (\text{n.d.})$$

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z), \quad (\text{moduláris})$$

$$\exists 0, 1 \in L(G) : \forall x \in L(G) : 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{korlátos})$$

$$\forall x \in L(G) \quad \exists y \in L(G) : \quad x \wedge y = 0 \text{ és } x \vee y = 1, \quad (\text{komplem.})$$

$$\exists d : L(G) \rightarrow [0, 1]_{\mathbf{R}}, \quad d(x \wedge y) + d(x \vee y) = d(x) + d(y) \quad (\text{n.d.})$$

$$L(G) \text{ direkt irreducibilis} \quad (\text{irreducibilis}),$$

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z), \quad (\text{moduláris})$$

$$\exists 0, 1 \in L(G) : \forall x \in L(G) : 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{korlátos})$$

$$\forall x \in L(G) \quad \exists y \in L(G) : \quad x \wedge y = 0 \text{ és } x \vee y = 1, \quad (\text{komplem.})$$

$$\exists d : L(G) \rightarrow [0, 1]_{\mathbf{R}}, \quad d(x \wedge y) + d(x \vee y) = d(x) + d(y) \quad (\text{n.d.})$$

$$L(G) \text{ direkt irreducibilis} \quad (\text{irreducibilis}),$$

$$L(G) \text{ teljes hál\'o} \quad (\text{teljes}),$$

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z), \quad (\text{moduláris})$$

$$\exists 0, 1 \in L(G) : \forall x \in L(G) : 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{korlátos})$$

$$\forall x \in L(G) \quad \exists y \in L(G) : \quad x \wedge y = 0 \text{ és } x \vee y = 1, \quad (\text{komplem.})$$

$$\exists d : L(G) \rightarrow [0, 1]_{\mathbf{R}}, \quad d(x \wedge y) + d(x \vee y) = d(x) + d(y) \quad (\text{n.d.})$$

$$L(G) \text{ direkt irreducibilis} \quad (\text{irreducibilis}),$$

$$L(G) \text{ teljes hál\'o} \quad (\text{teljes}),$$

$$x \wedge \bigvee_{y \in C} y = \bigvee_{y \in C} (x \wedge y),$$

$$x \leq z \implies (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z), \quad (\text{moduláris})$$

$$\exists 0, 1 \in L(G) : \forall x \in L(G) : 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{korlátos})$$

$$\forall x \in L(G) \quad \exists y \in L(G) : \quad x \wedge y = 0 \text{ és } x \vee y = 1, \quad (\text{komplem.})$$

$$\exists d : L(G) \rightarrow [0, 1]_{\mathbf{R}}, \quad d(x \wedge y) + d(x \vee y) = d(x) + d(y) \quad (\text{n.d.})$$

$$L(G) \text{ direkt irreducibilis} \quad (\text{irreducibilis}),$$

$$L(G) \text{ teljes hál\'o} \quad (\text{teljes}),$$

$$x \wedge \bigvee_{y \in C} y = \bigvee_{y \in C} (x \wedge y), \quad x \vee \bigwedge_{y \in C} y = \bigwedge_{y \in C} (x \vee y) \quad (\text{folytonos})$$

24' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 6'

Def (Neumann): **folytonos geometria** : olyan L háló,
amelyre a felsorolt tulajdonságok teljesülnek és van benne
végtelen lánc.

Def (Neumann): folytonos geometria : olyan L háló, amelyre a felsorolt tulajdonságok teljesülnek és van benne végtelen lánc. Ekkor d értékkészlete szükségképpen $[0, 1] \cap \mathbf{R}$.

(Eredete:

Def (Neumann): folytonos geometria : olyan L háló, amelyre a felsorolt tulajdonságok teljesülnek és van benne végtelen lánc. Ekkor d értékkészlete szükségképpen $[0, 1] \cap \mathbf{R}$.

(Eredete: Hilbert-terek operátorgyűrűi...)

Def (Neumann): folytonos geometria : olyan L háló,
amelyre a felsorolt tulajdonságok teljesülnek és van benne
végtelen lánc. Ekkor d értékkészlete szükségképpen $[0, 1] \cap \mathbf{R}$.

(Eredete: Hilbert-terek operátorgyűrűi...) A hálóelmélet
legmélyebb tétele:

Def (Neumann): folytonos geometria : olyan L háló, amelyre a felsorolt tulajdonságok teljesülnek és van benne végtelen lánc. Ekkor d értékkészlete szükségképpen $[0, 1] \cap \mathbf{R}$.

(Eredete: Hilbert-terek operátorgyűrűi...) A hálóelmélet legmélyebb tétele:

Tétel (Neumann, 1935-37): (1) (n.d.) következik a többiből!

Def (Neumann): folytonos geometria : olyan L háló, amelyre a felsorolt tulajdonságok teljesülnek és van benne végtelen lánc. Ekkor d értékkészlete szükségképpen $[0, 1] \cap \mathbf{R}$.

(Eredete: Hilbert-terek operátorgyűrűi...) A hálóelmélet legmélyebb tétele:

Tétel (Neumann, 1935-37): (1) (n.d.) következik a többiből!
(2) Ün. Neumann-reguláris gyűrűkkel koordinátázhatók.

Def (Neumann): folytonos geometria : olyan L háló, amelyre a felsorolt tulajdonságok teljesülnek és van benne végtelen lánc. Ekkor d értékkészlete szükségképpen $[0, 1] \cap \mathbf{R}$.

(Eredete: Hilbert-terek operátorgyűrűi...) A hálóelmélet legmélyebb tétele:

Tétel (Neumann, 1935-37): (1) (n.d.) következik a többiből!
(2) Ün. Neumann-reguláris gyűrűkkel koordinátázhatók.

Megj.: messzemenő általánosítása Hilbert — Veblen — Young tételének ($3 \leq n < \infty \implies$ proj. geom. koordinátázható).

22' ? **Czédli G.** Definiálhatta volna-e Neumann... **2007. május 10.** ✓ 8'

Definiálhatta volna-e jobban? Lehetséges válaszok:

1.:

Definiálhatta volna-e jobban? Lehetséges válaszok:

1.: Neumann János = Neumann János $\Rightarrow$ **nem**, és más sem.

2.:

Definiálhatta volna-e jobban? Lehetséges válaszok:

1.: Neumann János = Neumann János $\Rightarrow$ **nem**, és más sem.

2.: A J. von Neumann: Continuous Geometry: a hálóelmélet a legmélyebb tételeinek kulcsa $\Rightarrow$ **nem**.

20' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 10'

3. Válasz

3. Válasz ([75]*): Nem, illetve nemigen. Ehhez: Idézzük fel Neumann János konstrukcióját (arra, hogy létezik folytonos geometria):

3. Válasz ([75]*): Nem, illetve nemigen. Ehhez: Idézzük fel Neumann János konstrukcióját (arra, hogy létezik folytonos geometria): Legyen F test, $p = 2$. Az F^n vektortér altérhálóját $L(F^n)$ jelöli majd. A döntő lépés:

3. Válasz ([75]*): Nem, illetve nemigen. Ehhez: Idézzük fel Neumann János konstrukcióját (arra, hogy létezik folytonos geometria): Legyen F test, $p = 2$. Az F^n vektortér altérhálóját $L(F^n)$ jelöli majd. A döntő lépés:

$L(F^n)$ beágyazása $L(F^{2n})$ -be 0–1-tartó módon: legyen

$$\pi_1 : F^n \rightarrow F^{2n}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0),$$

3. Válasz ([75]*): Nem, illetve nemigen. Ehhez: Idézzük fel Neumann János konstrukcióját (arra, hogy létezik folytonos geometria): Legyen F test, $p = 2$. Az F^n vektortér altérhálóját $L(F^n)$ jelöli majd. A döntő lépés:

$L(F^n)$ beágyazása $L(F^{2n})$ -be 0–1-tartó módon: legyen

$$\pi_1 : F^n \rightarrow F^{2n}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0),$$

$$\pi_2 : F^n \rightarrow F^{2n}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n),$$

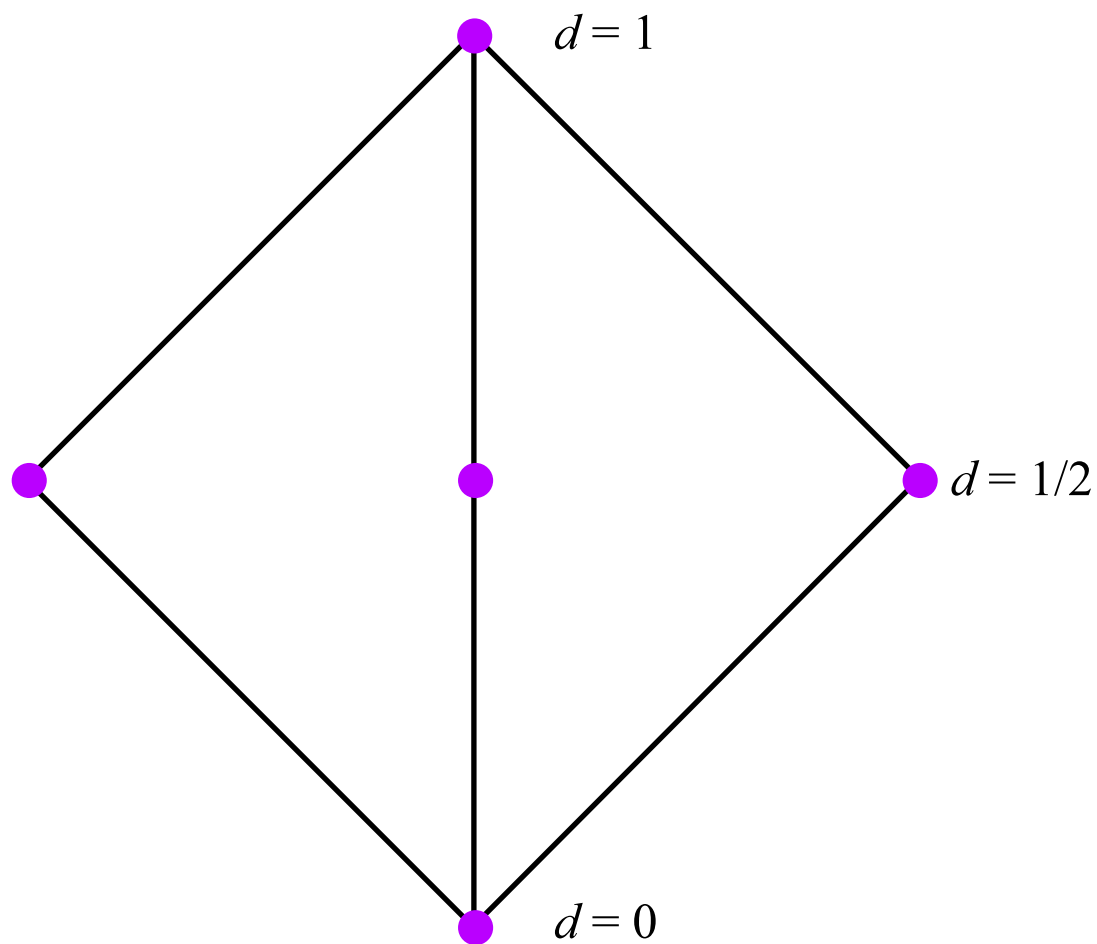
3. Válasz ([75]*): Nem, illetve nemigen. Ehhez: Idézzük fel Neumann János konstrukcióját (arra, hogy létezik folytonos geometria): Legyen F test, $p = 2$. Az F^n vektortér altérhálóját $L(F^n)$ jelöli majd. A döntő lépés:

$L(F^n)$ beágyazása $L(F^{2n})$ -be 0–1-tartó módon: legyen

$$\begin{aligned}\pi_1 : F^n &\rightarrow F^{2n}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0), \\ \pi_2 : F^n &\rightarrow F^{2n}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, \dots, 0, x_1, \dots, x_n), \\ L(F^n) &\rightarrow L(F^{2n}), S \mapsto \pi_1(S) \oplus \pi_2(S).\end{aligned}$$

18' ? **Czédli G.** Definiálhatta volna-e Neumann... **2007. május 10.** ✓ 12'

*[75]: a honlapomon



$L(\mathbb{Z}_2^2)$

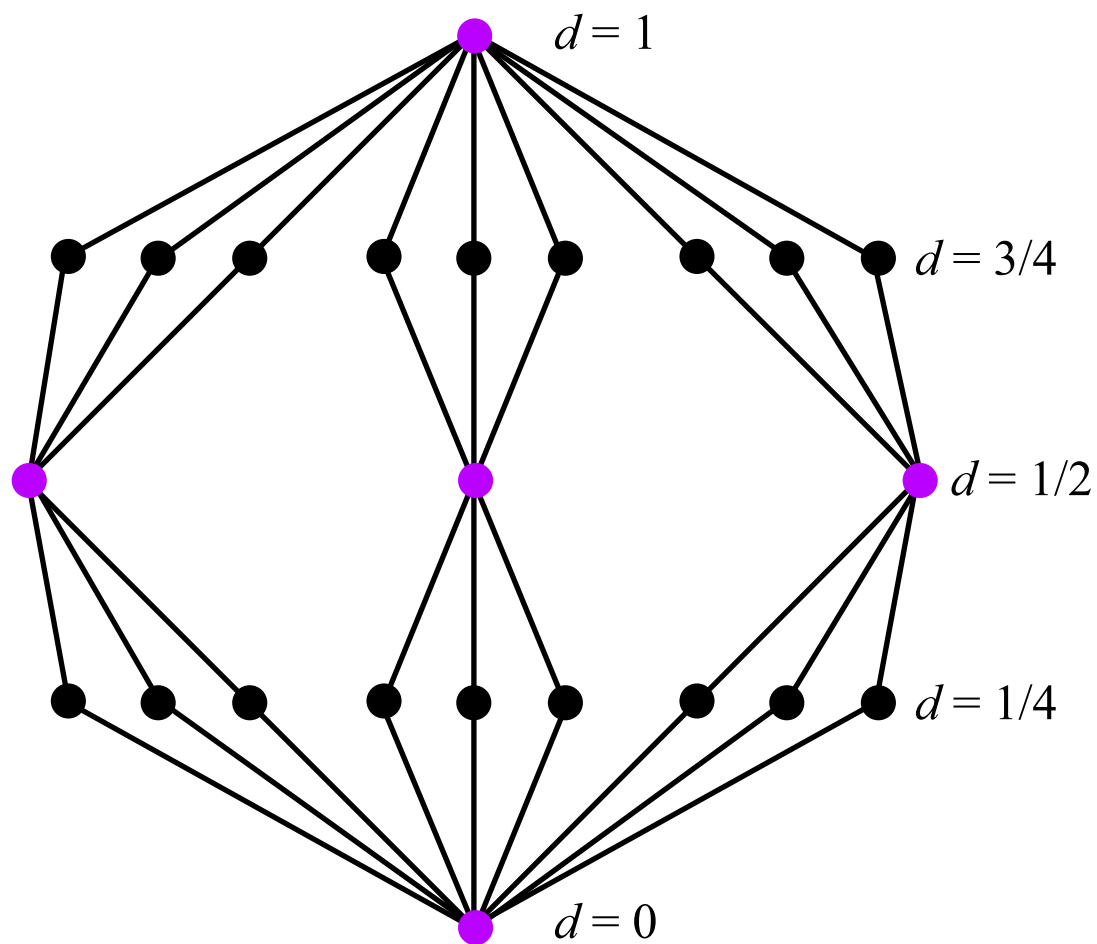
17' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 13'



$L(\mathbb{Z}_2^4)$

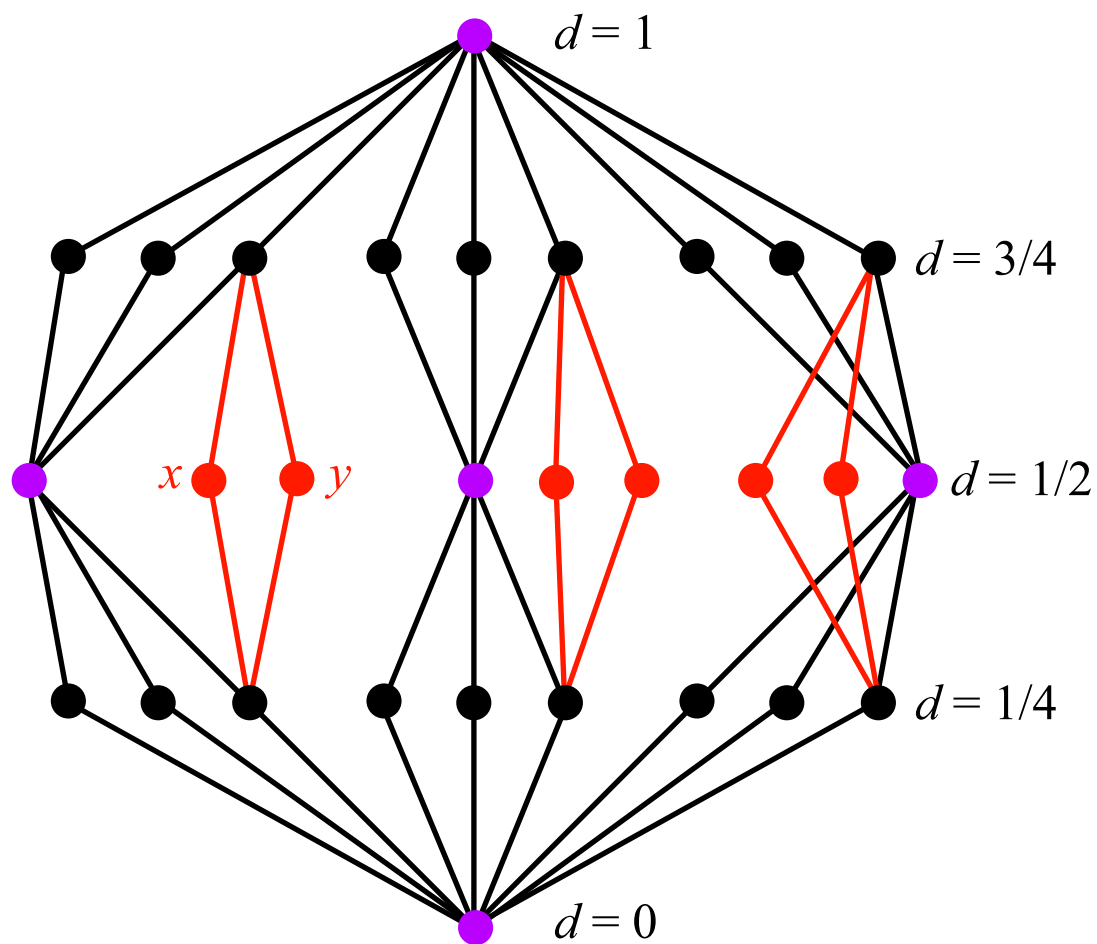
17' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 13'



$L(\mathbb{Z}_2^4)$

16' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 14'

És így tovább;

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^8) \subseteq L(F^{16}) \subseteq \dots$$

És így tovább;

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^8) \subseteq L(F^{16}) \subseteq \dots$$
$$L(F) := L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^8) \cup L(F^{16}) .$$

És így tovább;

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^8) \subseteq L(F^{16}) \subseteq \dots$$
$$L(F) := L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^8) \cup L(F^{16}) .$$

$L(F)$ esetén

És így tovább;

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^8) \subseteq L(F^{16}) \subseteq \dots$$
$$L(F) := L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^8) \cup L(F^{16}) .$$

$L(F)$ esetén d értékkészlete:

$$\left\{ \frac{a}{2^k} : a \in \mathbf{N}_0, k \in \mathbf{N} \right\} \cap [0, 1].$$

És így tovább;

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^8) \subseteq L(F^{16}) \subseteq \dots$$
$$L(F) := L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^8) \cup L(F^{16}) .$$

$L(F)$ esetén d értékkészlete:

$$\left\{ \frac{a}{2^k} : a \in \mathbf{N}_0, k \in \mathbf{N} \right\} \cap [0, 1].$$

$L(F)$ még nem folytonos geometria!

L

És így tovább;

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^8) \subseteq L(F^{16}) \subseteq \dots$$
$$L(F) := L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^8) \cup L(F^{16}) \cup \dots$$

$L(F)$ esetén d értékkészlete:

$$\left\{ \frac{a}{2^k} : a \in \mathbf{N}_0, k \in \mathbf{N} \right\} \cap [0, 1].$$

$L(F)$ még nem folytonos geometria!

Legyen $x, y \in L(F)$ -re x és y távolsága $d(x \vee y) - d(x \wedge y)$.

És így tovább;

$$\begin{aligned} L(F^2) &\subseteq L(F^4) \subseteq L(F^8) \subseteq L(F^{16}) \subseteq \dots \\ L(F) &:= L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^8) \cup L(F^{16}) \dots \end{aligned}$$

$L(F)$ esetén d értékkészlete:

$$\left\{ \frac{a}{2^k} : a \in \mathbf{N}_0, k \in \mathbf{N} \right\} \cap [0, 1].$$

$L(F)$ még nem folytonos geometria!

Legyen $x, y \in L(F)$ -re x és y távolsága $d(x \vee y) - d(x \wedge y)$. Például az ábrán

És így tovább;

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^8) \subseteq L(F^{16}) \subseteq \dots$$
$$L(F) := L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^8) \cup L(F^{16}) .$$

$L(F)$ esetén d értékkészlete:

$$\left\{ \frac{a}{2^k} : a \in \mathbf{N}_0, k \in \mathbf{N} \right\} \cap [0, 1].$$

$L(F)$ még nem folytonos geometria!

Legyen $x, y \in L(F)$ -re x és y távolsága $d(x \vee y) - d(x \wedge y)$. Például az ábrán x és y távolsága $1/2$:

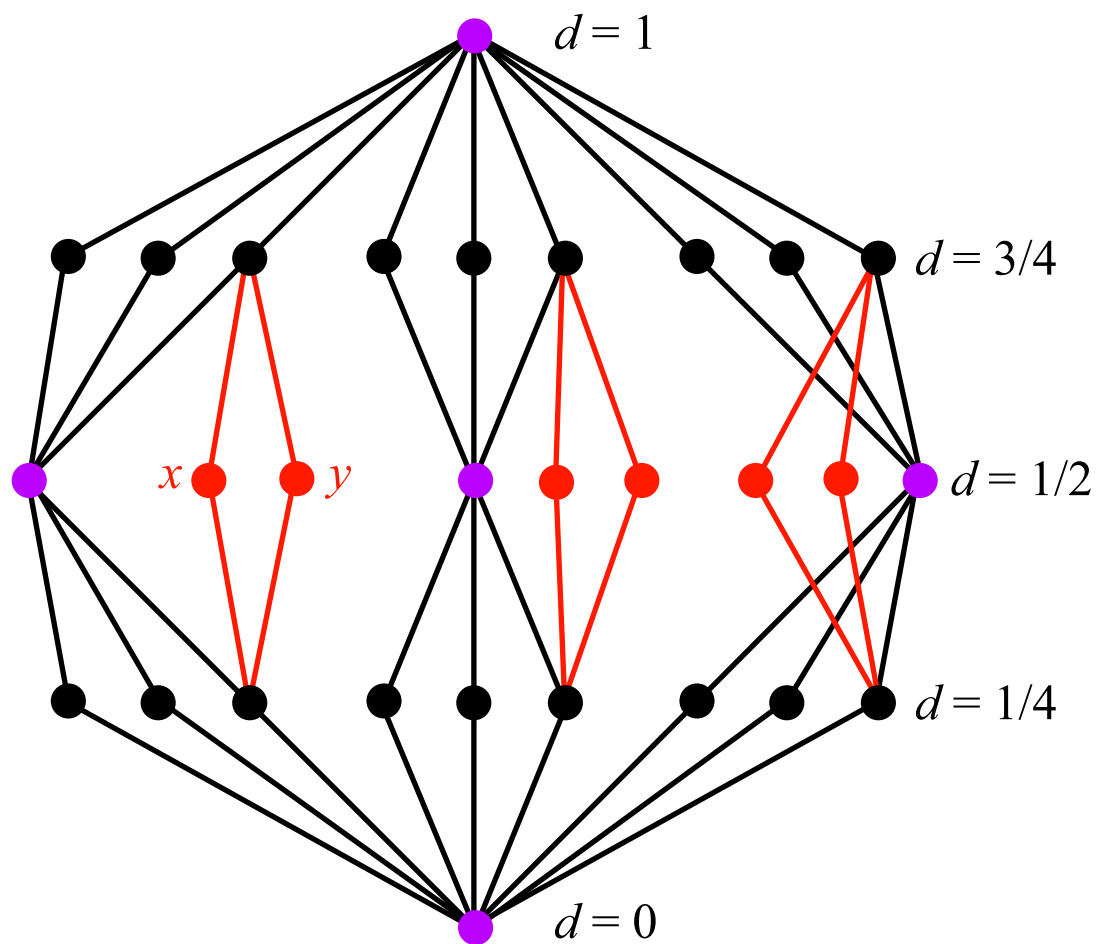
15' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 15'



$L(\mathbb{Z}_2^4)$

14' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 16'

Ez tényleg távolság. Legyen

Ez tényleg távolság. Legyen $\overline{L(F)}$ az $L(F)$ metrikus lezártja.
Ekkor $\overline{L(F)}$ folytonos geometria.

Def [74]:

Ez tényleg távolság. Legyen $\overline{L(F)}$ az $L(F)$ metrikus lezártja. Ekkor $\overline{L(F)}$ folytonos geometria.

Def [74]: $L^!(F)$ -et az $L(F)$ -hez hasonlóan definiáljuk; a különbség az, hogy most az n -edik lépésben nem duplázzuk a dimenziót, hanem $(n + 1)!$ -szorosára növeljük:

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^{24}) \subseteq L(F^{576}) \subseteq \dots$$

$2\times$
 $6\times$
 $24\times$

Ez tényleg távolság. Legyen $\overline{L(F)}$ az $L(F)$ metrikus lezártja. Ekkor $\overline{L(F)}$ folytonos geometria.

Def [74]: $L^!(F)$ -et az $L(F)$ -hez hasonlóan definiáljuk; a különbség az, hogy most az n -edik lépésben nem duplázzuk a dimenziót, hanem $(n + 1)$!-szorosára növeljük:

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^{24}) \subseteq L(F^{576}) \subseteq \dots$$

$2\times$
 $6\times$
 $24\times$

$$L^!(F) :=$$

Ez tényleg távolság. Legyen $\overline{L(F)}$ az $L(F)$ metrikus lezártja. Ekkor $\overline{L(F)}$ folytonos geometria.

Def [74]: $L^!(F)$ -et az $L(F)$ -hez hasonlóan definiáljuk; a különbség az, hogy most az n -edik lépésben nem duplázzuk a dimenziót, hanem $(n + 1)$!-szorosára növeljük:

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^{24}) \subseteq L(F^{576}) \subseteq \dots$$

$2\times$ $6\times$ $24\times$

$$L^!(F) := L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^{24}) \cup L(F^{576}) \cup \dots$$

Ez tényleg távolság. Legyen $\overline{L(F)}$ az $L(F)$ metrikus lezártja. Ekkor $\overline{L(F)}$ folytonos geometria.

Def [74]: $L^!(F)$ -et az $L(F)$ -hez hasonlóan definiáljuk; a különbség az, hogy most az n -edik lépésben nem duplázzuk a dimenziót, hanem $(n + 1)$!-szorosára növeljük:

$$L(F^2) \subseteq L(F^4) \subseteq L(F^{24}) \subseteq L(F^{576}) \subseteq \dots$$

$2\times$ $6\times$ $24\times$

$$L^!(F) := L(F^2) \cup L(F^4) \cup L(F^{24}) \cup L(F^{576}) \cup \dots$$

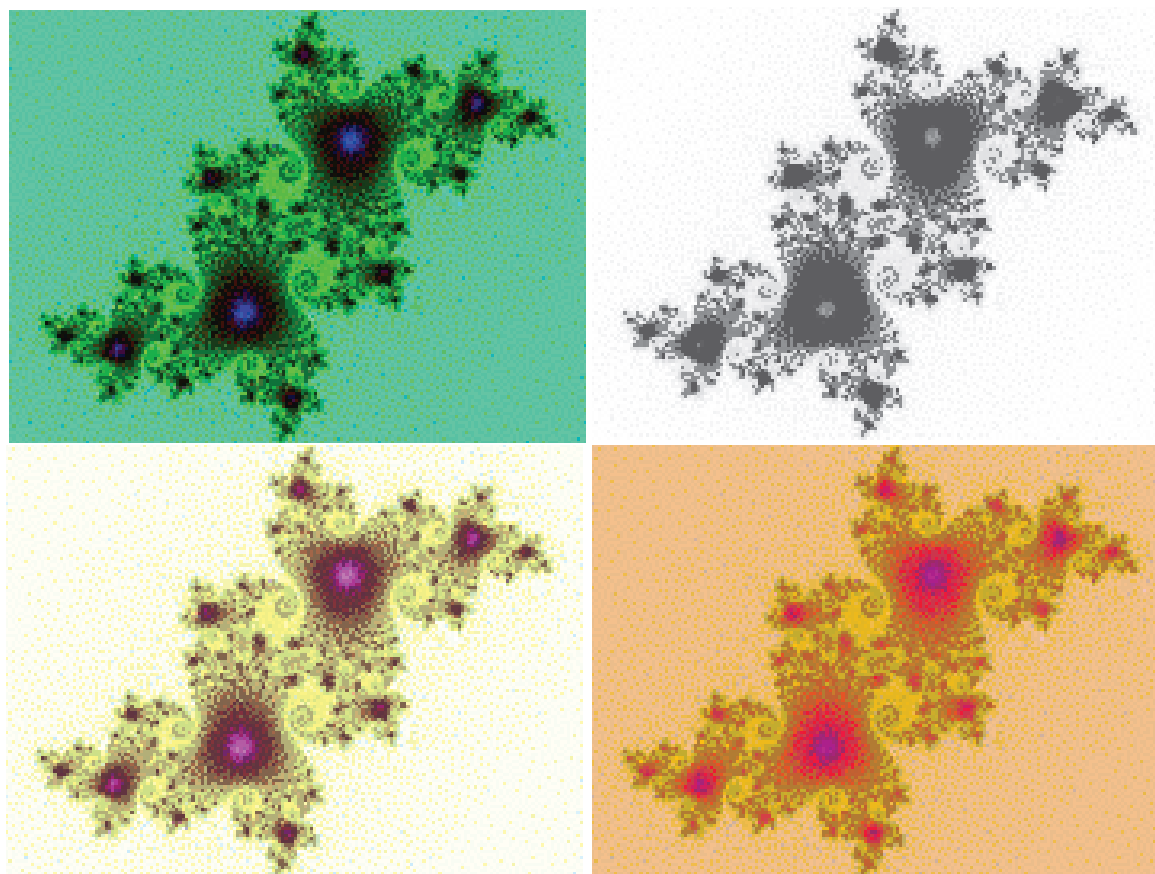
13' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 17'



12' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 18'

Def. [74]: Egy M korlátos hálót **fraktálhálónak** nevezünk, ha bármely $a < b \in M$ -re $[a, b] := \{x \in M : a \leq x \leq b\}$ **izo-**
morf M -mel, továbbá (a tömörség kedvéért de csak ma) M
moduláris és nemdisztributív.

Def. [74]: Egy M korlátos hálót **fraktálhálónak** nevezünk, ha bármely $a < b \in M$ -re $[a, b] := \{x \in M : a \leq x \leq b\}$ **izomorf** M -mel, továbbá (a tömörség kedvéért de csak ma) M **moduláris és nemdisztributív**.

1. Tétel [74]: $L^!(F)$ is és metrikus lezártja, $\overline{L^!(F)}$ is fraktálháló. **A**

Def. [74]: Egy M korlátos hálót **fraktálhálónak** nevezünk, ha bármely $a < b \in M$ -re $[a, b] := \{x \in M : a \leq x \leq b\}$ **izomorf** M -mel, továbbá (a tömörség kedvéért de csak ma) M **moduláris és nemdisztributív**.

1. Tétel [74]: $L^!(F)$ is és metrikus lezártja, $\overline{L^!(F)}$ is fraktálháló. Az **utóbbi** folytonos geometria.

Def. [74]: Egy M korlátos hálót **fraktálhálónak** nevezünk, ha bármely $a < b \in M$ -re $[a, b] := \{x \in M : a \leq x \leq b\}$ **izomorf** M -mel, továbbá (a tömörség kedvéért de csak ma) M **moduláris és nemdisztributív**.

1. Tétel [74]: $L^!(F)$ is és metrikus lezártja, $\overline{L^!(F)}$ is fraktálháló. Az **utóbbi** folytonos geometria.

Az eddig látott folytonos geometriák fraktálhálók (**Halperin**). Így a címbeli kérdésre is választ adunk, ha megmutatjuk: nemcsak a folytonos geometriákat hanem a **fraktálhálókat** sem lehet jobban definiálni!

11' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 19'

Jobban? **minél több** hálózatonosság teljesüljön benne!

Jobban? **minél több** hálózatonosság teljesüljön benne!

vagy **minél kevesebb!**

Jobban? **minél több** hálóazonosság teljesüljön benne!

vagy **minél kevesebb!**

Jelölje F_p a p -karakterisztikájú prímtestet, azaz $F_0 = \mathbf{Q}$, $F_p = \mathbf{Z}_p$ ha p prím. Egy H hálóra $\mathcal{T}(H)$ jelöli a H -ban teljesülő azonosságok halmazát; ezt a H (azonosság)**elméletének** nevezzük. Ez

Jobban? **minél több** hálóaazonosság teljesüljön benne!

vagy **minél kevesebb**!

Jelölje F_p a p -karakterisztikájú prímtestet, azaz $F_0 = \mathbb{Q}$, $F_p = \mathbb{Z}_p$ ha p prím. Egy H hálóra $\mathcal{T}(H)$ jelöli a H -ban teljesülő azonosságok halmazát; ezt a H (azonosság)**elméletének** nevezzük. Ez $2^{\aleph_0}$ -féle lehet.

Jobban? **minél több** hálózatonosság teljesüljön benne!

vagy **minél kevesebb!**

Jelölje F_p a p -karakterisztikájú prímtestet, azaz $F_0 = \mathbb{Q}$, $F_p = \mathbb{Z}_p$ ha p prím. Egy H hálóra $\mathcal{T}(H)$ jelöli a H -ban teljesülő azonosságok halmazát; ezt a H (azonosság)**elméletének** nevezzük. Ez $2^{\aleph_0}$ -féle lehet. Ha R 1-elemes gyűrű, akkor $L(R^n)$ jelöli az ${}_R R^n$ részmodulusainak hálóját.

9' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 21'

2. Tétel [75]: Tegyük fel, hogy M fraktálháló. Ekkor $\exists$ 
 $p \in P \cup \{0\}$, hogy

$$\mathcal{T}(M) \subseteq \mathcal{T}(L^!(F_p)) = \mathcal{T}(\overline{L^!(F_p)}).$$

2. Tétel [75]: Tegyük fel, hogy M fraktálháló. Ekkor $\exists$ 
 $p \in P \cup \{0\}$, hogy

$$\mathcal{T}(M) \subseteq \mathcal{T}(L^!(F_p)) = \mathcal{T}(\overline{L^!(F_p)}).$$

Tehát a "minél több azonosság" szempontjából Neumann János nem alkothatott volna jobb fogalmat. Az $\mathcal{T}(M)$ -re adott felső korlát éles (hiszen $M = \overline{L^!(F_p)}$ is lehet).

2. Tétel [75]: Tegyük fel, hogy M fraktálháló. Ekkor $\exists$ 
 $p \in P \cup \{0\}$, hogy

$$\mathcal{T}(M) \subseteq \mathcal{T}(L^!(F_p)) = \mathcal{T}(\overline{L^!(F_p)}).$$

Tehát a "minél több azonosság" szempontjából Neumann János nem alkotott volna jobb fogalmat. Az $\mathcal{T}(M)$ -re adott felső korlát éles (hiszen $M = \overline{L^!(F_p)}$ is lehet). A tételbeli p -t az M fraktálháló **karaktisztikájának** nevezzük.

**3. Tétel [75]: Jelölje p az M fraktálháló karakterisztikáját.
Ekkor tetszőleges R egységelemes gyűrűre**

$$\text{char } R \neq p \implies \mathcal{T}(M) \not\subseteq \mathcal{T}(L(R^3)).$$

3. Tétel [75]: Jelölje p az M fraktálháló karakterisztikáját. Ekkor tetszőleges R egységelemes gyűrűre

$$\text{char } R \neq p \implies \mathcal{T}(M) \not\subseteq \mathcal{T}(L(R^3)).$$

A tétel azt fejezi ki, hogy $\mathcal{T}(M)$ nem lehet túl kicsi, tehát a „minél kevesebb azonosság” szempontjából sem alkothatott volna Neumann János lényegesen jobbat.

3. Tétel [75]: Jelölje p az M fraktálháló karakterisztikáját.
Ekkor tetszőleges R egységelemes gyűrűre

$$\text{char } R \neq p \implies \mathcal{T}(M) \not\subseteq \mathcal{T}(L(R^3)).$$

A tétel azt fejezi ki, hogy $\mathcal{T}(M)$ nem lehet túl kicsi, tehát a „minél kevesebb azonosság” szempontjából sem alkothatott volna Neumann János lényegesen jobbat. (Ez az alsó becslés jó, de nem állítom, hogy éles.)

7' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 23'

A **[75]**-beli bizonyítás a moduláris hálóelmélet legkomolyabb eszközeit használja (

A **[75]**-beli bizonyítás a moduláris hálóelmélet legkomolyabb eszközeit használja (és az egyiket továbbfejleszti):

A [75]-beli bizonyítás a moduláris hálóelmélet legkomolyabb eszközeit használja (és az egyiket továbbfejleszti): **Neumann, Freese, Herrmann, Huhn** eredményeit. (

A [75]-beli bizonyítás a moduláris hálóelmélet legkomolyabb eszközeit használja (és az egyiket továbbfejleszti): **Neumann, Freese, Herrmann, Huhn** eredményeit. (Huhn András érdeme: az általa felfedezett **Huhn-gyémánt** ekvivalens a Neumann-kerettel, és ez a tény kapcsolja össze Neumann János elméletét a hálóazonosságok elméletével.) Sz

A [75]-beli bizonyítás a moduláris hálóelmélet legkomolyabb eszközeit használja (és az egyiket továbbfejleszti): **Neumann, Freese, Herrmann, Huhn** eredményeit. (Huhn András érdeme: az általa felfedezett **Huhn-gyémánt** ekvivalens a Neumann-kerettel, és ez a tény kapcsolja össze Neumann János elméletét a hálóazonosságok elméletével.) Szükség van továbbá az $\mathcal{T}(L(R^n))$ -et leíró, **[Hutchinson–CzG, 1978]**-beli tételre is.

A [75]-beli bizonyítás a moduláris hálóelmélet legkomolyabb eszközeit használja (és az egyiket továbbfejleszti): **Neumann, Freese, Herrmann, Huhn** eredményeit. (Huhn András érdeme: az általa felfedezett **Huhn-gyémánt** ekvivalens a Neumann-kerettel, és ez a tény kapcsolja össze Neumann János elméletét a hálóazonosságok elméletével.) Szükség van továbbá az $\mathcal{T}(L(R^n))$ -et leíró, **[Hutchinson–CzG, 1978]**-beli tételre is. A bizonyítás során a fő (de leküzdött) nehézséget az okozza, hogy a moduláris hálók szóproblémája nem megoldható (**Hutchinson**).

A [75]-beli bizonyítás a moduláris hálóelmélet legkomolyabb eszközeit használja (és az egyiket továbbfejleszti): **Neumann, Freese, Herrmann, Huhn** eredményeit. (Huhn András érdeme: az általa felfedezett **Huhn-gyémánt** ekvivalens a Neumann-kerettel, és ez a tény kapcsolja össze Neumann János elméletét a hálóazonosságok elméletével.) Szükség van továbbá az $\mathcal{T}(L(R^n))$ -et leíró, **[Hutchinson–CzG, 1978]**-beli tételre is. A bizonyítás során a fő (de leküzdött) nehézséget az okozza, hogy a moduláris hálók szóproblémája nem megoldható (**Hutchinson**).

[74], [75], továbbá a **jelen fájl** is elérhető a honlapomon:

<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/>

5' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 25'

Neumann Jánosnál is és **[75]**-ben is a fő technikai eszköz: a (Neumann-féle) n -keret:

$$(\vec{a}, \vec{c}) = (a_1, \dots, a_n, c_{12}, \dots, c_{1n}) \in L^{2n-1},$$

$$a_j \wedge \bigvee_{i \neq j} a_i = 0, \quad \bigvee_i a_i = 1,$$

$$a_1 \vee c_{1j} = a_j \vee c_{1j} = a_1 \vee a_j, \quad a_1 \wedge c_{1j} = a_j \wedge c_{1j} = 0.$$

Ez ekvivalens a Huhn-féle n -gyémánttal. A **[75]**-beli döntő lépés:

Neumann Jánosnál is és [75]-ben is a fő technikai eszköz: a (Neumann-féle) n -keret:

$$\begin{aligned}
 (\vec{a}, \vec{c}) &= (a_1, \dots, a_n, c_{12}, \dots, c_{1n}) \in L^{2n-1}, \\
 a_j \wedge \bigvee_{i \neq j} a_i &= 0, \quad \bigvee_i a_i = 1, \\
 a_1 \vee c_{1j} &= a_j \vee c_{1j} = a_1 \vee a_j, \quad a_1 \wedge c_{1j} = a_j \wedge c_{1j} = 0.
 \end{aligned}$$

Ez ekvivalens a Huhn-féle n -gyémánttal. A [75]-beli döntő lépés:

4. Tétel [75]: (Szorzatkeret tétel) Ha $(\vec{a}, \vec{c})$ egy m -keret L -ben (külső keret) és $(\vec{u}, \vec{v})$ egy n -keret $[0, a_1]$ -ben (belső keret), akkor kanonikus módon megadható egy $(\vec{b}, \vec{d})$ mn -keret L -ben (szorzatkeret), és $\text{char}(\vec{a}, \vec{c}) = \text{char}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{char}(\vec{b}, \vec{d})$.

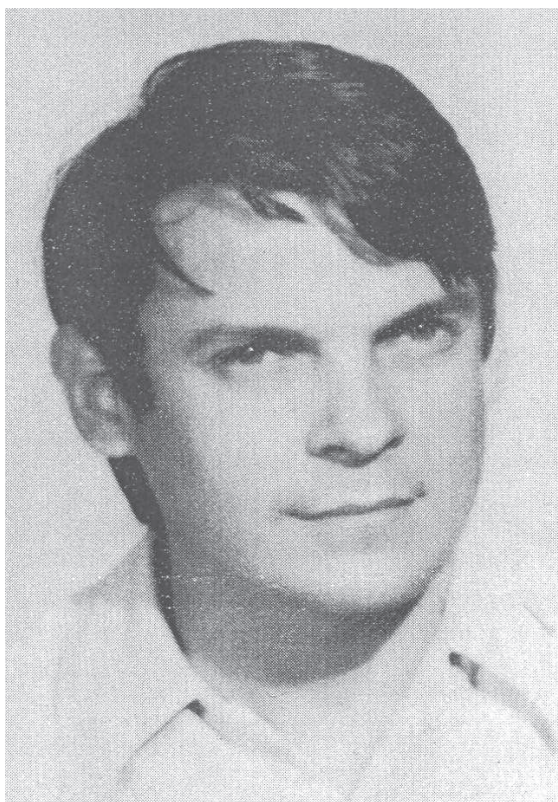
2' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 28'



Huhn András, 1947–1985



Neumann János, 1903–1957

0' ?

Czédli G.

Definiálhatta volna-e Neumann...

2007. május 10.

✓ 30'