

Kongruenciahálótól a körök lokálisan
konvex geometriájáig
(a Szőkefalvi-Nagy Béla Érem átvétele alkalmából)
Szeged, 2016. november 17.

Czédli Gábor (SZTE Bolyai Intézete, Szeged)

2016. november 18.

- 1978. február 15. (első Acta cikkem benyújtásának története)
- 1979. augusztus 1. — 1986. július 31.: az Analízis Tanszéken

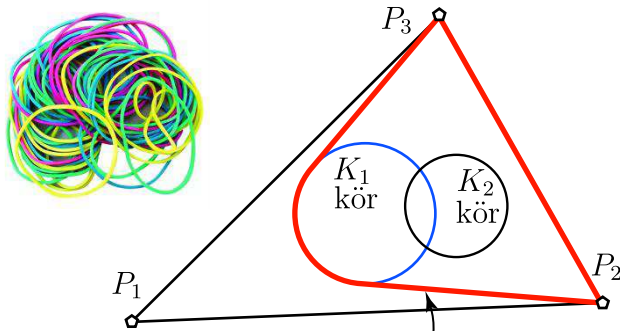
konvex burok = gumikarika-burok



Csak ún. kompakt konvex síkbeli halmazokkal foglalkozunk.

Tétel

(Kira Adaricheva & Madina Bolat, 2016. szept. 1., arXiv) Bárhogy rakunk két kört egy háromszögbe, akkor a háromszög egyik oldala és az egyik kör konvex burka tartalmazza a másik kört.



konvex burok = gumikarika-burok

Az Adaricheva–Bolot tétel bizonyítása hosszú (36 ábra, sok eset).
CzG: rövidebb bizonyítás $\rightarrow$ Acta.

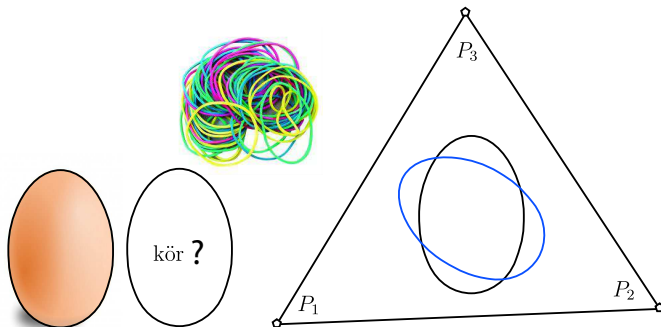
Tétel (CzG)

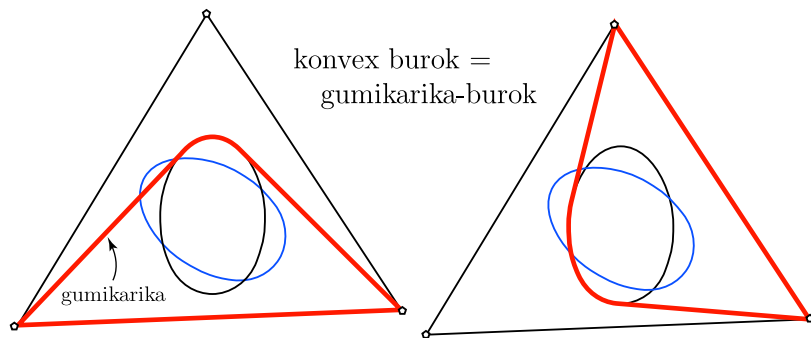
Ez a tulajdonság jellemzi is a köröket; sőt, több is igaz: egy K_1 síkidom (pontosabban: síkbeli kompakt konvex halmaz) akkor és csak akkor kör, ha bárhogy rakjuk K_1 -et és egy vele egybevágó K_2 -t egy háromszögbe, az egyik háromszögoldal és a K_1 , K_2 síkidomok egyikének konvex burka tartalmazza a másik síkidomot.

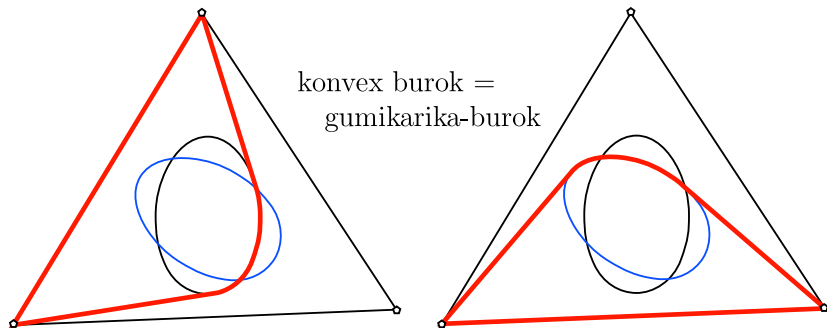
Az Adaricheva–Bolot tétel bizonyítása hosszú (36 ábra, sok eset).
CzG: rövidebb bizonyítás $\rightarrow$ Acta.

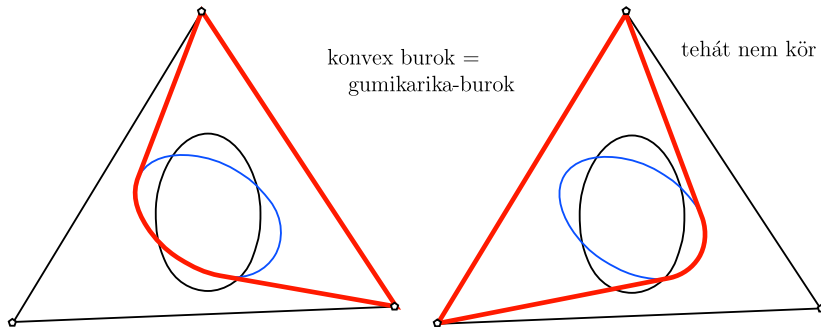
Tétel (CzG)

*Ez a tulajdonság jellemzi is a köröket; sőt, több is igaz: egy K_1 síkidom (pontosabban: síkbeli kompakt konvex halmaz) akkor és csak akkor kör, ha bárhogy rakjuk K_1 -et és egy vele **egybevágó** K_2 -t egy háromszögbe, az egyik háromszögoldal és a K_1 , K_2 síkidomok egyikének konvex burka tartalmazza a másik síkidomot.*









<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/swinglattice/>

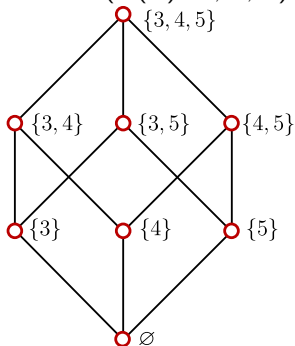
<http://www.math.u-szeged.hu/~makay/swinglattice/>

A játékban *hálók* láthatók.

Definíció

Háló: $(L; \leq, \vee, \wedge)$. Hasse-diagramon: $a \leq b \iff a$ -ból van b -be végig felfelé haladó út. $a \prec b \iff a < b$ és az út egyetlen élből áll. $\vee, \wedge$: egyesítés (szupremum), metszet (infimum).

Például $(P(A); \subseteq, \cup, \cap)$; ha $A = \{3, 4, 5\}$, akkor



Ha $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$, akkor $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. (Szorzásra is.)

Ha $a_1 \equiv b_1 \pmod{10}$ és $a_2 \equiv b_2 \pmod{10}$, akkor

$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{10}$. (Szorzásra is.)

Definíció

Ha egy L hálón értelmezett $\equiv$ reláció "így viselkedik" az L háló $\vee$, $\wedge$ műveletekre nézve, akkor (háló)kongruenciának nevezzük. Az L kongruenciái maguk is hálót alkotnak: $\text{Con}(L)$, azaz $(\text{Con}(L); \subseteq)$

Tétel (Funayama & Nakayama 1942, Dilworth)

$\text{Con}(L)$ disztributív háló. Fordítva: ha D véges disztributív háló, akkor $\text{Con}(L)$ alakú (-val izomorf).

Ha $a_1 = b_1$ és $a_2 = b_2$, akkor $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. (Szorzásra is.)

Ha $a_1 \equiv b_1 \pmod{10}$ és $a_2 \equiv b_2 \pmod{10}$, akkor

$a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2 \pmod{10}$. (Szorzásra is.)

Definíció

Ha egy L hálón értelmezett $\equiv$ reláció "így viselkedik" az L háló $\vee$, $\wedge$ műveletekre nézve, akkor (háló)kongruenciának nevezzük. Az L kongruenciái maguk is hálót alkotnak: $\text{Con}(L)$, azaz $(\text{Con}(L); \subseteq)$

Tétel (Funayama & Nakayama 1942, Dilworth)

$\text{Con}(L)$ disztributív háló. Fordítva: ha D véges disztributív háló, akkor $\text{Con}(L)$ alakú (-val izomorf).

Cél: minél szebb L -et találni; az ilyen tételeket itt (kongruenciahálós) *reprezentációtételeknek* fogom nevezni. **Ennek érdekében** definiáljuk az alábbiakat (de majd a struktúratételünk többet elárul róluk).

Definíció (Grätzer & Knapp: I, Acta, 2007)

Legyen $(L; \leq, \vee, \wedge)$, röviden csak L , egy háló.

- L *planáris*, ha Hasse-diagramja síkgráf és L véges.
- L *sovány*, ha L véges és nincs három, páronként összehasonlíthatatlan eleme, hogy mindegyikből lefelé csak egyetlen él indul.
- L *féligmoduláris* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x, y, z \in L$, ha $x \prec y$, akkor $x \vee z \preceq y \vee z$ (ld. *Swing lattice játék*)

Definíció (Grätzer & Knapp: III, Acta, 2009)

L *rektanguláris* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ *ha planáris, féligmoduláris, és van $a, b \in L$, melyek mindegyikéből felfelé is és lefelé is egyetlen él indul ki, $a \wedge b = 0_L$ (legkisebb elem) és $a \vee b = 1_L$ (legnagyobb elem).*

Tétel (CzG–Schmidt, 2012)

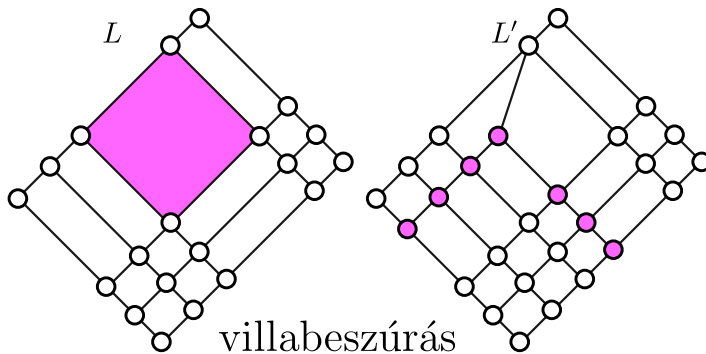
(Ld. következő ábrák.) Sovány rektanguláris hálók = rácsból villák beszúrásával (ld. ábra) nyerhető hálók. Rektanguláris hálók: sovány rektangulárisból indulva fedő négyzetek M_3 -má alakításával nyerhető hálók. Planáris féligmoduláris hálók: ezekből sarkok elhagyásával nyerhető hálók.

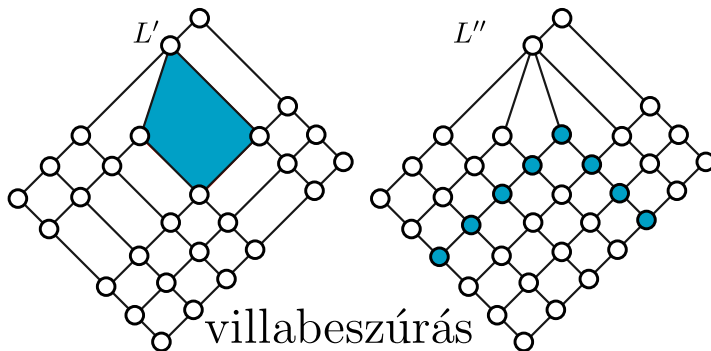
Definíció (Grätzer & Knapp: III, Acta, 2009)

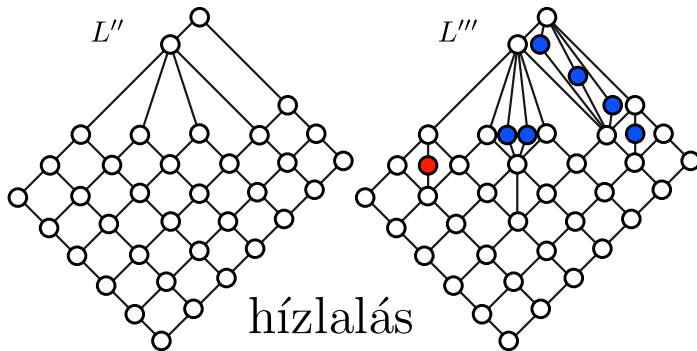
L *rektanguláris* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ ha *planáris*, *féligrmoduláris*, és van $a, b \in L$, melyek mindegyikéből felfelé is és lefelé is egyetlen él indul ki, $a \wedge b = 0_L$ (legkisebb elem) és $a \vee b = 1_L$ (legnagyobb elem).

Tétel (CzG–Schmidt, 2012)

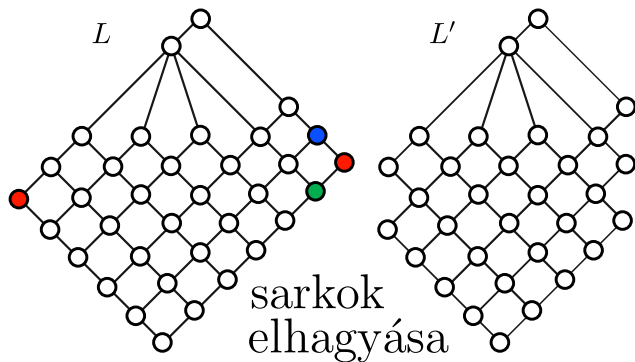
(*Ld. következő ábrák.*) Sovány rektanguláris hálók = rácsból villák beszúrásával (ld. ábra) nyerhető hálók. Rektanguláris hálók: sovány rektangulárisból indulva fedő négyzetek M_3 -má alakításával nyerhető hálók. Planáris féligrmoduláris hálók: ezekből sarkok elhagyásával nyerhető hálók.







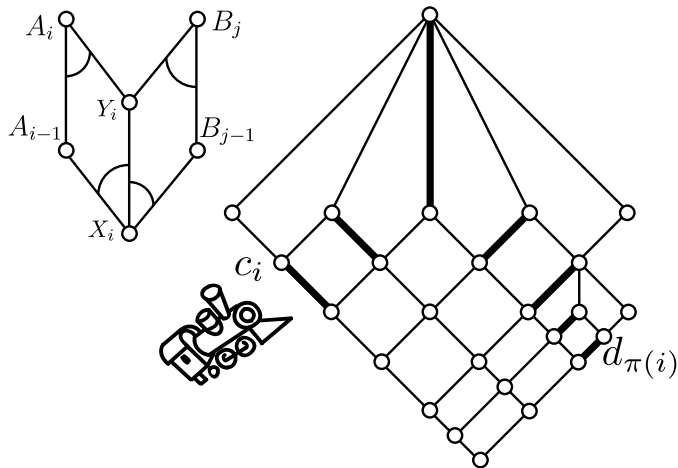
hízlalás



A sovány féligmoduláris hálók nemcsak a kongruenciák miatt fontosak: ezen hálók vizsgálatával javíthatjuk a klasszikus Jordan–Hölder-tételt (1889).

Le-fel párosítás:

$\vec{A} : \{1\} = A_0 \triangleleft A_1 \triangleleft \cdots \triangleleft A_k = G$ egy kompozíciólánc, faktori:
 A_i/A_{i-1} . $\vec{B} : \{1\} = B_0 \triangleleft B_1 \triangleleft \cdots \triangleleft B_k = G$ pedig egy másik kompozíciólánc.

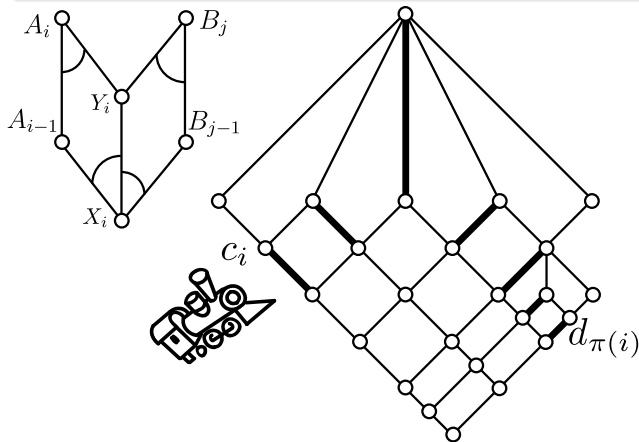


Tétel (Grätzer–Nation, AU 64, 309–311, 2010)

Van ilyen "le-fel" párosítás.

Tétel (CzG–Schmidt Tamás, AU 66, 69–79, 2011)

Csak egy van, azaz véges (kompozícióláncú) csoport bármely két kompozíciólánca között pontosan egy „le-fel” párosítás létezik.



Tétel (CzG–Dékány–Gyenizse–Kulin, AU 75 33–50, 2016)

Az n hosszúságú sovány rektanguláris hálók száma aszimptotikusan $(n-2)! \cdot e^2/2$.

$$e = \lim(1 + 1/n)^n \approx 2,718\,281\,828\,459\,045\,235\,360\,287\,471\,35\dots$$

Kapcsolat a Swing lattice játék és a kongruenciák között:

Tétel (Grätzer: Swing Lemma)

Sovány féligmoduláris hálóban a kongruenciák úgy terjednek, ahogy a piros él mozoghat a játékban. Azaz, ha p és q élek, akkor $\text{con}(p)$ összeejti a q él két végpontját $\iff$ a piros él a játékban p -ből eljuthat q -ba.

Rövidebb új bizonyítás: CzG & Makay Géza 2016 $\rightarrow$ Acta.

Tétel (Grätzer & Knapp III, Acta, 2009)

Bármely legalább 2-elemű D véges disztributív háló $\text{Con}(L)$ alakú, ahol L rektanguláris.

Ha L filter egy véges K hálóban, akkor a

$$\text{Con}(K) \rightarrow \text{Con}(L), \quad \Theta \mapsto \Theta \cap (L \times L)$$

ún. *megszorítás* egy $\{0, 1\}$ -őrző hálóhomorfizmus. Sok *szimultán reprezentációs tétel* volt korábban (Grätzer, Schmidt, Lakser, ...), itt is az a cél, hogy minél szebb hálókka. Grätzer (2016): "The Congruences of a Finite Lattice (2006, 2016)" monográfia.

Tétel (Grätzer & Knapp III, Acta, 2009)

Bármely legalább 2-elemű D véges disztributív háló $\text{Con}(L)$ alakú, ahol L rektanguláris.

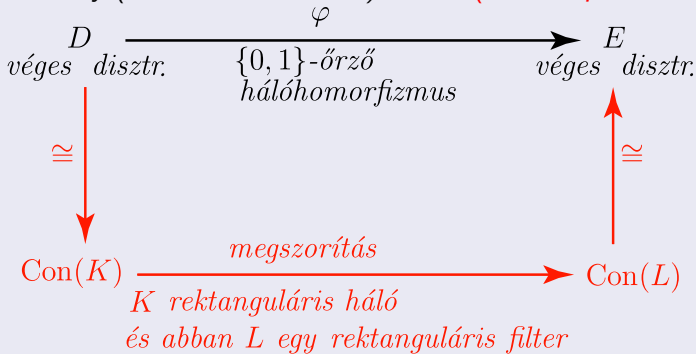
Ha L filter egy véges K hálóban, akkor a

$$\text{Con}(K) \rightarrow \text{Con}(L), \quad \Theta \mapsto \Theta \cap (L \times L)$$

ún. *megszorítás* egy $\{0, 1\}$ -őrző hálóhomorfizmus. Sok *szimultán reprezentációs tétel* volt korábban (Grätzer, Schmidt, Lakser, ...), itt is az a cél, hogy minél szebb hálókval. Grätzer (2016): "The Congruences of a Finite Lattice (2006, 2016)" monográfia.

Tétel (CzG, AU 67 (2012), 313-345)

Bármely (ld. ábra fekete része) *létezik* (ld. ábra piros része).



Ez a tétel Schmidt Tamás tételét általánosítja injektív φ -ről (más néven beágyazásról) tetszőleges φ -re.

Teljes háló: bármely részhalmazának van egyesítése és metszetet.

Teljes kongruencia: a végtelen változós egyesítés és metszés is megőrzi.

Már vagy két évtizede folyt a kongruenciahálós tételek „gyártása”, amikor (1983) a *teljes kongruenciák* $\text{Com}(L)$ hálójáról még semmit sem tudtunk azon túl, hogy *teljes hálók*. (Ma már) tudjuk, hogy ezek nem disztributívak; sőt, semmilyen speciális tulajdonságuk nincs. Egy háló *erősen atomos*, ha bármely $a \neq 1$ elemét valamelyik elem követi (azaz, $\exists b$ hogy $a \prec b$).

Tétel (Freese, Grätzer and Schmidt 1991)

Bármely K teljes hálóhoz létezik L erősen atomos moduláris teljes háló, hogy $K \cong \text{Com}(L)$.

Teljes háló: bármely részhalmazának van egyesítése és metszetet.

Teljes kongruencia: a végtelen változós egyesítés és metszés is megőrzi.

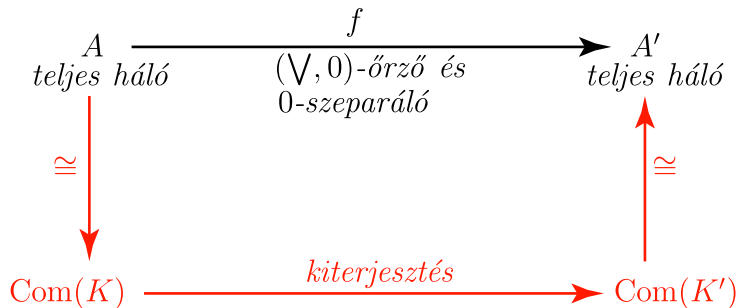
Már vagy két évtizede folyt a kongruenciahálós tételek „gyártása”, amikor (1983) a *teljes kongruenciák* $\text{Com}(L)$ hálójáról még semmit sem tudtunk azon túl, hogy *teljes hálók*. (Ma már) tudjuk, hogy ezek nem disztributívak; sőt, semmilyen speciális tulajdonságuk nincs. Egy háló *erősen atomos*, ha bármely $a \neq 1$ elemét valamelyik elem követi (azaz, $\exists b$ hogy $a \prec b$).

Tétel (Freese, Grätzer and Schmidt 1991)

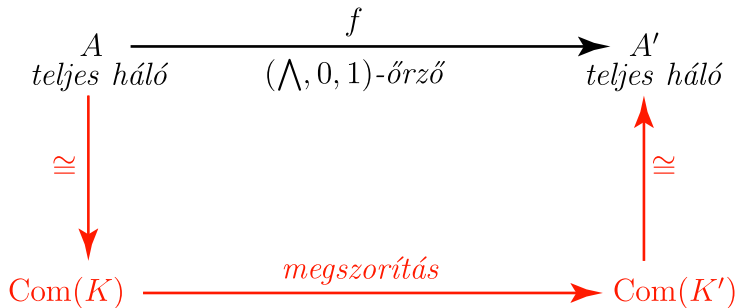
Bármely K teljes hálóhoz létezik L erősen atomos moduláris teljes háló, hogy $K \cong \text{Com}(L)$.

Főtétel (CzG, 2016)

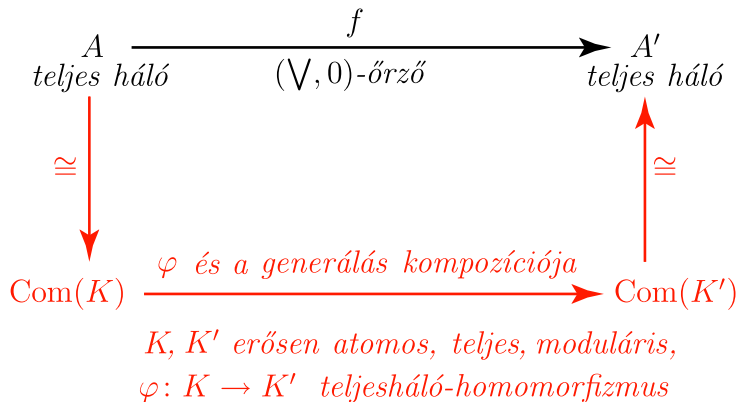
Legyen A és A' teljes háló, $f: A \rightarrow A'$ pedig egy leképezés. Az alábbi három ábrán, ha a fekete feltétel teljesül, akkor *léteznek a piros objektumok is a ábrán mondott feltételekkel* úgy, hogy a diagram kommutatív.

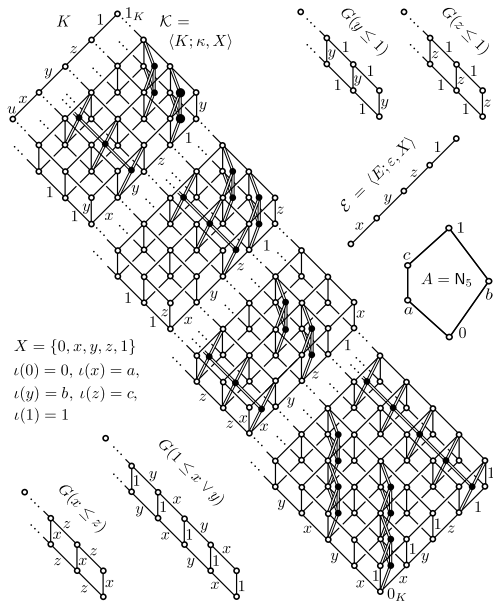


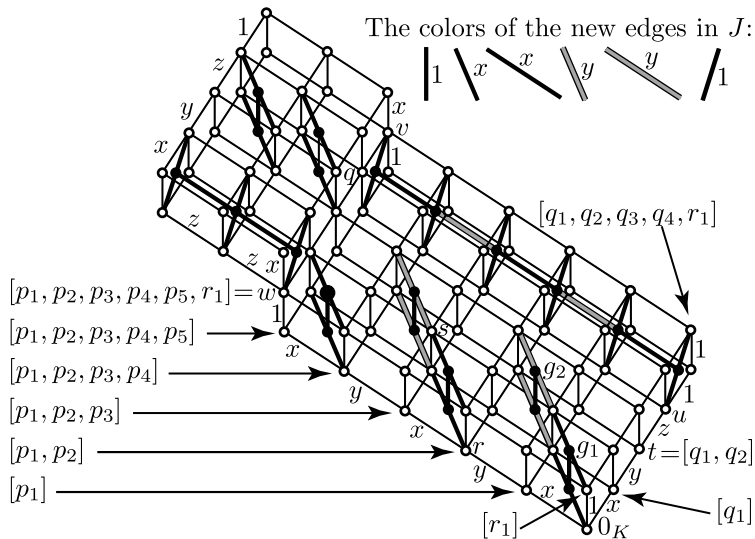
*K, K' erősen atomos, teljes, moduláris,
 K főideál K' -ben*

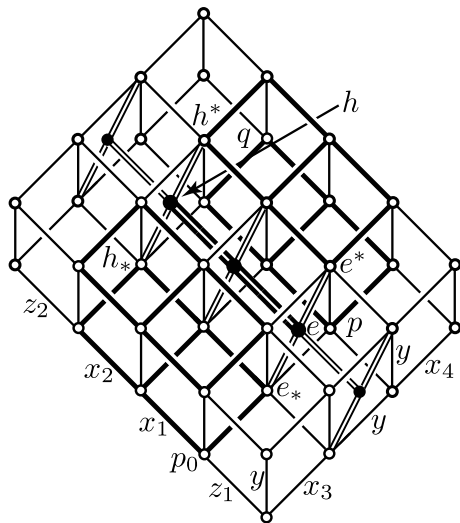


*K, K' erősen atomos, teljes, moduláris,
 K' részhálója K -nak*









Főkongruencia: egyetlen elempár által generált kongruencia.

$\text{Princ}(L)$: az L háló főkongruenciáinak részbenrendezett halmaza ("poset") a $\subseteq$ -ra nézve.

Tétel (Grätzer, 2013)

Minden 0, 1-elemes Q részbenrendezett halmaz reprezentálható $\text{Princ}(L)$ alakban (izomorfia erejéig).

Ha nincs 1, akkor sokkal nehezebb és csak $\aleph_0$ -ig van megoldva.

Tétel (CzG, AU 75 (2016), 351–380)

Ha $|Q| \leq \aleph_0$, akkor Q pontosan akkor reprezentálható $\text{Princ}(L)$ alakban, ha $0 \in Q$ és Q irányított.

Főkongruencia: egyetlen elempár által generált kongruencia.

$\text{Princ}(L)$: az L háló főkongruenciáinak részbenrendezett halmaza ("poset") a $\subseteq$ -ra nézve.

Tétel (Grätzer, 2013)

Minden 0, 1-elemes Q részbenrendezett halmaz reprezentálható $\text{Princ}(L)$ alakban (izomorfia erejéig).

Ha nincs 1, akkor sokkal nehezebb és csak $\aleph_0$ -ig van megoldva.

Tétel (CzG, AU 75 (2016), 351–380)

Ha $|Q| \leq \aleph_0$, akkor Q pontosan akkor reprezentálható $\text{Princ}(L)$ alakban, ha $0 \in Q$ és Q irányított.

Nemcsak két részbenrendezett halmaz, hanem jóval több is reprezentálható. Az állítást csak kategóriaelméleti nyelven lehet precízen megfogalmazni; a lényege az alábbi:

Tétel (CzG, <http://arxiv.org/abs/1508.00921> , 2015)

Legyen adott halmaznyi sok $0,1$ -elemes részbenrendezett halmaz és köztük halmaznyi sok $0,1$ -őrző monoton leképezés (bármelyik kettő között is lehet ∞ sok leképezés), úgy, hogy az adott leképezések halmaza zárt a leképezésszorozásra. Ha az adott leképezések mindegyike „injektív leképezés módjára viselkedik” a tekintett rendszeren belül, akkor ez a rendszer reprezentálható $\text{Princ}(L)$ -ekkel "természetes módon".

A "természetes mód" kb. azt jelenti, mint a Főtétel harmadik állításában. A konstruált L -ek szép tulajdonságokkal bírnak: önduálisak és a hosszuk 5.

Érdekes hozadéka a fenti tétel bizonyításának az *üstökös funktor*. Ismeretes, hogy minden leképezés egy szürjektív és egy injektív szorzata. Ezt meg lehet csinálni egy leképezéssel, de többel egyszerre természetes módon ez nem megy. Viszont érvényes az alábbi.

Jelölés: ha egy **A** kategória részkategóriája egy **B** kategóriának, akkor az (identikusan "viselkedő") $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ *beágyazó funktort* $\iota_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$ fogja jelölni. Az előző tétel bizonyítása részben az alábbi tételen alapul.

Tétel (CzG, ugyanazon arXiv, 2015)

*Ha $\mathbf{A}$ kis konkrét kategória, akkor létezik egy $F_{\text{com}}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ úgynevezett üstökös funktor és egy $\pi^{\text{com}}: F_{\text{com}} \rightarrow \iota_{\mathbf{A}, \mathbf{Set}}$ természetes transzformáció úgy, hogy minden $\mathbf{A}$ -beli **monomorfizmus** F_{com} melletti képe injektív leképezés és π^{com} komponensei szürjektív leképezések.*

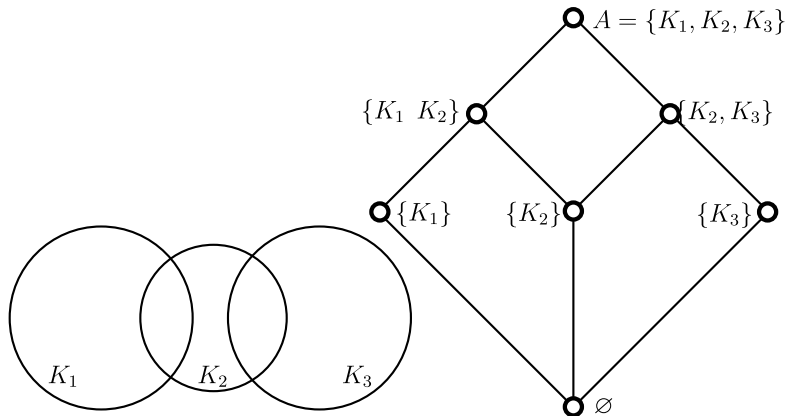
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \\ F_{\text{com}}(X) & \xrightarrow{F_{\text{com}}(g)} & F_{\text{com}}(Y) \\ \downarrow \pi_X^{\text{com}} & & \downarrow \pi_Y^{\text{com}} \\ \iota_{\mathbf{A}, \text{Set}}(X) & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{A}, \text{Set}}(g)} & \iota_{\mathbf{A}, \text{Set}}(Y) \end{array}$$



Definíció (CzG–Kincses János, 2016 $\rightarrow$ Acta)

Ha A halmaz és $\Phi: P(A) \rightarrow P(A)$ olyan lezárási operátor, $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, és lokálisan teljesül a kicserélhetetlenségi axióma, azaz $\forall$ véges $X \subseteq A$ -ra és $u \in A \setminus \Phi(X)$ -re $\Phi(X \cup \{u\})$ meghatározza u -t, akkor $(A; \Phi)$ (absztrakt) lokálisan konvex geometria. Altér: olyan $X \subseteq A$ hogy $\Phi(X) = X$.

Például $A = \{ \text{sík pontjai} \}$ (nem feltétlenül az összes), ahol $\Phi(X)$ az X konvex burkának A -ba eső része. Vagy $A = \{ \text{a sík körei} \}$ (nem feltétlenül az összes) hasonló módon a konvex burok képzésére:



Tétel (CzG, 2014)

Bármely sovány féligmoduláris háló duálisan reprezentálható körökből álló konvex geometria altérhálójaként.

Tétel (Richter–Rogers, 2015)

Bármely véges absztrakt (lokálisan) konvex geometria reprezentálható poligonok konvex geometriájaként.

Az összes poligonból álló halmaz nem alkot lokálisan konvex geometriát, és az alábbi tétel sem menne poligonokkal.

Tétel (CzG & Kincses János, 2016. aug.23. → Acta)

Létezik "majdnem-körök" olyan affin transzformációkra nézve zárt halmaza, hogy azokkal már bármely véges absztrakt konvex geometria reprezentálható (köröket tetszőleges pontossággal közelítő majdnem-körökkel), és amelyek lokálisan konvex geometriát alkotnak.

Megjegyzés: itt a "majdnem" jelző a körök mellől nem hagyható el; ez pl. az Adaricheva-Bolat tételből következik.

Köszönöm a figyelmet! A jelen fájl innen érhető el:

<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/>

<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/conference-talks/conflectures0.html>

Tétel (CzG & Kincses János, 2016. aug.23. → Acta)

Létezik "majdnem-körök" olyan affin transzformációkra nézve zárt halmaza, hogy azokkal már bármely véges absztrakt konvex geometria reprezentálható (köröket tetszőleges pontossággal közelítő majdnem-körökkel), és amelyek lokálisan konvex geometriát alkotnak.

Megjegyzés: itt a "majdnem" jelző a körök mellől nem hagyható el; ez pl. az Adaricheva-Bolat tételből következik.

Köszönöm a figyelmet! A jelen fájl innen érhető el:

<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/>

<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/conference-talks/conflectures0.html>