

Hálókka a Frankl-sejtésről*

Czédli Gábor, Maróti Miklós, Schmidt E. Tamás

Előadás: 2008. október 20-án a Rényi Intézetben

2008. október 19.

*<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/>

—holnaptól!

Frankl's conjecture, union-closed sets conjecture

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A), \exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0.$ CzG-MM-SchT 0'/65'

Frankl Péter (1979): $(\underbrace{\mathcal{F}}_{n \geq 2}, \cup, \emptyset) \leq (P(\underbrace{A}_m), \cup, \emptyset);$

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A), \exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 0'/65'

Frankl Péter (1979): $(\underbrace{\mathcal{F}}_{n \geq 2}, \cup, \emptyset) \leq (P(\underbrace{A}_m), \cup, \emptyset)$; ekkor (a sejtés szerint) **létezik olyan $b \in A$, amely több mint az $\mathcal{F}$ -beli halmazok felében benne van.**

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 0'/65'

Frankl Péter (1979): $(\underbrace{\mathcal{F}}_{n \geq 2}, \cup, \emptyset) \leq (P(\underbrace{A}_m), \cup, \emptyset)$; ekkor (a sejtés szerint) **létezik olyan $b \in A$, amely több mint az $\mathcal{F}$ -beli halmazok felében benne van.** $b \in A$ -ra legyen a b elem „súlya” az alábbi:

$$w(b) = |\{X \in \mathcal{F} : b \in X\}| - |\{X \in \mathcal{F} : b \notin X\}|.$$

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A), \exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 0'/65'

Frankl Péter (1979): $(\underbrace{\mathcal{F}}_{n \geq 2}, \cup, \emptyset) \leq (P(\underbrace{A}_m), \cup, \emptyset)$; ekkor (a sejtés szerint) **létezik olyan $b \in A$, amely több mint az $\mathcal{F}$ -beli halmazok felében benne van.** $b \in A$ -ra legyen a b elem „súlya” az alábbi:

$$w(b) = |\{X \in \mathcal{F} : b \in X\}| - |\{X \in \mathcal{F} : b \notin X\}|.$$

Ekkor a sejtés $\iff$ **létezik $b \in A$, hogy $w(b) \geq 0$.**

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A), \exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0.$ CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk,

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A), \exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0.$ CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl.

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A), \exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0.$ CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts),

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl.

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m$$

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12\left(\frac{3}{2}\right)^{\lceil m/3 \rceil} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5. \quad (1)$$

$$n \geq$$

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12\left(\frac{3}{2}\right)^{\lceil m/3 \rceil} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5. \quad (1)$$

$$n \geq 2^m - 2^{m/2}, \text{ sőt ekkor } \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad [\text{CzG 2007}] \quad (2)$$

Itt $\overline{w}_{\mathcal{F}} := \sum_{b \in A} w(b) / |A|$. (

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12\left(\frac{3}{2}\right)^{\lceil m/3 \rceil} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5. \quad (1)$$

$$n \geq 2^m - 2^{m/2}, \text{ sőt ekkor } \bar{w}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad [\text{CzG 2007}] \quad (2)$$

Itt $\bar{w}_{\mathcal{F}} := \sum_{b \in A} w(b) / |A|$. (Ellentétben a Frankl sejtéssel, ez az **átlagolt Frankl-tulajdonság** nem mindig igaz. Viszont hasznos, mert Gao–Yu -t javította.)

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12\left(\frac{3}{2}\right)^{\lceil m/3 \rceil} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5. \quad (1)$$

$$n \geq 2^m - 2^{m/2}, \text{ sőt ekkor } \bar{w}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad [\text{CzG 2007}] \quad (2)$$

Itt $\bar{w}_{\mathcal{F}} := \sum_{b \in A} w(b)/|A|$. (Ellentétben a Frankl sejtéssel, ez az **átlagolt Frankl-tulajdonság** nem mindig igaz. Viszont hasznos, mert Gao–Yu -t javította.) **Meddig javítható (2)?**

M

$(\mathcal{F}; \cup) \subseteq P(A)$, $\exists b \ w(b) = |F \ni b| - |F \not\ni b| \geq 0$. CzG-MM-SchT 2'/63'

Három tucat cikk, speciális esetek, pl. ha $n = |\mathcal{F}| \leq 40$ (Roberts), ha $m = |A| \leq 11$ (Bošnjak and P. Marković), vagy pl. **Gao and Yu** „nagy uniózárt családokra”, azaz amelyekre

$$n \geq 2^m - 12\left(\frac{3}{2}\right)^{\lceil m/3 \rceil} - \frac{1}{2}\binom{m}{3} - \frac{5}{3}m + 44.5. \quad (1)$$

$$n \geq 2^m - 2^{m/2}, \text{ sőt ekkor } \bar{w}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad [\text{CzG 2007}] \quad (2)$$

Itt $\bar{w}_{\mathcal{F}} := \sum_{b \in A} w(b)/|A|$. (Ellentétben a Frankl sejtéssel, ez az **átlagolt Frankl-tulajdonság** nem mindig igaz. Viszont hasznos, mert Gao–Yu -t javította.) **Meddig javítható (2)?**

Megjegyzés: ha valaki megoldja a Frankl-sejtést, a három tucat cikk zöme fölöslegessé válik. Az alábbi eredmény viszont továbbra is érdekes marad!

[Czg 2007]: $|\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^{m/2} \Rightarrow \overline{\mathbf{w}}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 4'/61'

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$ -ig mehetünk.*

[Czg 2007]: $|\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^{m/2} \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 4'/61'

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$ -ig mehetünk.* Legyen $m = |A| \geq 3$.

(a) *Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$ -re **nem** érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.*

[Czg 2007]: $|\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^{m/2} \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 4'/61'

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$ -ig mehetünk.* Legyen $m = |A| \geq 3$.

(a) *Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$ -re **nem** érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.*

(b) *Ha az m -elemű alaphalmazokra érvényes a Frankl-sejtés (ez a feltevés szépséghiba...),*

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$ -ig mehetünk.* Legyen $m = |A| \geq 3$.

(a) *Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$ -re **nem** érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.*

(b) *Ha az m -elemű alaphalmazokra érvényes a Frankl-sejtés (ez a feltevés szépséghiba...), akkor*

$$n := |\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^m/3 \Rightarrow$$

1. Tétel. *Pontosán $2^m/3$ -ig mehetünk.* Legyen $m = |A| \geq 3$.

(a) Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$ -re **nem** érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.

(b) Ha az m -elemű alaphalmazokra érvényes a Frankl-sejtés (ez a feltevés szépséghiba...), akkor

$$n := |\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad (3)$$

1. Gy

1. Tétel. *Pontosan $2^m/3$ -ig mehetünk.* Legyen $m = |A| \geq 3$.

(a) Van olyan $\mathcal{F}$, hogy $|\mathcal{F}| = 2^m - \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\mathcal{F}$ -re **nem** érvényes az átlagolt Frankl-tulajdonság.

(b) Ha az m -elemű alaphalmazokra érvényes a Frankl-sejtés (ez a feltevés szépséghiba...), akkor

$$n := |\mathcal{F}| \geq 2^m - 2^{m/3} \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0. \quad (3)$$

1. Gyengébb sejtés Az $2^{m/2}$ növelhető valami $f(m)$ -re úgy, hogy $f(m)/2^{m/2} \rightarrow \infty$ akkor is, ha nem tesszük fel a Frankl-sejtést az m -elemű alaphalmazokra. (Tudjuk: $f(m) - 2^{m/2} \rightarrow \infty$.)

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 6'/59'

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n -elemű háló,
 $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 6'/59'

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n -elemű háló,
 $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus \uparrow b| - |\uparrow b| \geq 0$.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 6'/59'

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n -elemű háló,
 $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus \uparrow b| - |\uparrow b| \geq 0$.

Azaz $|\uparrow b| \leq |L \setminus \uparrow b|$.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 6'/59'

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n -elemű háló,
 $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus \uparrow b| - |\uparrow b| \geq 0$.

Azaz $|\uparrow b| \leq |L \setminus \uparrow b|$.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 6'/59'

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n -elemű háló,
 $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus \uparrow b| - |\uparrow b| \geq 0$.
Azaz $|\uparrow b| \leq |L \setminus \uparrow b|$. Azaz $\uparrow b$ „kicsi”.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 6'/59'

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n -elemű háló,
 $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus \uparrow b| - |\uparrow b| \geq 0$.
Azaz $|\uparrow b| \leq |L \setminus \uparrow b|$. Azaz $\uparrow b$ „kicsi”.

Itt is lehet átlagolt sejtésről beszélni.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 6'/59'

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n -elemű háló,
 $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus \uparrow b| - |\uparrow b| \geq 0$.
Azaz $|\uparrow b| \leq |L \setminus \uparrow b|$. Azaz $\uparrow b$ „kicsi”.

Itt is lehet átlagolt sejtésről beszélni. n és m ugyanaz az átmenet során!

A h

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 6'/59'

Hálóelméleti verzió (Stanley, Poonen) Ha L egy n -elemű háló, $|J(L)| = m$, akkor van olyan $b \in J(L)$, hogy $|L \setminus \uparrow b| - |\uparrow b| \geq 0$.
Azaz $|\uparrow b| \leq |L \setminus \uparrow b|$. Azaz $\uparrow b$ „kicsi”.

Itt is lehet átlagolt sejtésről beszélni. n és m ugyanaz az átmenet során!

A hálós megközelítés előnye: Pl. $(m, n) = (5, 12)$: a háló könnyen áttekinthető, a Venn-diagram kevésbé.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk!

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$?

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha

$$\text{Frankl}_m \text{ és } |\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0 \quad \text{CzG-MM-SchT} \quad 7'/58'$$

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok”

$$b \leq X$$

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugy

$$\text{Frankl}_m \text{ és } |\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0 \quad \text{CzG-MM-SchT} \quad 7'/58'$$

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy

$$\text{Frankl}_m \text{ és } |\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0 \quad \text{CzG-MM-SchT} \quad 7'/58'$$

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz

$$\text{Frankl}_m \text{ és } |\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0 \quad \text{CzG-MM-SchT} \quad 7'/58'$$

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2$.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel

$$\text{Frankl}_m \text{ és } |\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0 \quad \text{CzG-MM-SchT} \quad 7'/58'$$

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

$$\text{Mivel } \overline{h}(B_m) = m/2, \quad \overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow$$

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{h}(B_m) = m/2$, $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow \overline{h}(B_m \setminus \mathcal{F}) \leq m/2$. Ez indokolja, hogy $(B_m; \vee, 0)$ valódi részalgebráinak (t.i.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{h}(B_m) = m/2$, $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow \overline{h}(B_m \setminus \mathcal{F}) \leq m/2$. Ez indokolja, hogy $(B_m; \vee, 0)$ valódi részalgebráinak (t.i. az $\mathcal{F}$ -eknek) a *komplementereivel* foglalkozzunk; ezekkel könnyebb dolgozni és

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{h}(B_m) = m/2$, $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow \overline{h}(B_m \setminus \mathcal{F}) \leq m/2$. Ez indokolja, hogy $(B_m; \vee, 0)$ valódi részalgebráinak (t.i. az $\mathcal{F}$ -eknek) a *komplementereivel* foglalkozzunk; ezekkel könnyebb dolgozni és **szemiideáloknak** fogjuk őket nevezni.

Frankl_m és $|\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$ CzG-MM-SchT 7'/58'

Mármost $\mathcal{F}$ és A helyett dolgozzunk a B_m Boole-hálóban, amelyet gyakran $(B_m; \vee, \emptyset)$ -nek tekintünk! Ekkor $\mathcal{F}$ rész-félhálója B_m -nek, A pedig az atomok halmaza. ($0 \in \mathcal{F}$ mindig feltehető.)

Mikor lesz $\overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0$? (Heurisztikusan) pontosan akkor, ha „sok” $b \leq X$ pár van (ahol $b \in A$ és $X \in \mathcal{F}$), ezeket a „ b -k felől összeszámolva”. Ugyanezen párokat az X -ek felől összeszámolva ez azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{F}$ „elemei alatt átlagosan is elég sok atom van, azaz $\mathcal{F}$ elemeinek átlagos magassága elég nagy, azaz átlagosan $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2$. (Kijön. Szokásos kombinatorikai fogás.)

Mivel $\overline{h}(B_m) = m/2$, $\overline{h}(\mathcal{F}) \geq m/2 \Leftrightarrow \overline{h}(B_m \setminus \mathcal{F}) \leq m/2$. Ez indokolja, hogy $(B_m; \vee, 0)$ valódi részalgebráinak (t.i. az $\mathcal{F}$ -eknek) a *komplementereivel* foglalkozzunk; ezekkel könnyebb dolgozni és **szemiideáloknak** fogjuk őket nevezni. $\Rightarrow$ Főtétel $\Leftrightarrow$

$$\text{Frankl}_m \text{ és } |\mathcal{F}| > 2^m - 2^m/3 \Rightarrow \overline{w}_{\mathcal{F}} \geq 0 \quad \text{CzG-MM-SchT} \quad 9'/56'$$

2. Tétel. *Legyen $m \geq 3$, és legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq 2^m/3$ és m -re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\overline{h}(X) \leq m/2$.*

2. Tétel. Legyen $m \geq 3$, és legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq 2^m/3$ és m -re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\overline{h}(X) \leq m/2$.
 Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\overline{h}(X) > m/2$.

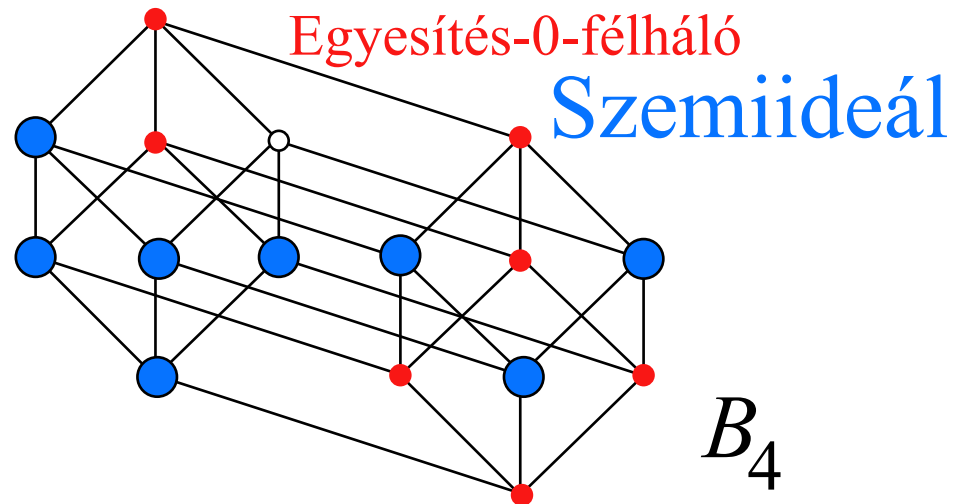
2. Tétel. Legyen $m \geq 3$, és legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq 2^m/3$ és m -re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\overline{h}(X) \leq m/2$.
 Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\overline{h}(X) > m/2$.

Szükség lesz a szemiideálok konstruktív leírására:

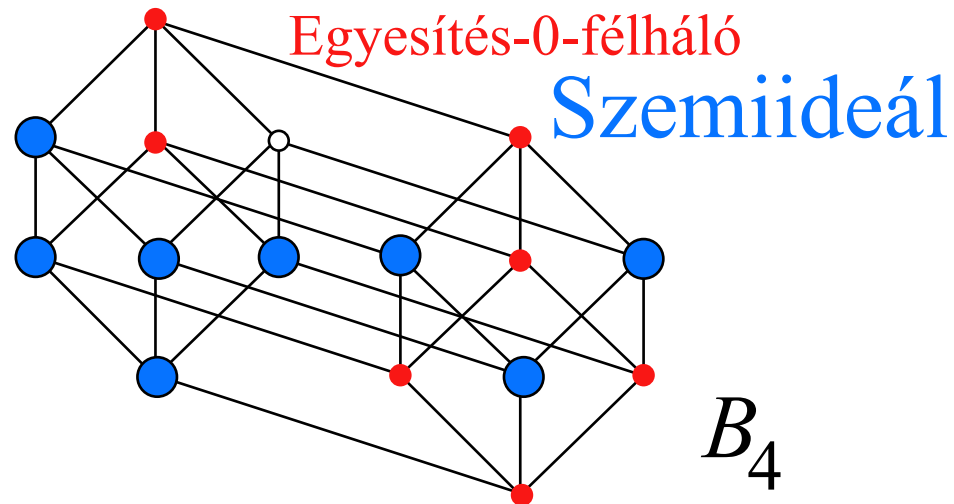
Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 11'/54'

1. Lemma. B_m szemiideáljai pontosan azok a részhalmazok, amelyek előállnak

1. Lemma. B_m szemiideáljai pontosan azok a részhalmazok, amelyek előállnak [atom, egyéb elem] alakú intervallumok uniójaként.

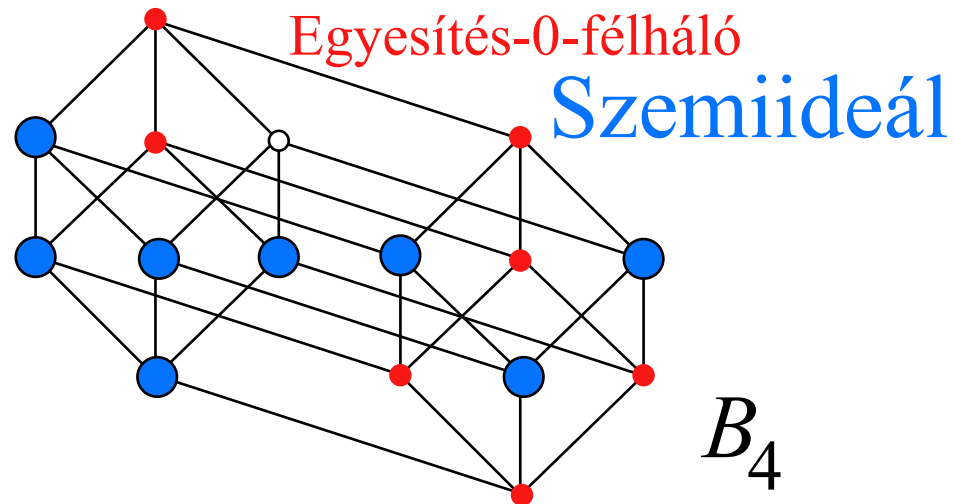


1. Lemma. B_m szemiideáljai pontosan azok a részhalmazok, amelyek előállnak [atom, egyéb elem] alakú intervallumok uniójaként.



Bizonyítás: Egyszerű házi feladat. Megj.:

1. Lemma. B_m szemiideáljai pontosan azok a részhalmazok, amelyek előállnak [atom, egyéb elem] alakú intervallumok uniójaként.



Bizonyítás: Egyszerű házi feladat. Megj.: véges disztributív hálóra is igaz, de akkor „atom” helyett „ $\vee$ -irreducibilis” kell.

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$ -ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen.

A legr

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$ -ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen.

A legrosszabnak

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$ -ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen.
A legrosszabnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az,

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$ -ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, amikor elindulunk egy atomból,

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$ -ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, amikor elindulunk egy atomból, és egyesével veszünk hozzá elemeket úgy, hogy minden egyes lépésben az elemek magasságainak összege (és ezért az átlaga is) a lehető leggyorsabban nőjön. Az ilyen szemideál neve: **mohó szemiideál**.

Kö

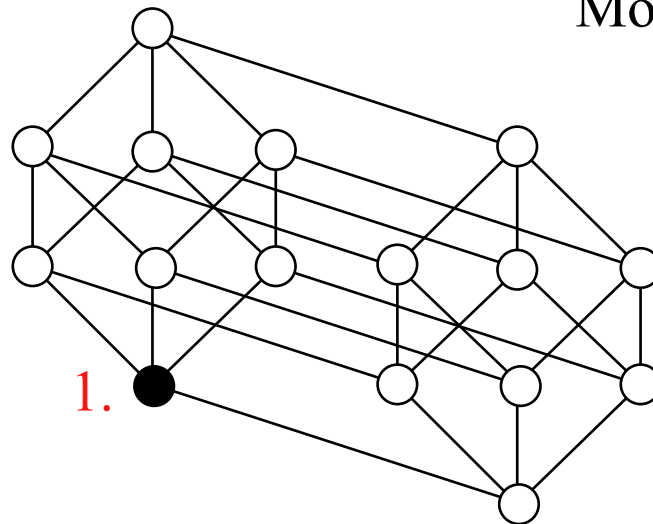
Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$ -ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, amikor elindulunk egy atomból, és egyesével veszünk hozzá elemeket úgy, hogy minden egyes lépésben az elemek magasságainak összege (és ezért az átlaga is) a lehető leggyorsabban nőjön. Az ilyen szemideál neve: **mohó szemiideál**.

Könnyű belátni, hogy B_m automorfizmusaitól eltekintve az elemszáma meghatározza a mohó szemiideált. Az áb

Láttuk, az a cél, hogy a minél nagyobb elemszámú (egészen $2^m/3$ -ig) szemiideálok átlagos magassága **kicsi** ($\leq m/2$) legyen. A legrosszabnak — **legalábbis annak gondolt** — eset az, amikor elindulunk egy atomból, és egyesével veszünk hozzá elemeket úgy, hogy minden egyes lépésben az elemek magasságainak összege (és ezért az átlaga is) a lehető leggyorsabban nőjön. Az ilyen szemideál neve: **mohó szemiideál**.

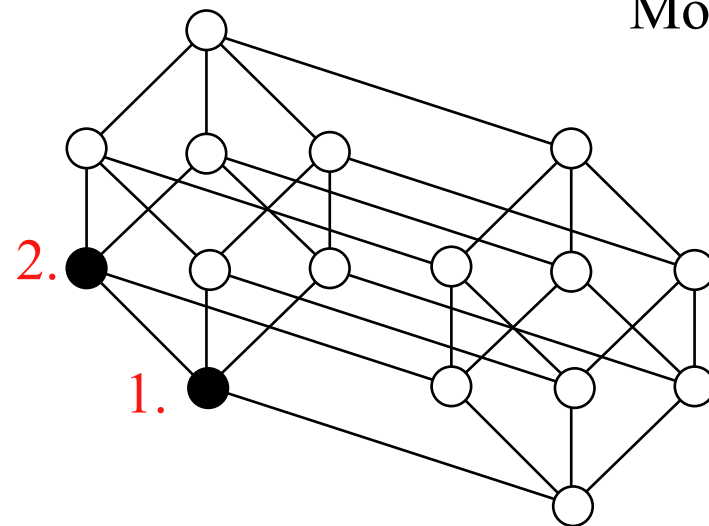
Könnyű belátni, hogy B_m automorfizmusaitól eltekintve az elemszáma meghatározza a mohó szemiideált. Az ábrán $i = 1, 2, \dots, 15$ -re $\{a_1, \dots, a_i\}$ egy i -elemű mohó szemiideálja B_4 -nek:

Mohó szemiideál



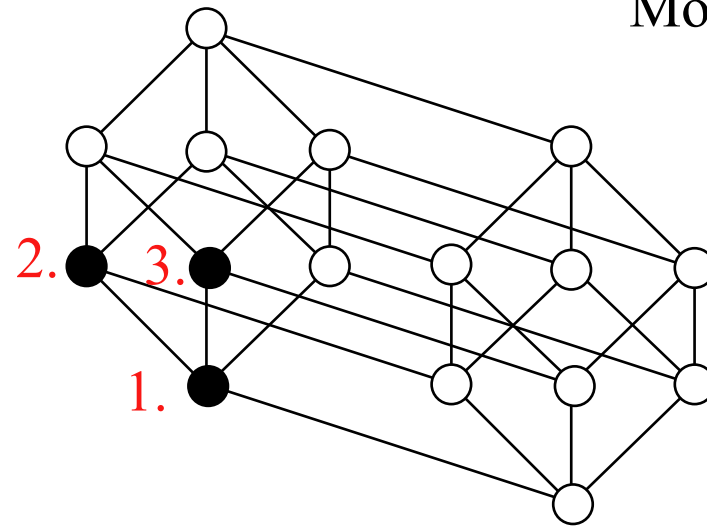
1

Mohó szemiideál



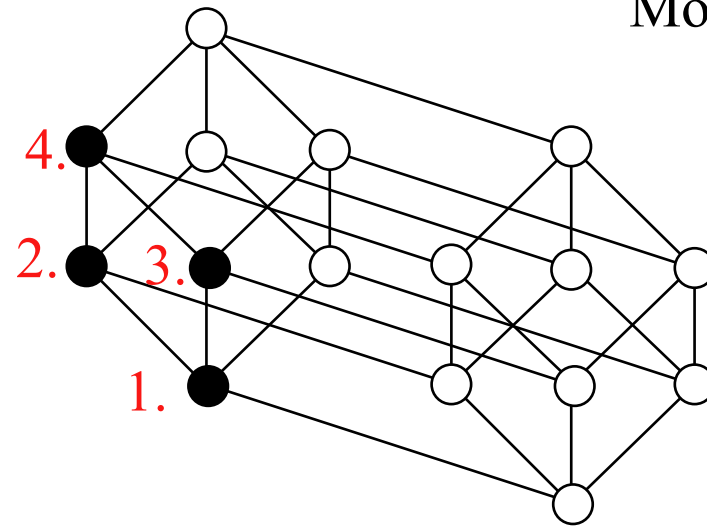
1+2

Mohó szemiideál



1+2+2

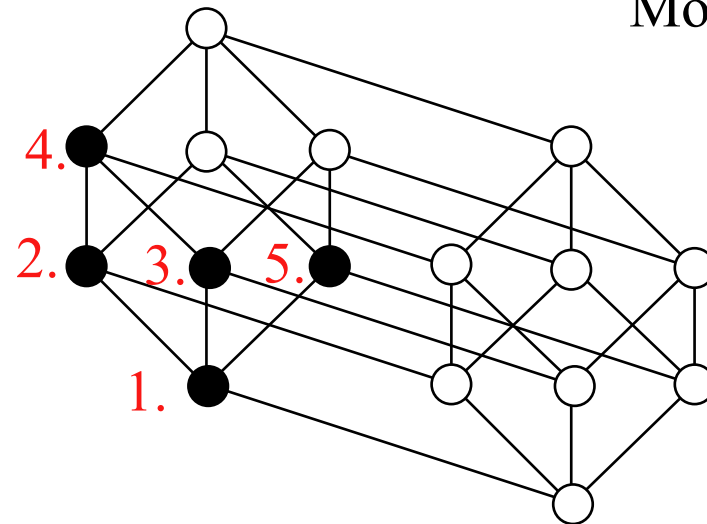
Mohó szemiideál



1+2+2+3

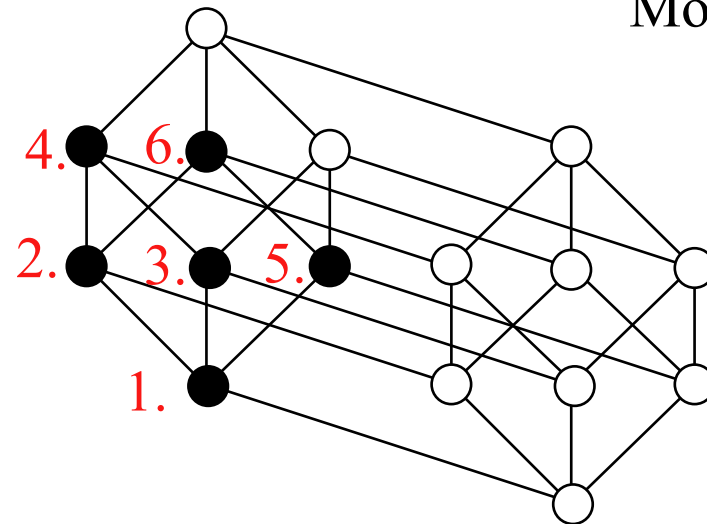
Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 14'/51'

Mohó szemiideál



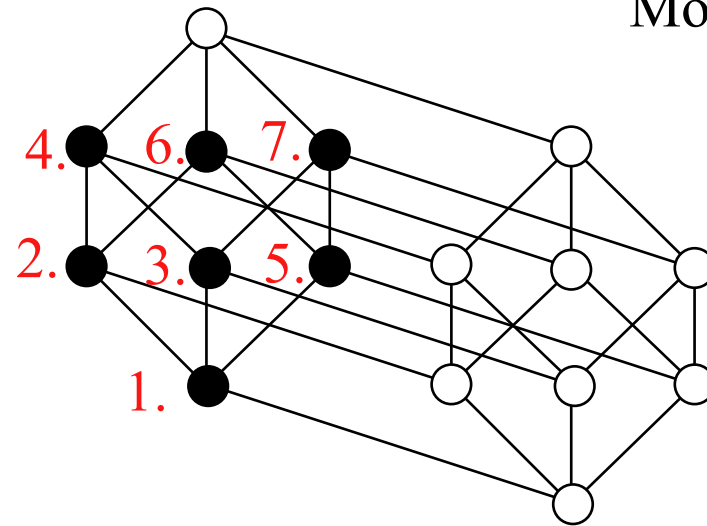
1+2+2+3+2

Mohó szemiideál



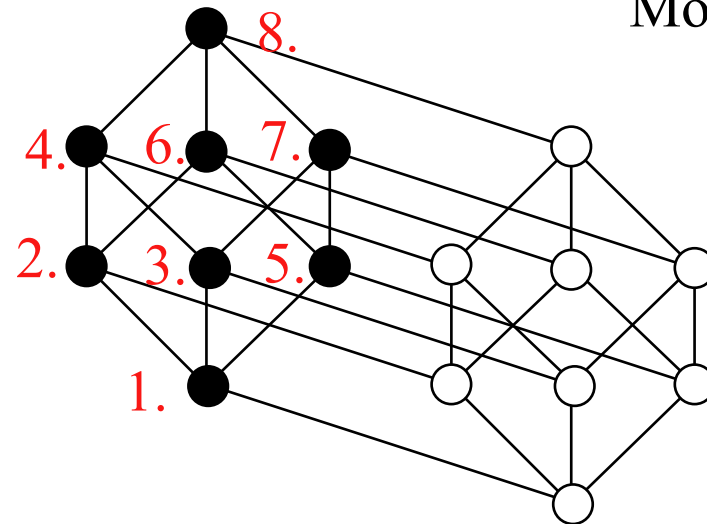
1+2+2+3+2+3

Mohó szemiideál



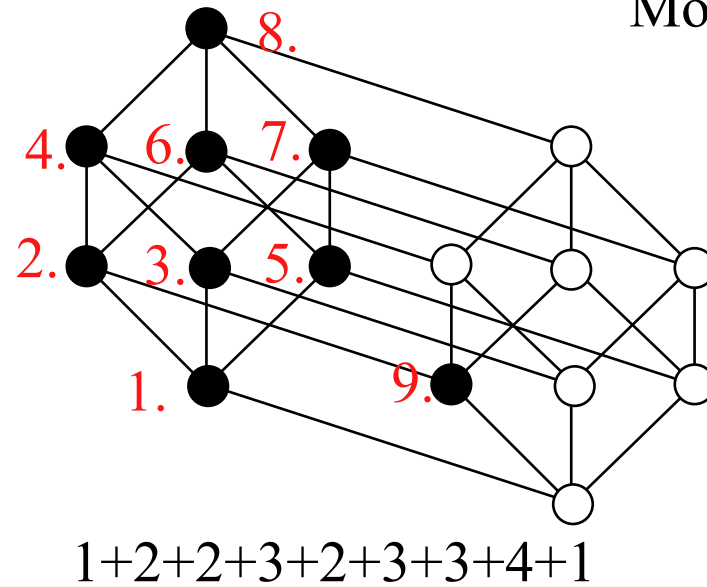
1+2+2+3+2+3+3

Mohó szemiideál

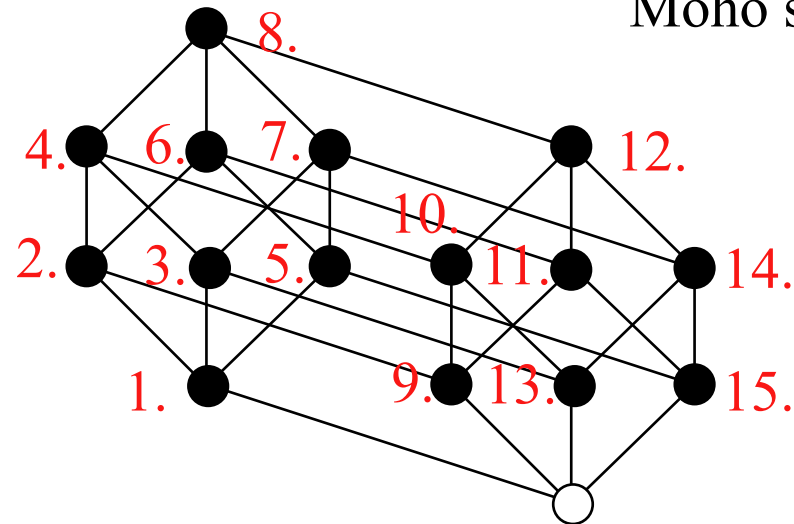


$$1+2+2+3+2+3+3+4$$

Mohó szemiideál



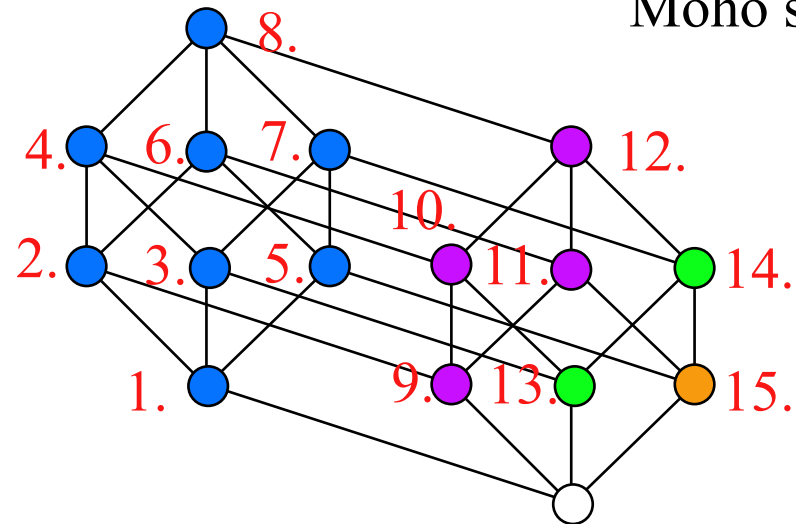
Mohó szemiideál



1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

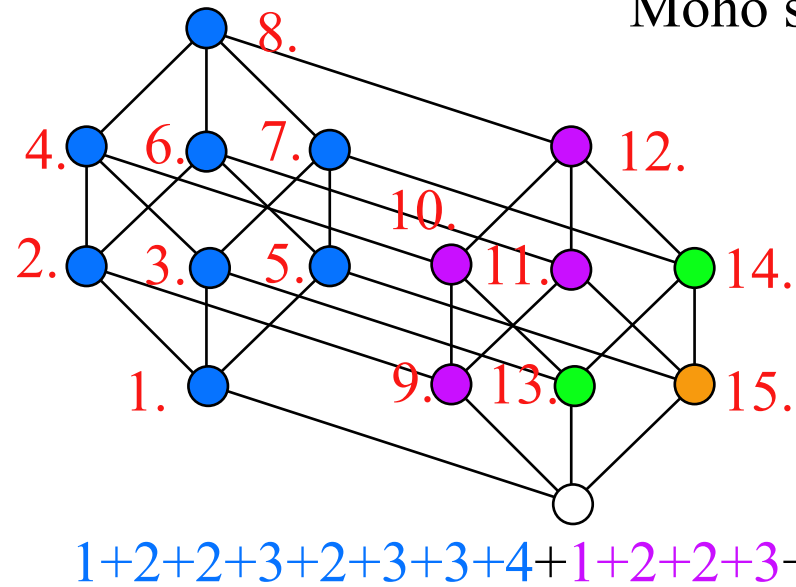
Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 15'/50'

Mohó szemiideál



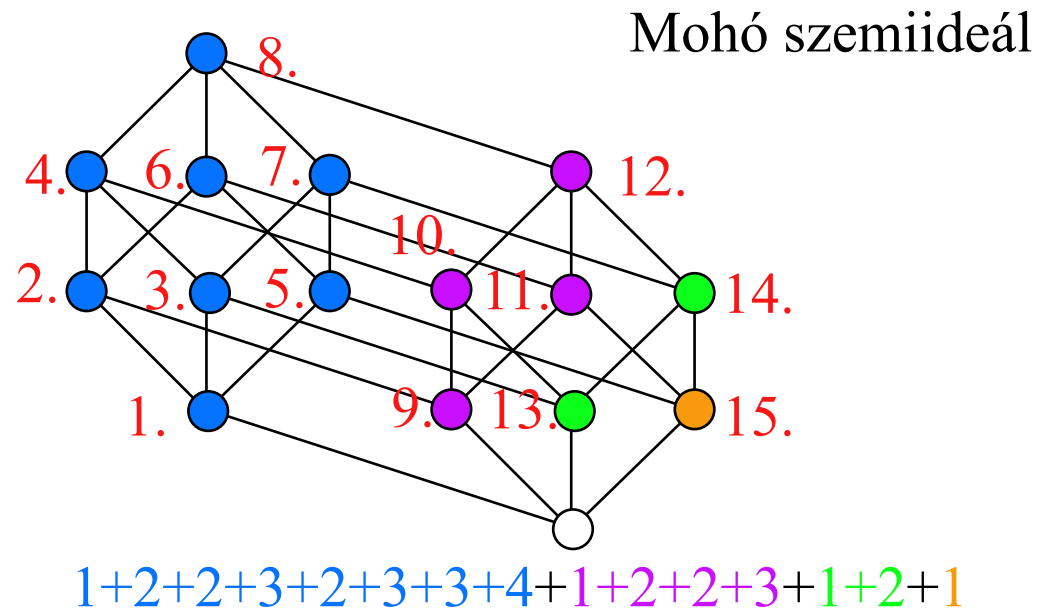
1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1

Mohó szemiideál



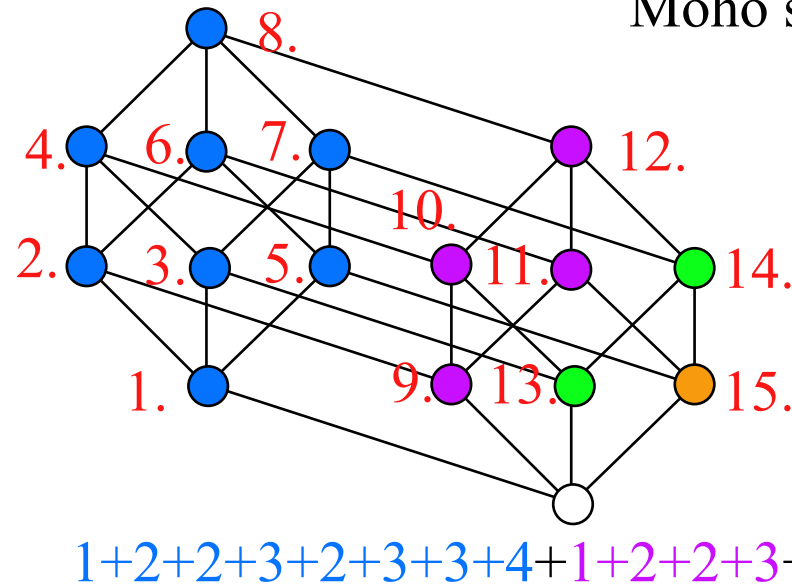
F

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 15'/50'

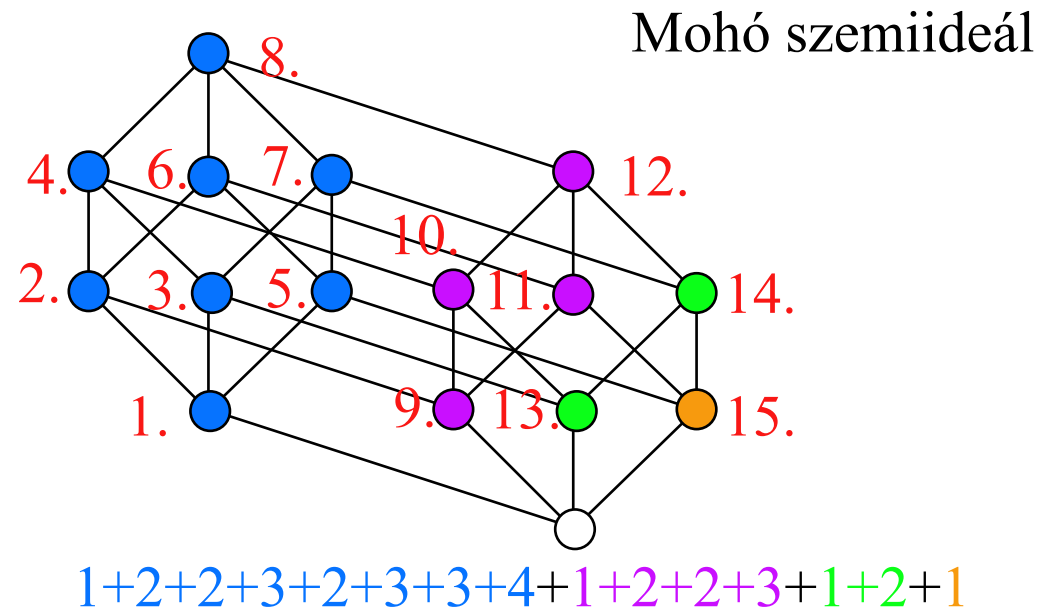


Figyeljük meg, hogy a **kék**, majd rendre a **lila**, **zöld** és narancs **intervallumokban**

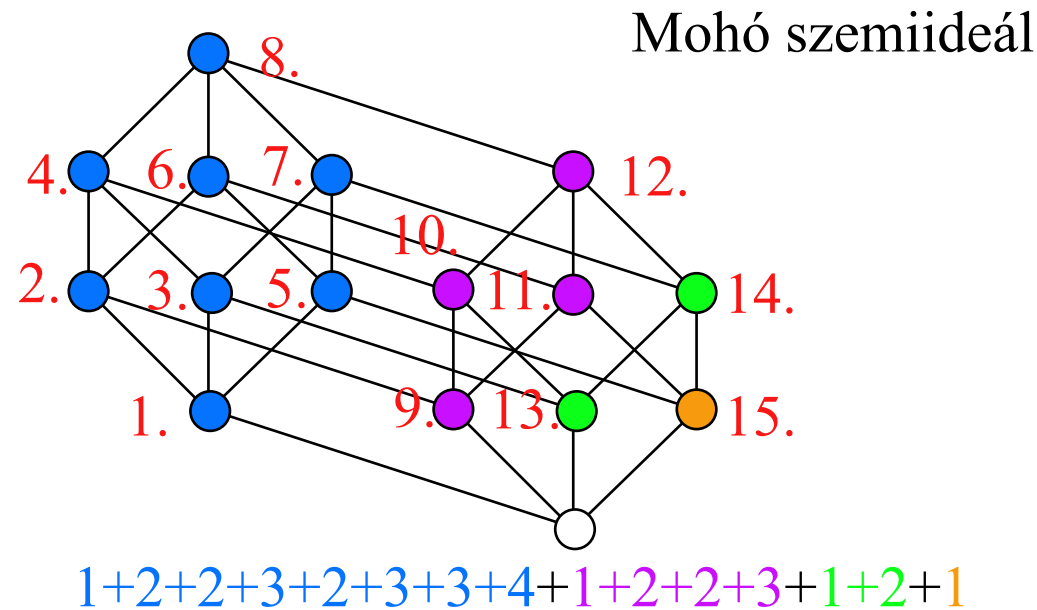
Mohó szemiideál



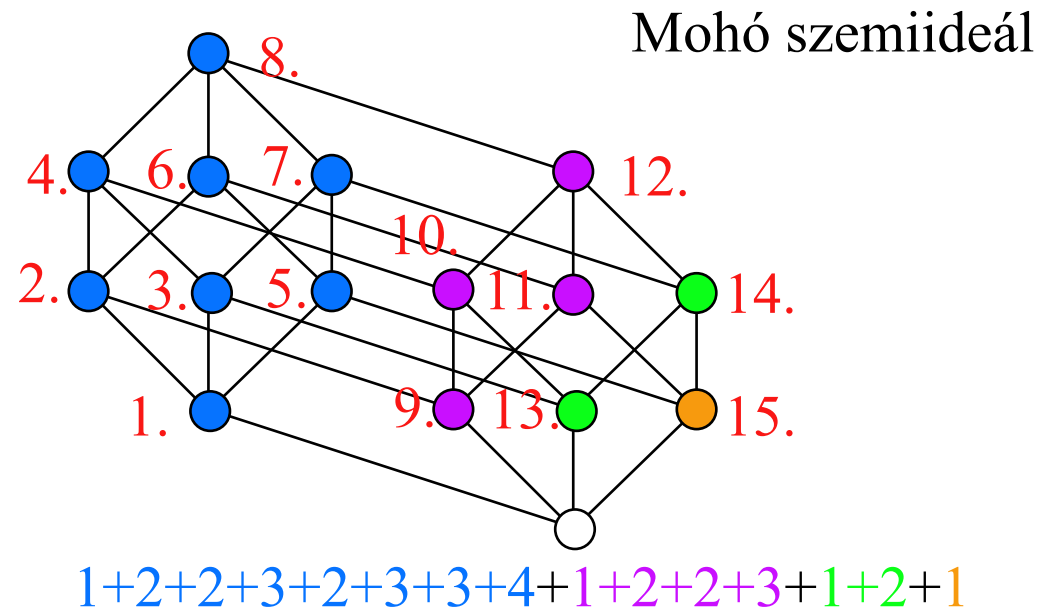
Figyeljük meg, hogy a **kék**, majd rendre a **lila**, **zöld** és narancs **intervallumokban** az történik, hogy



Figyeljük meg, hogy a **kék**, majd rendre a **lila**, **zöld** és narancs **intervallumokban** az történik, hogy egyre nagyobb **mohó rendezésideált** adunk meg! (Ennek definíciója analóg.)

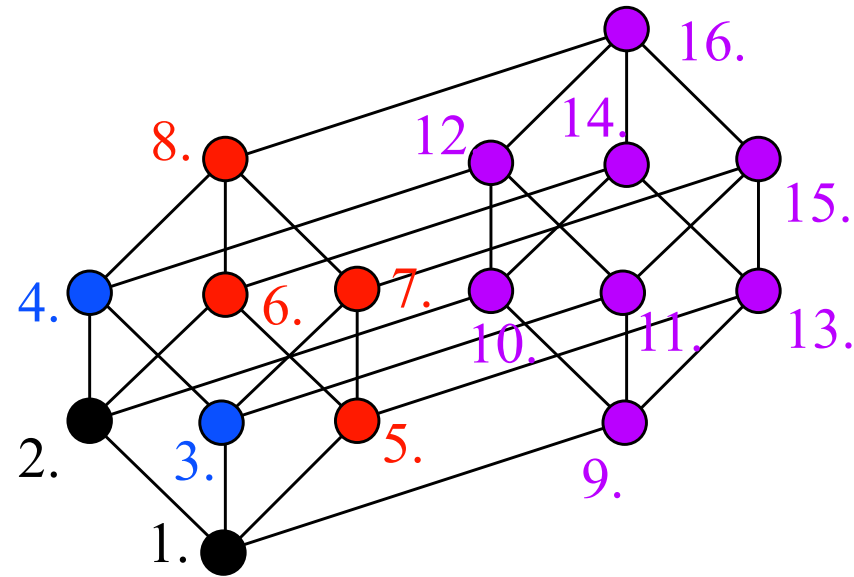


Figyeljük meg, hogy a **kék**, majd rendre a **lila**, **zöld** és narancs **intervallumokban** az történik, hogy egyre nagyobb **mohó rendezésideált** adunk meg! (Ennek definíciója analóg.) Adott elemszám esetén a mohó rendezésideál **is** automorfizmus erejéig meghatározott.



Legyen $\vec{\beta}^{(m)}$ az a $2^m - 1$ -tagú sorozat, amelynek i -edik tagja a B_m -beli mohó szemiideál „ i -edik tagjának” magassága. Például

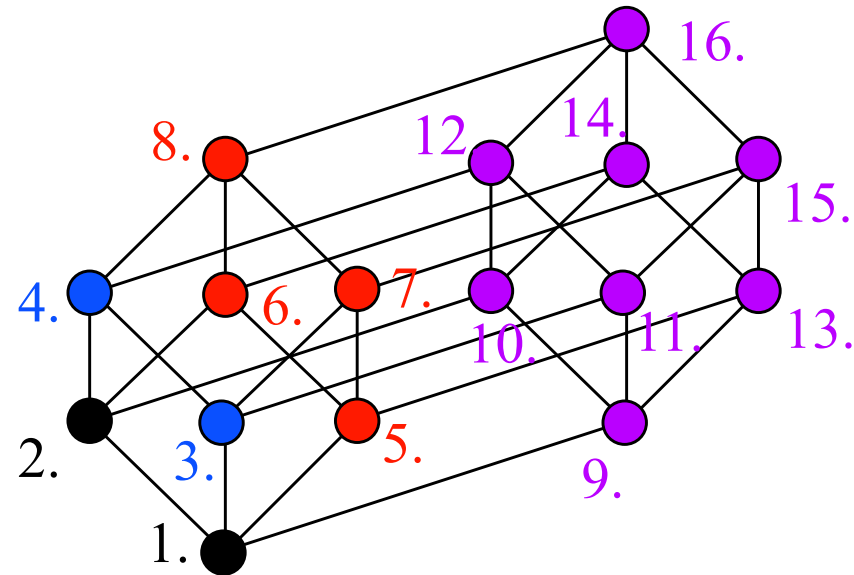
$$\vec{\beta}^{(4)} = (1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 1).$$



Legyen $\vec{\alpha}^{(m)}$ az a 2^m -tagú sorozat, amelynek i -edik tagja a B_m -beli mohó rendezésideál „ i -edik tagjának” magassága. Például

$$\vec{\alpha}^{(4)} = (0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4).$$

Is

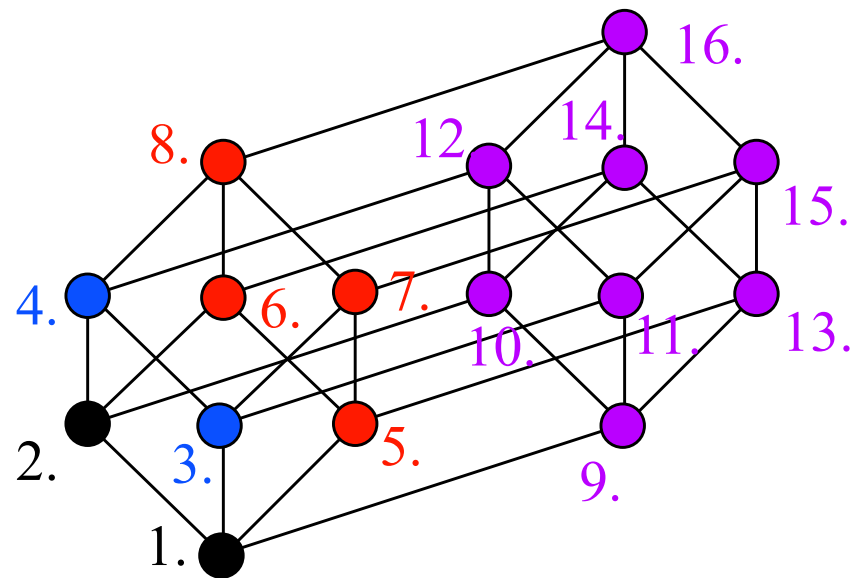


Legyen $\vec{\alpha}^{(m)}$ az a 2^m -tagú sorozat, amelynek i -edik tagja a B_m -beli mohó rendezésideál „ i -edik tagjának” magassága. Például

$$\vec{\alpha}^{(4)} = (0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4).$$

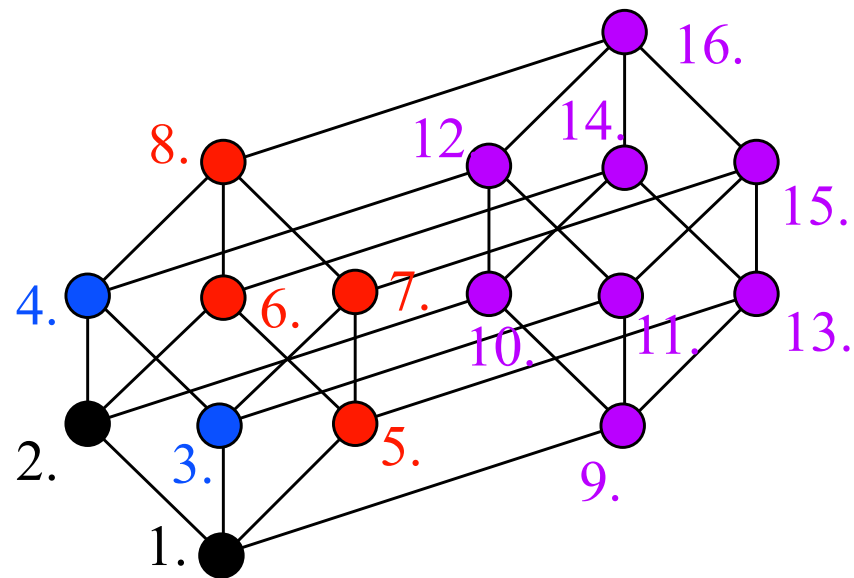
Ismerős-e a sorozat?

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$
CzG-MM-SchT
19'/46'



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...

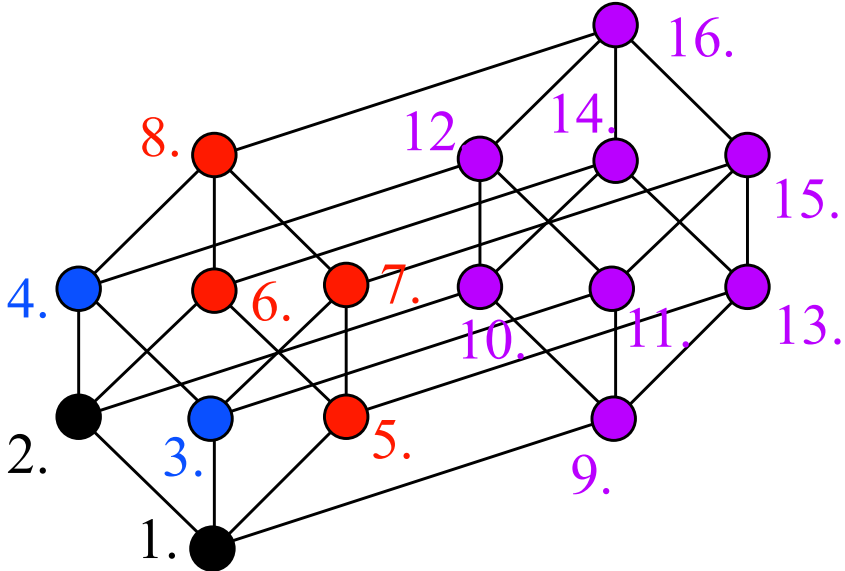
Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$
CzG-MM-SchT
19'/46'



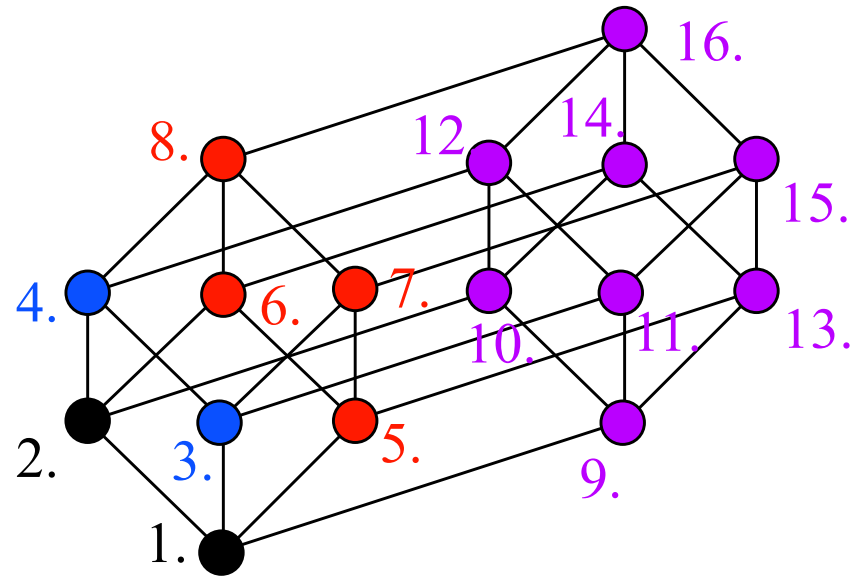
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...
 0

CzG-MM-SchT

19'/46'

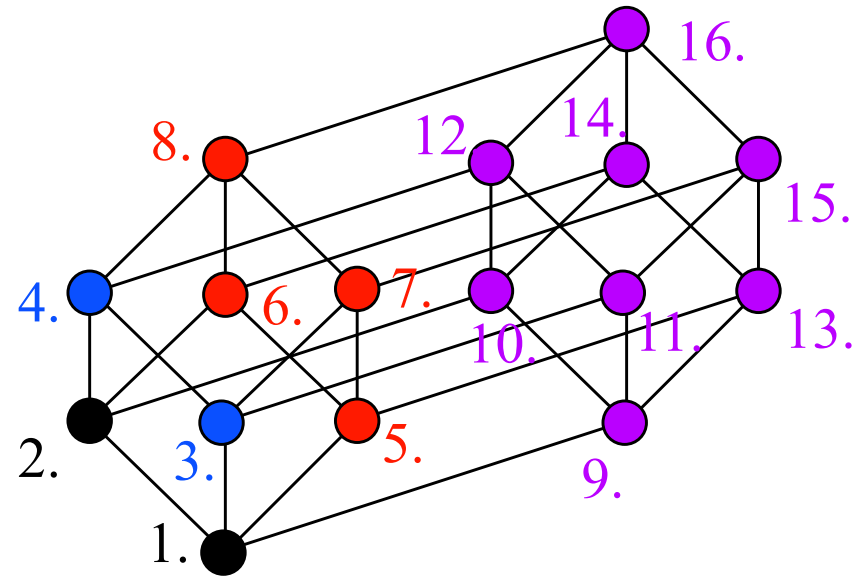
[illegible]

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 19'/46'



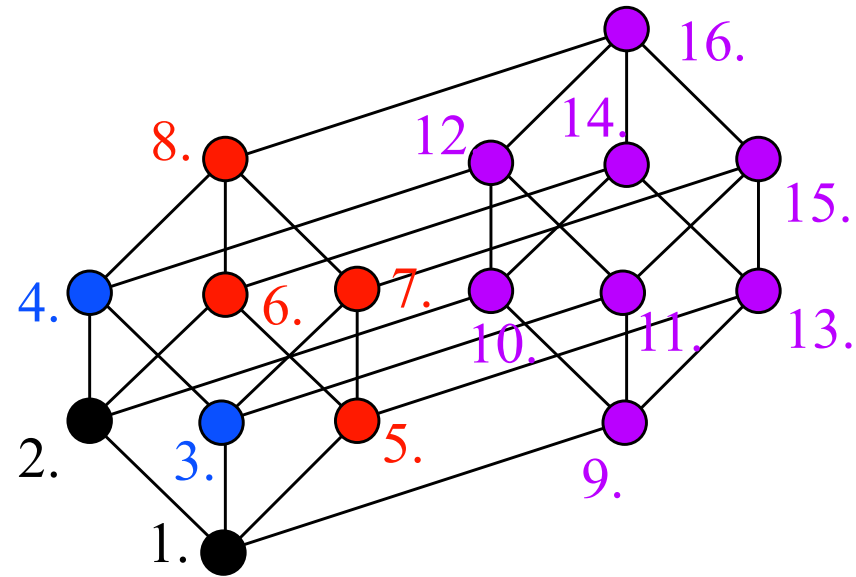
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
0	1	1	2								

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 19'/46'



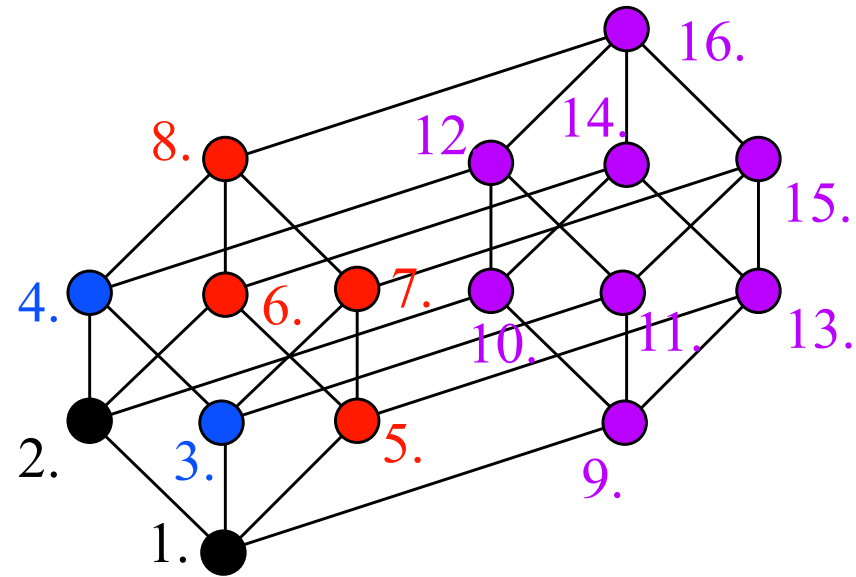
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
0	1	1	2	1	2	2	3				

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 19'/46'



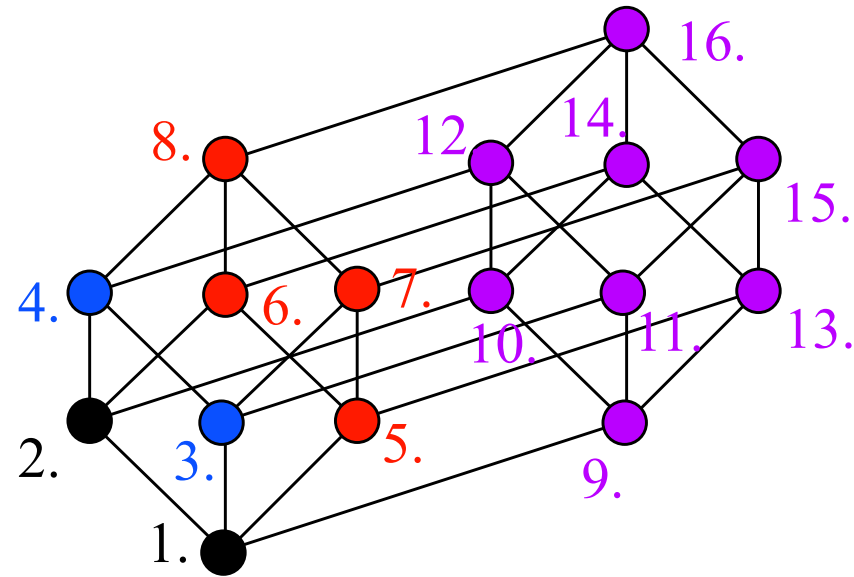
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3...

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 19'/46'



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3...

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 19'/46'



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12...
0	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	3...
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 20'/45'

0 1

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 20'/45'

0 1 1 2

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \overline{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 20'/45'

0 1 1 2 1 2 2 3

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 20'/45'

0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4...

Fractal sequence,

$\text{Fr}_m, X \text{ szemi, } |X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 20'/45'

0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4...

Fractal sequence, 0–1 counting sequence,

$\text{Fr}_m, X \text{ szemi, } |X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 20'/45'

0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4...

Fractal sequence, 0–1 counting sequence, digit sum sequence.

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 20'/45'

0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4...

Fractal sequence, 0–1 counting sequence, digit sum sequence.

Megjegyzés: számjegyösszeg sorozatokra, sőt annál általánosabb sorozatokra, láncok direkt szorzatára, sőt különböző hosszúságú láncok direkt szorzatára is ...

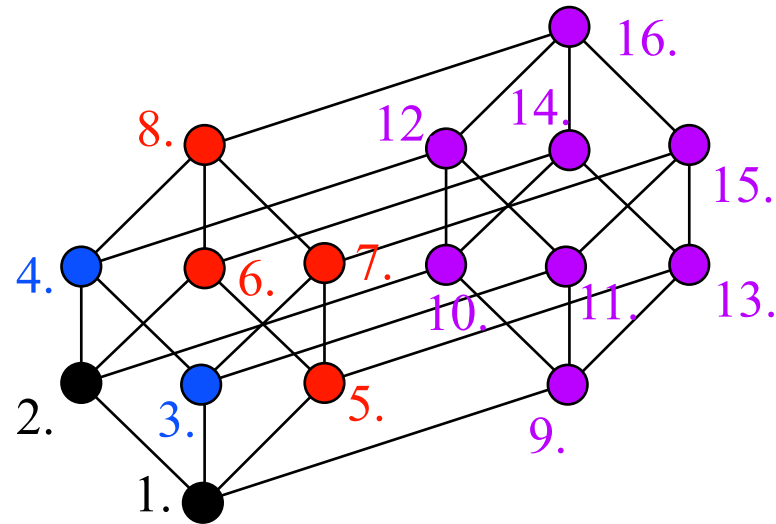
Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 20'/45'

0 1 1 2 1 2 2 3 1 2 2 3 2 3 3 4...

Fractal sequence, 0–1 counting sequence, digit sum sequence.

Megjegyzés: számjegyösszeg sorozatokra, sőt annál általánosabb sorozatokra, láncok direkt szorzatára, sőt különböző hosszúságú láncok direkt szorzatára is ...

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 21'/44'

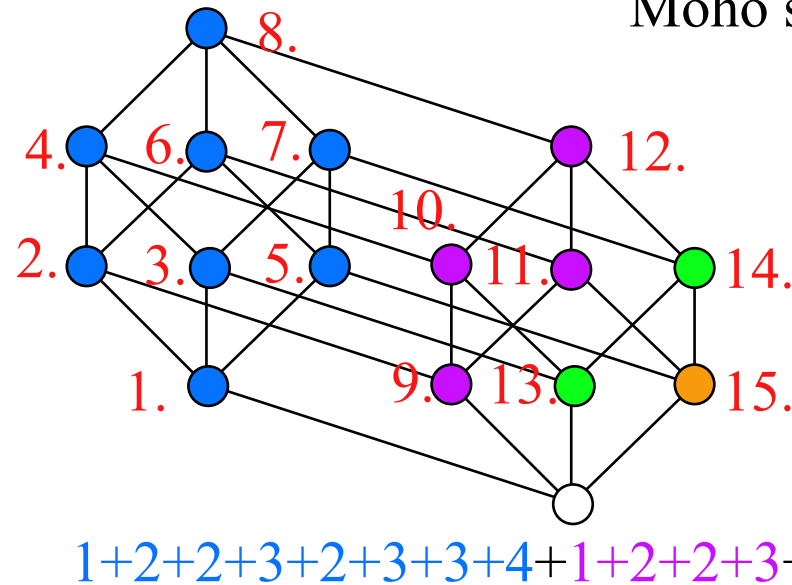


Rekurzió: $\vec{\alpha}^{(4)} = (\underbrace{0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3}_{\vec{\alpha}^{(3)}}, \underbrace{1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4}_{\bar{1} + \vec{\alpha}^{(3)}}).$

Legyen $\vec{\gamma}^{(m)}$ az $\vec{\alpha}^{(m)}$ -nél egyel nagyobb tagokból álló sorozat, pl.

$$\vec{\gamma}^{(4)} = (1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5).$$

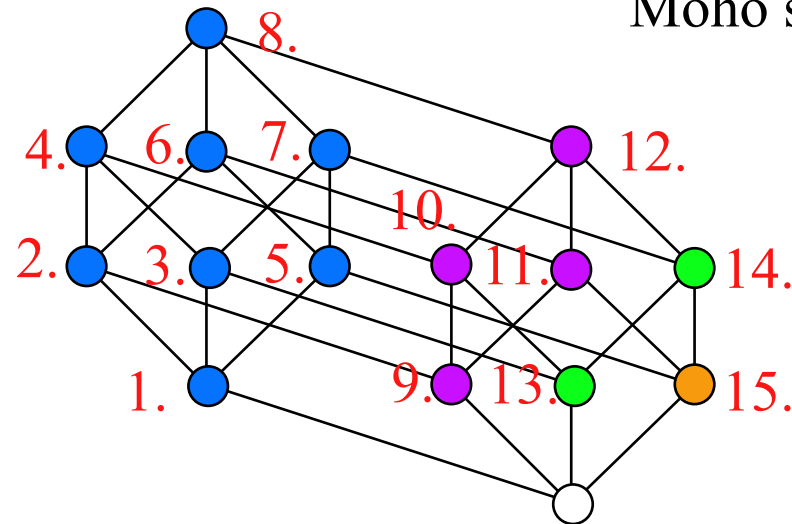
Mohó szemiideál



Azért érdemes az $\vec{\alpha}^{(m)}$ sorozatot „eggyel feltolva” a $\vec{\gamma}^{(m)}$ sorozatot is tekintenünk, mert a mohó szemiideálban a mohó rendezésideálok „eggyel feltolva” vannak jelen. Az ábra szerint érvényes:

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 23'/42'

Mohó szemiideál



$1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1$

$$\vec{\beta}^{(4)} = (\underbrace{1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4}_{\vec{\gamma}^{(3)}}, \underbrace{1, 2, 2, 3}_{\vec{\gamma}^{(2)}}, \underbrace{1, 2}_{\vec{\gamma}^{(1)}}, \underbrace{1}_{\vec{\gamma}^{(0)}}) .$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\vec{\beta}^{(3)}}$

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Fr_m, X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{\mathbf{h}}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok
(≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\bar{h}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok
(≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\bar{h}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

M

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok
(≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\bar{h}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Mi

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok
(≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\bar{h}(X)$ (az X átlagos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Mik

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok
(≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\bar{h}(X)$ (az X átlatos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Mikl

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok
(≈ 4 oldal)

Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\bar{h}(X)$ (az X átlagos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Miklő

Fr_m , X szemi, $|X| < 2^m/3 \Rightarrow \bar{h}(X) \leq m/2$ CzG-MM-SchT 25'/40'

Eddigi rekurzív összefüggések $\Rightarrow$ később szükséges tulajdonságok
(≈ 4 oldal)

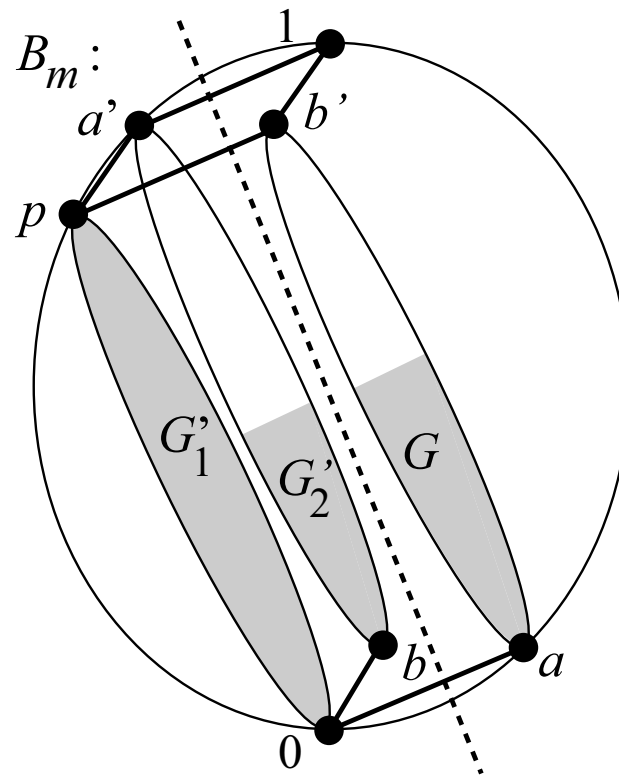
Összefoglalva: Ha $X \subseteq B_m$ egy mohó rendezésideál ill. mohó szemiideál, akkor $\bar{h}(X)$ (az X átlagos magassága) egyenlő az $\vec{\alpha}^{(m)}$, illetve $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat első $|X|$ tagjának átlagával!

Miklós

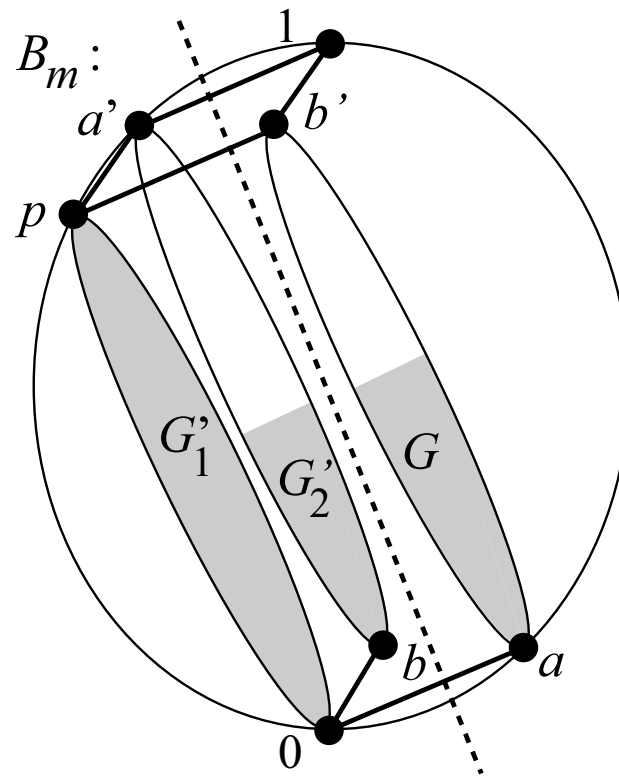
2. Lemma. *A mohó rendezésideálok a lehető legmagasabbak!*

2. Lemma. *A mohó rendezésideálok a lehető legmagasabbak! Azaz ha $X, Y \subseteq B_m$ rendezésideálok és Y mohó, akkor $\bar{h}(X) \leq \bar{h}(Y)$.*

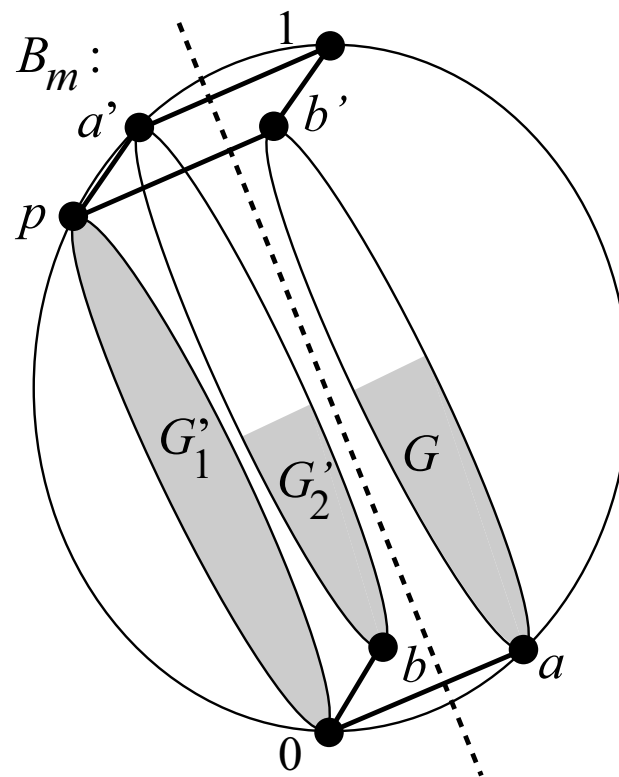
Bizonyítás Legyen X rendezésideál. Az a feladat, hogy X elemszámát fixen tartva, átlagmagasságát nem csökkentve addig módosítsuk, amíg mohóhoz érkezünk.



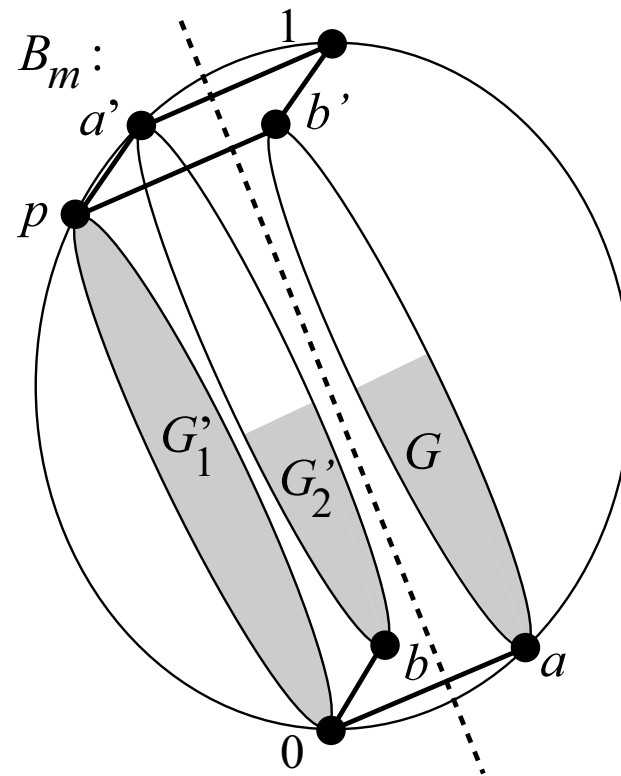
Legyen



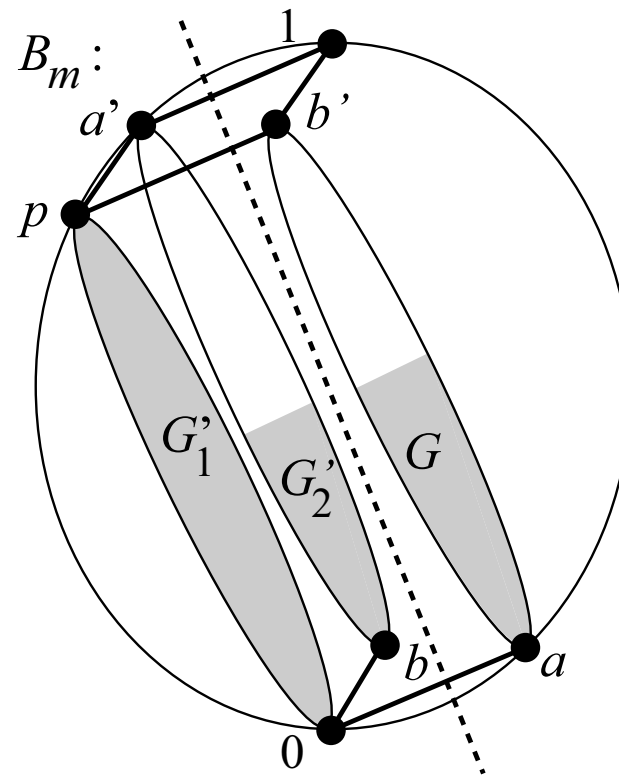
Legyen $a \in B_m$ atom, a' az a komplementere. Ekkor B_m az $\downarrow a'$ és $\uparrow a$ diszjunkt uniója. (Ld.



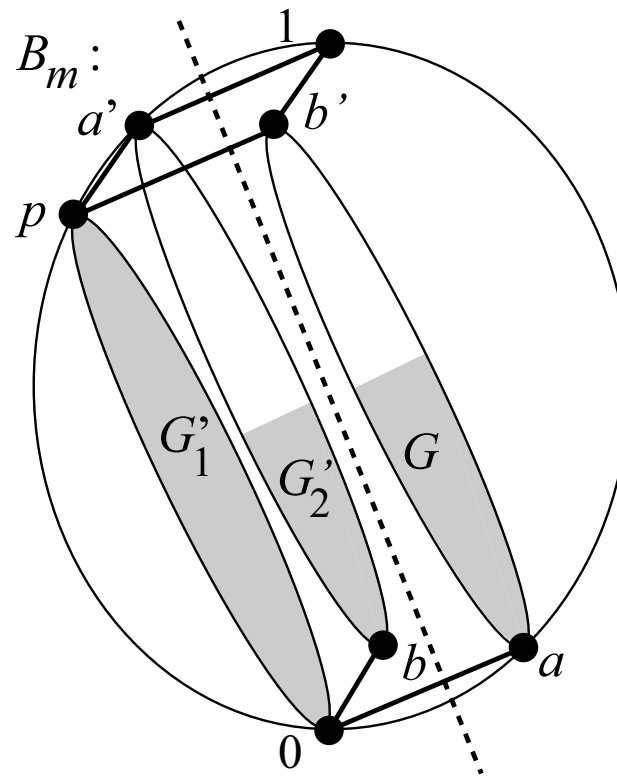
Legyen $a \in B_m$ atom, a' az a komplementere. Ekkor B_m az $\downarrow a'$ és $\uparrow a$ diszjunkt uniója. (Ld. szaggatott vonal.) Legyen $G := \uparrow a \cap X$ és $G' := \downarrow a' \cap X$.



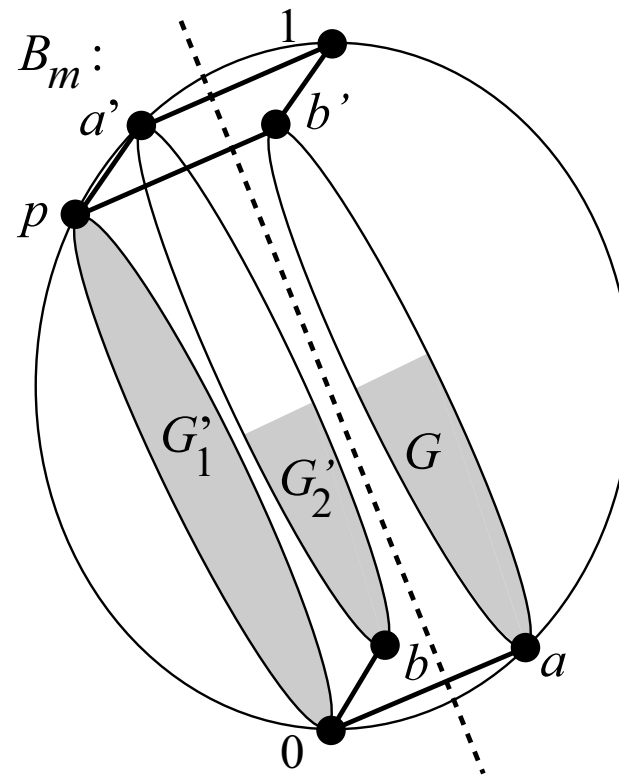
Több eset van, ezek egyike, amikor $2^m/4 < |G'|$. Az ábrán $p \prec a'$,
 $G' = G'_1 \cup G'_2$. Ha $G =$



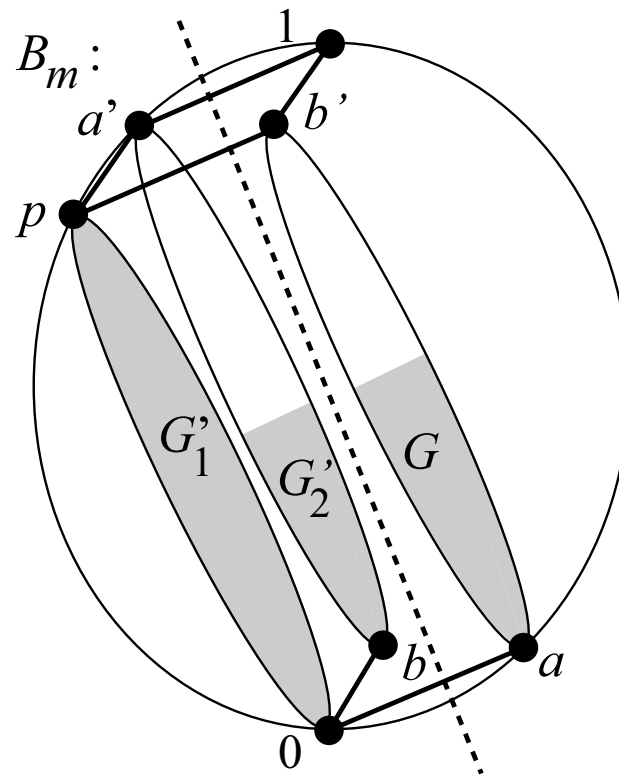
Több eset van, ezek egyike, amikor $2^m/4 < |G'|$. Az ábrán $p \prec a'$, $G' = G'_1 \cup G'_2$. Ha $G = \emptyset$, akkor $\downarrow a'$ -re az indukciós hipotézis alkalmazható. Természetesen



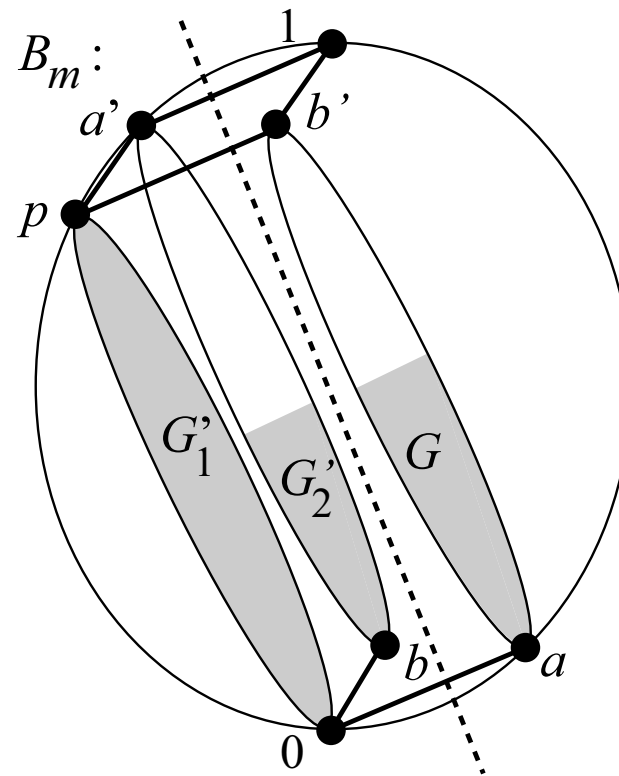
Több eset van, ezek egyike, amikor $2^m/4 < |G'|$. Az ábrán $p \prec a'$, $G' = G'_1 \cup G'_2$. Ha $G = \emptyset$, akkor $\downarrow a'$ -re az indukciós hipotézis alkalmazható. Természetesen az ind.hip. miatt feltehető, hogy G mohó $\uparrow a$ -ban, G' pedig $\downarrow a'$ -ben.



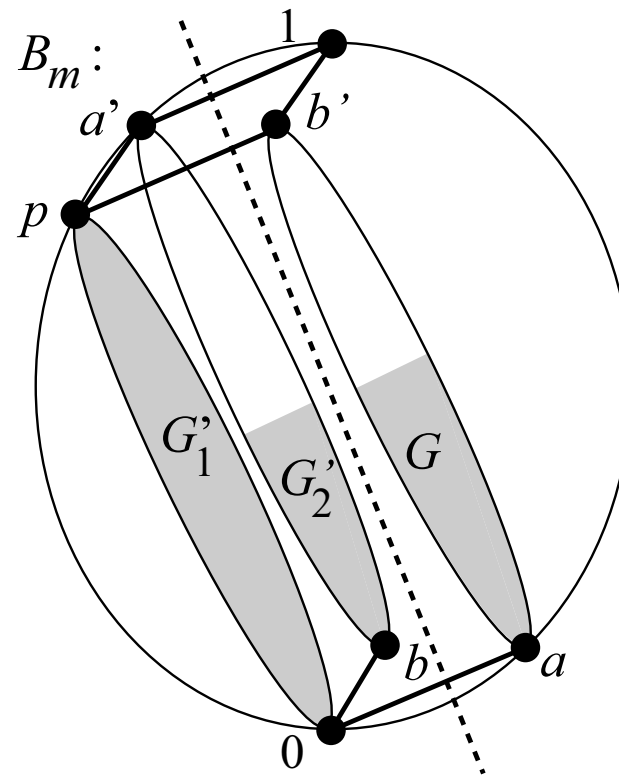
A G elemeiből rakjunk át annyi elemet (akár az összeset) a $[b, a']$ intervallumba, amennyit csak lehet (akár teljesen feltöltve a $[b, a']$ intervallumot.)



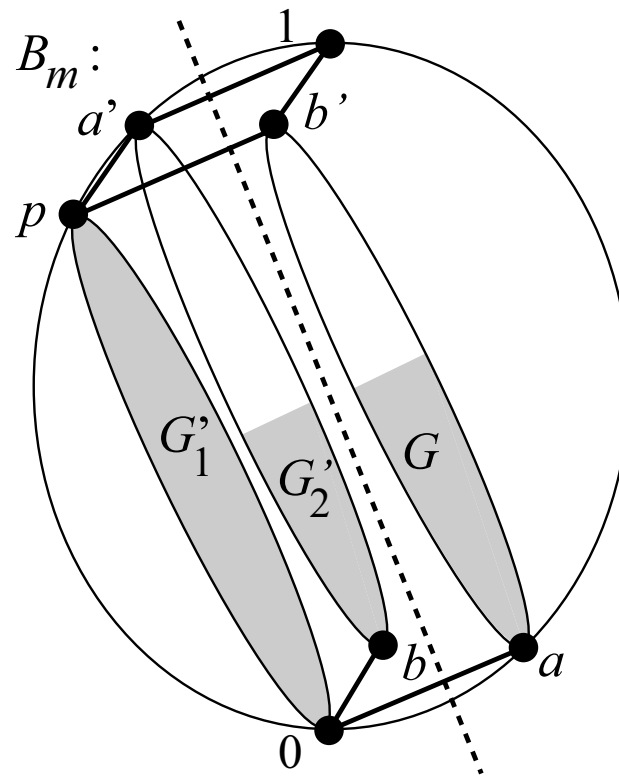
Az átrakott és a visszamaradó elemeket persze mohó r. ideállá rendezzük



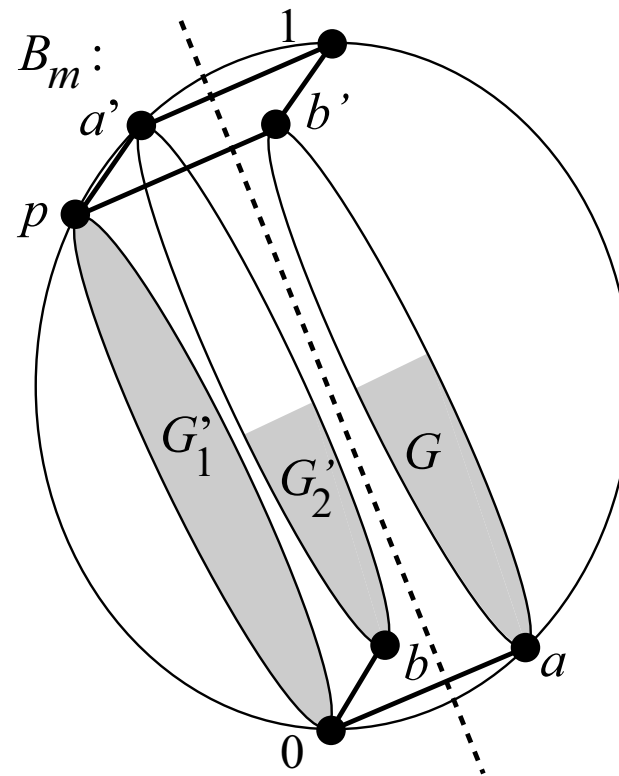
Az átrakott és a visszamaradó elemeket persze mohó r.ideállá rendezzük (ez az $[a, 1] \cong [0, a']$ izomorfizmussal „komptaibilisen” is megtehető!).



A „komptatibilitás” miatt mohó r.ideált kapunk. Az, hogy a magasság nem csökkent, a $\vec{\beta}^{(m)}$ tulajdonságaiból („konvexitás”) következik.



A másik eset (a



A másik eset (amikor $|G'| \leq 2^m/4$) sokkal egyszerűbb: ekkor $G_2' = \emptyset$, így $X \subseteq \downarrow b'$ miatt az ind.hip. azonnal alkalmazható. Q.E.D.

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m -re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\bar{h}(X) \leq m/2$.

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m -re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\bar{h}(X) \leq m/2$. Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\bar{h}(X) > m/2$.

Bizonyítás. A második mondat:

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m -re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\bar{h}(X) \leq m/2$. Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\bar{h}(X) > m/2$.

Bizonyítás. A második mondat: a mohó konstrukció igazolja a $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat alkalmas tulajdonsága szerint, ezt nem részletezzük.

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m -re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\bar{h}(X) \leq m/2$. Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\bar{h}(X) > m/2$.

Bizonyítás. A második mondat: a mohó konstrukció igazolja a $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat alkalmas tulajdonsága szerint, ezt nem részletezzük.

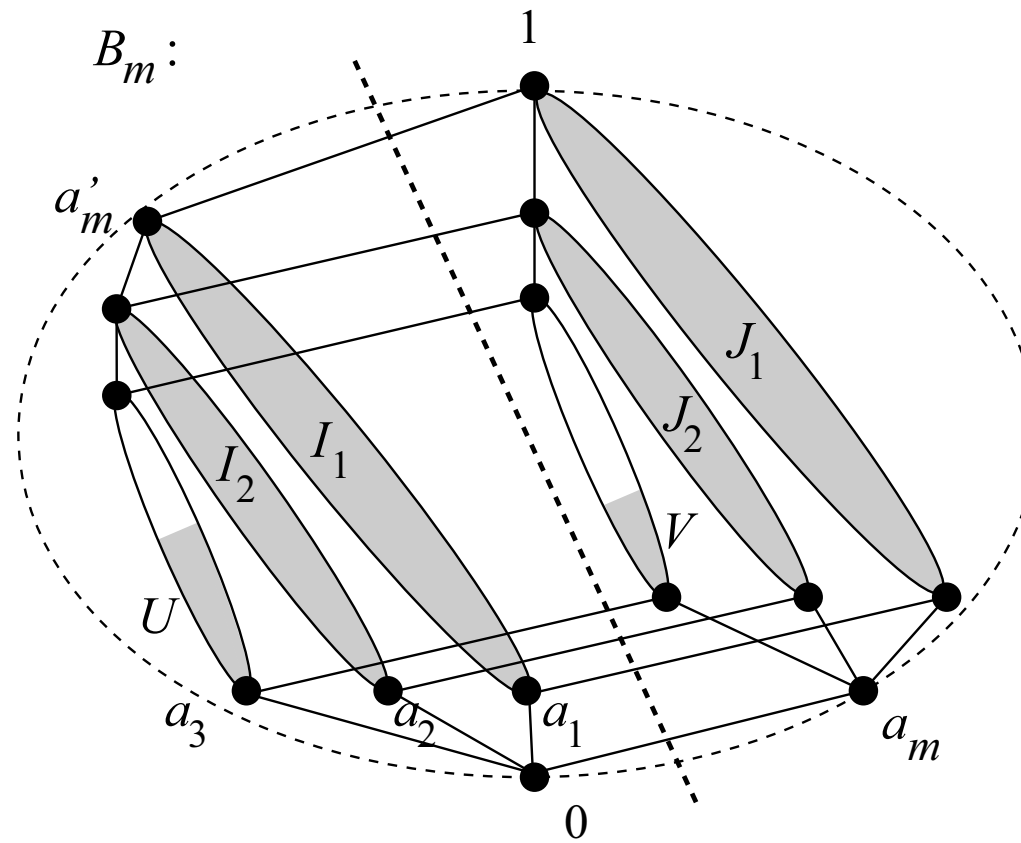
Tfh. $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$. Mivel $B_m \setminus X$ részalgebrája $(B_m, \vee, \emptyset)$ -nek, a B_m -re érvényes Frankl-sejtés szerint

Theorem 2 Legyen $X \subseteq B_m$ egy szemiideál. Ha $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$ és m -re érvényes a Frankl-sejtés, akkor $\bar{h}(X) \leq m/2$. Viszont van olyan X szemiideál, hogy $|X| = \lceil 2^m/3 \rceil$ és $\bar{h}(X) > m/2$.

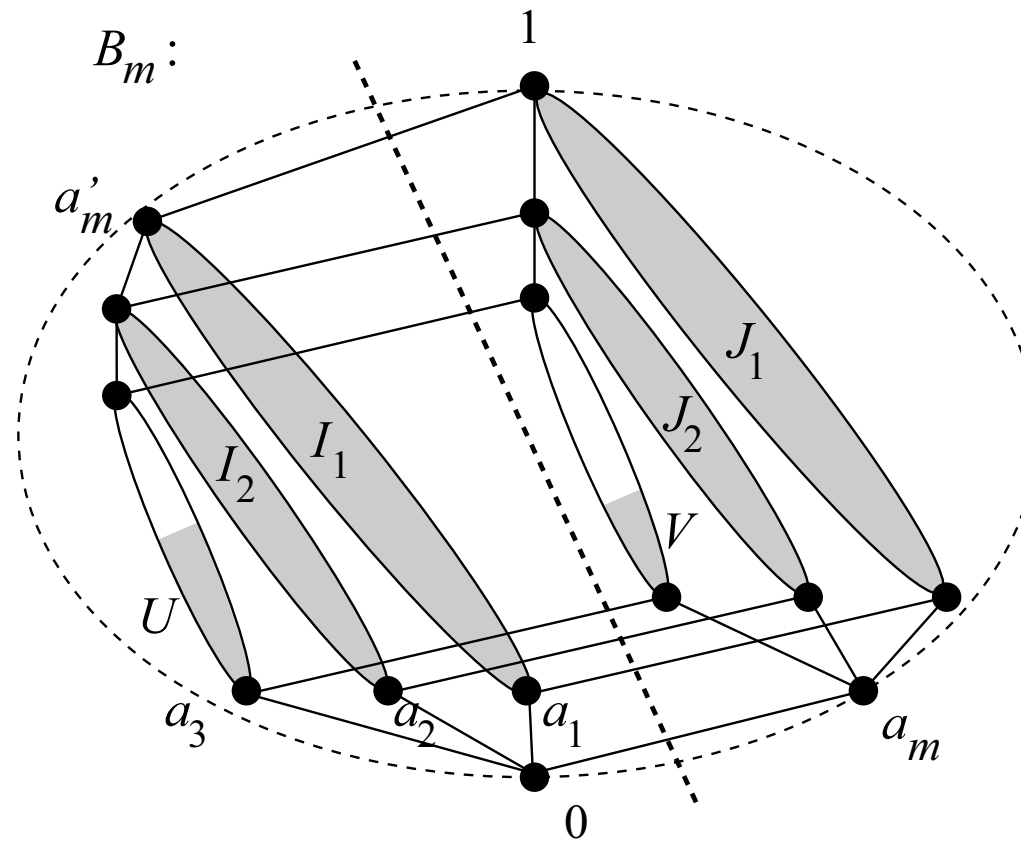
Bizonyítás. A második mondat: a mohó konstrukció igazolja a $\vec{\beta}^{(m)}$ sorozat alkalmas tulajdonsága szerint, ezt nem részletezzük.

Tfh. $|X| \leq \lfloor 2^m/3 \rfloor$. Mivel $B_m \setminus X$ részalgebrája $(B_m, \vee, \emptyset)$ -nek, a B_m -re érvényes Frankl-sejtés szerint van olyan a_m atom, hogy felette $B_m \setminus X$ elemeinek legalább a fele, azaz X elemeinek legfeljebb a fele van. Legyen $a_1, \dots, a_{m-1}$ a többi atom, és legyen

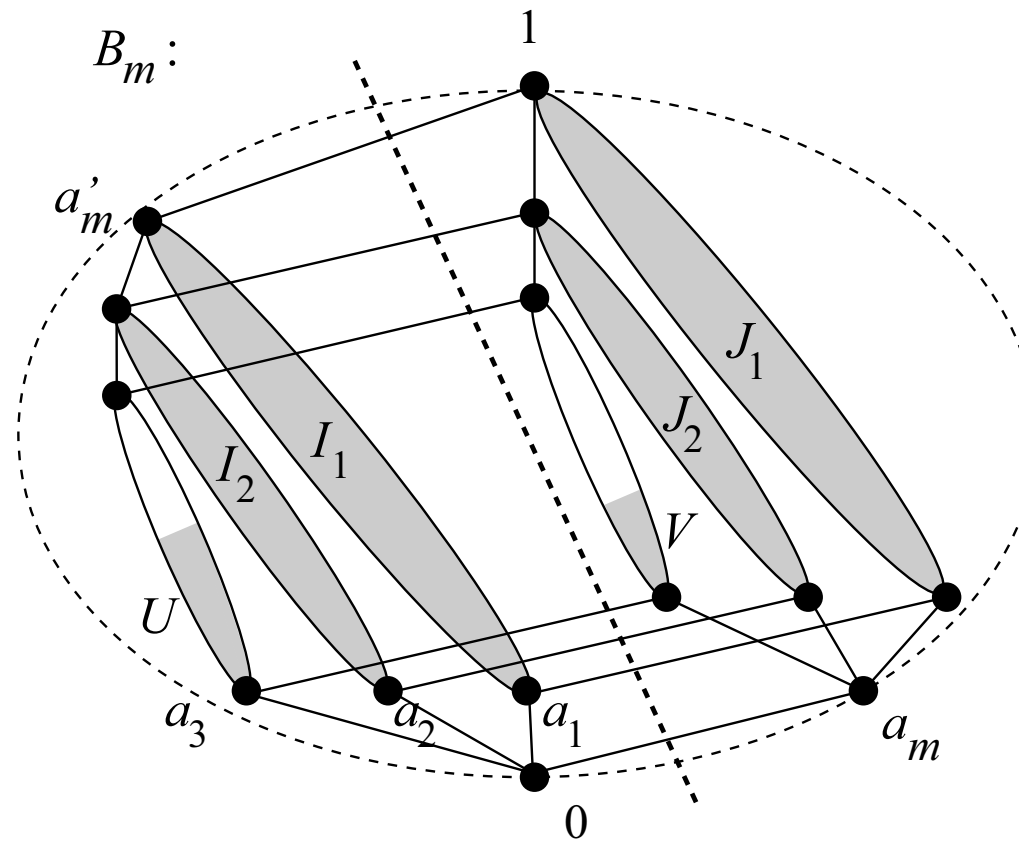
$$X_0 = X \cap \downarrow a'_m, \quad X_1 = (X \cap \uparrow a_m) \setminus \{a_m\}, \quad X_2 = X \cap \{a_m\}$$



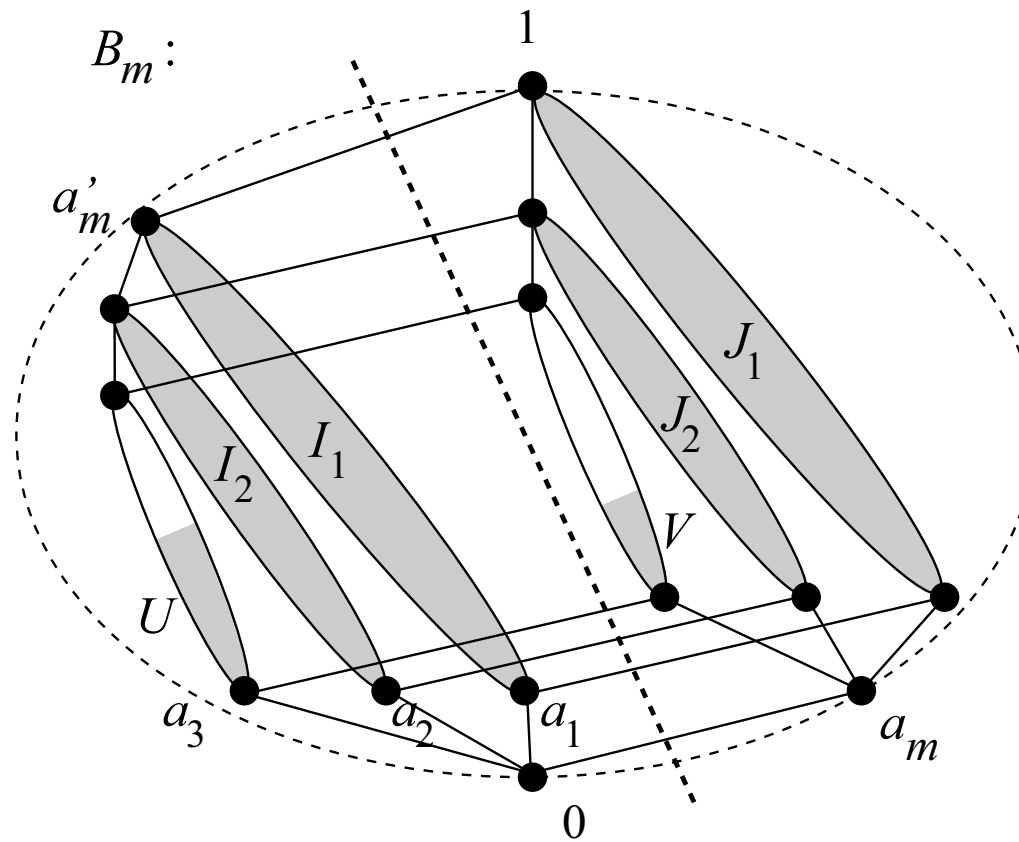
Itt tehát $\uparrow a_m$ -ben van a kisebbik (vagy $=$) fele X -nek.



Itt tehát $\uparrow a_m$ -ben van a kisebbik (vagy $=$) fele X -nek. A magasságot növeljük, ha (ind.hip.!) $\uparrow a_m$ -ban mohó szemiideálra cseréljük X_1 -et. (Ábrán a szürke J -k és V .)



Az $[a_m, 1] \cong [0, a'_m]$ izomorfizmussal képezzük le X_1 -et $\downarrow a'_m$ -be, és az folytassuk $|X_0|$ elemszámú (szürke) mohó szemiideállá $\downarrow a'_m$ -ben. (Azért lehet, mert $|X_0| \geq |X_1|$.)



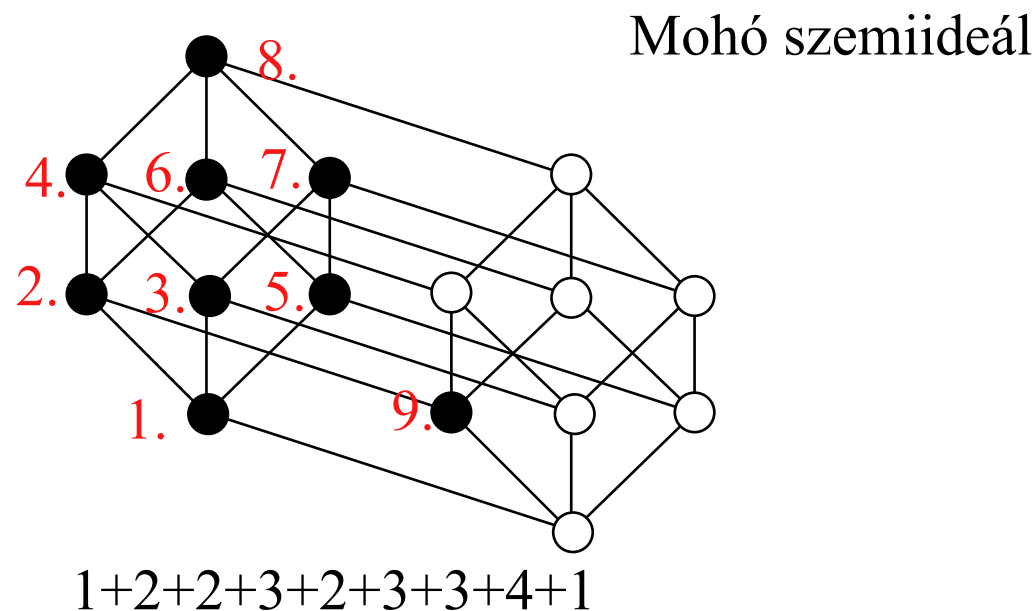
Az $[a_m, 1] \cong [0, a'_m]$ izomorfizmussal képezzük le X_1 -et $\downarrow a'_m$ -be, és az folytassuk $|X_0|$ elemszámú (szürke) mohó szemiideállá $\downarrow a'_m$ -ben. (Azért lehet, mert $|X_0| \geq |X_1|$.) Ind.hip. $\Rightarrow \bar{h}$ nem csökken.

Emlékezzünk vissza: a mohó szemiideál úgy készül, hogy a Boole-háló felső felét mint mohó ideált feltöltjük,

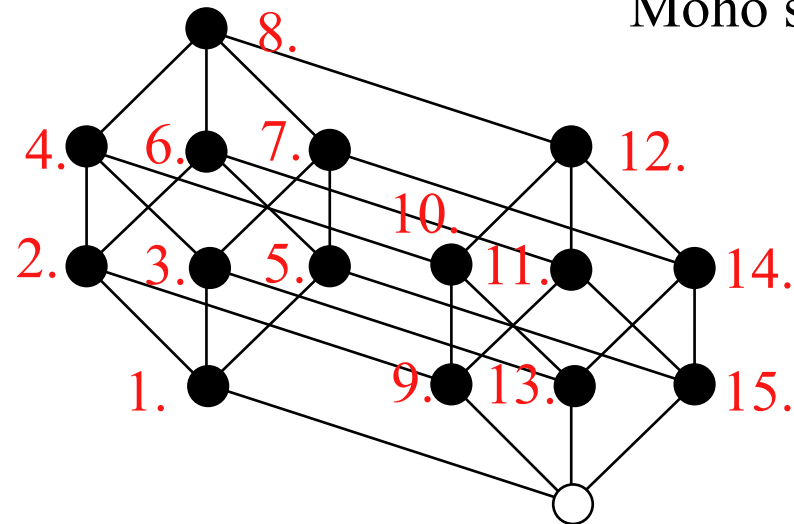
Emlékezzünk vissza: a mohó szemiideál úgy készül, hogy a Boole-háló felső felét mint mohó ideált feltöltjük, majd ezt az eljárást megismételjük az alsó felére. Ah

Emlékezzünk vissza: a mohó szemiideál úgy készül, hogy a Boole-háló felső felét mint mohó ideált feltöltjük, majd ezt az eljárást megismételjük az alsó felére. Ahányszor ezt ismételni kell, azt nevezzük a mohó szemiideál **rangjának** (az ábrán a rang

Emlékezzünk vissza: a mohó szemiideál úgy készül, hogy a Boole-háló felső felét mint mohó ideált feltöltjük, majd ezt az eljárást megismételjük az alsó felére. Ahányszor ezt ismételni kell, azt nevezzük a mohó szemiideál **rangjának** (az ábrán a rang = 2.)

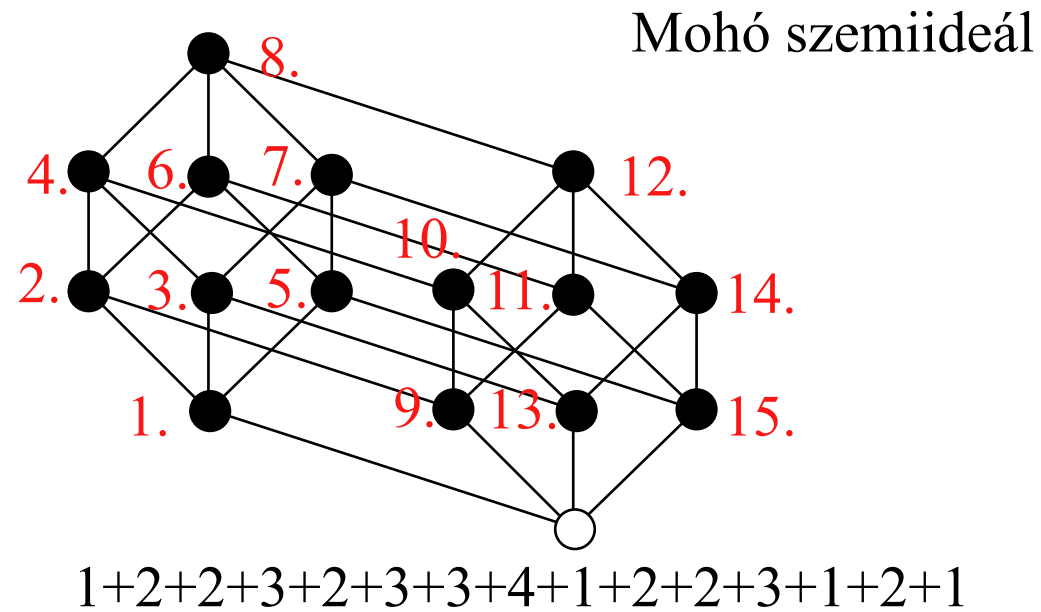


Mohó szemiideál

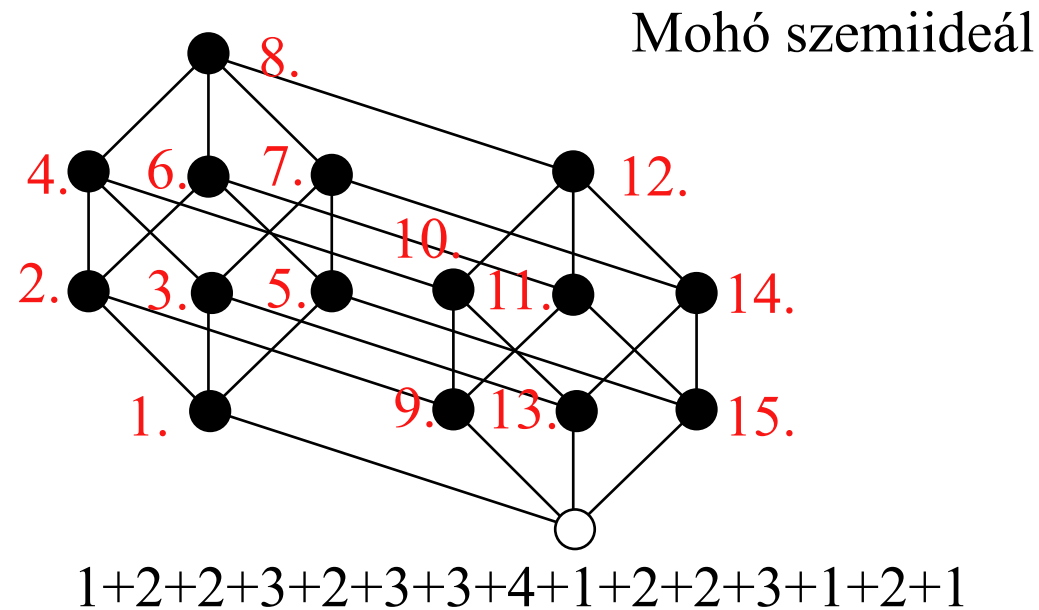


$$1+2+2+3+2+3+3+4+1+2+2+3+1+2+1$$

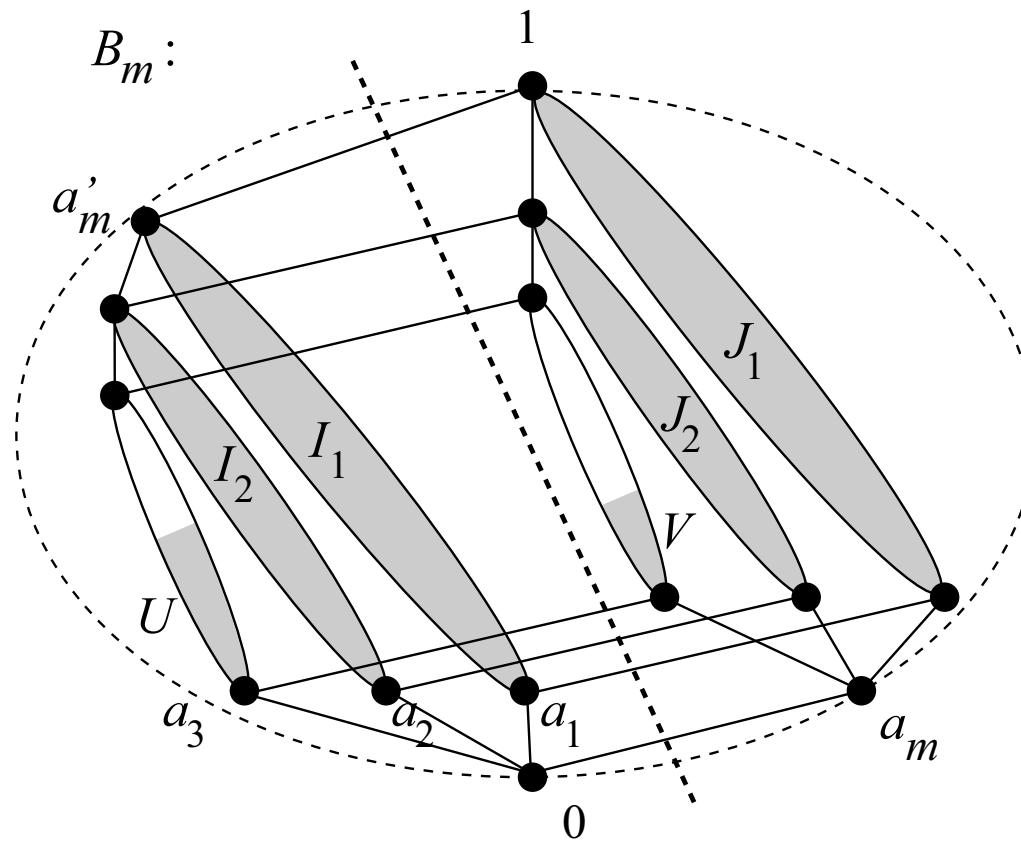
Itt pedig a rang



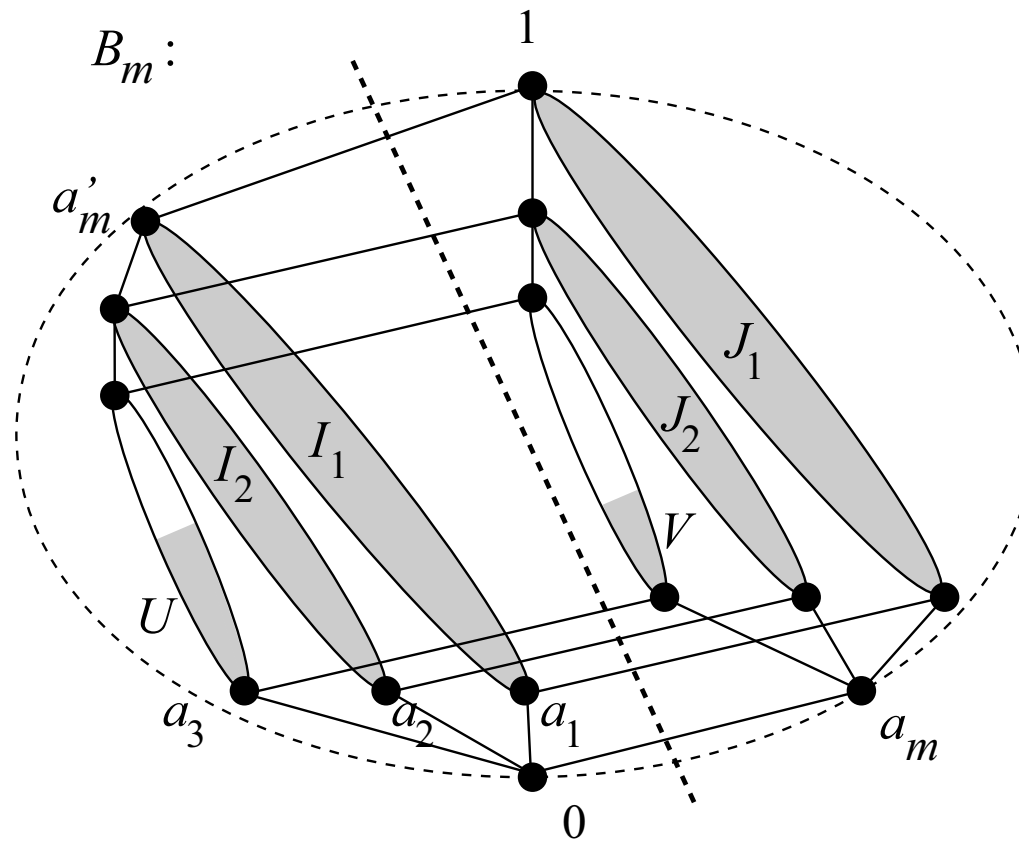
Itt pedig a rang =4. Vis



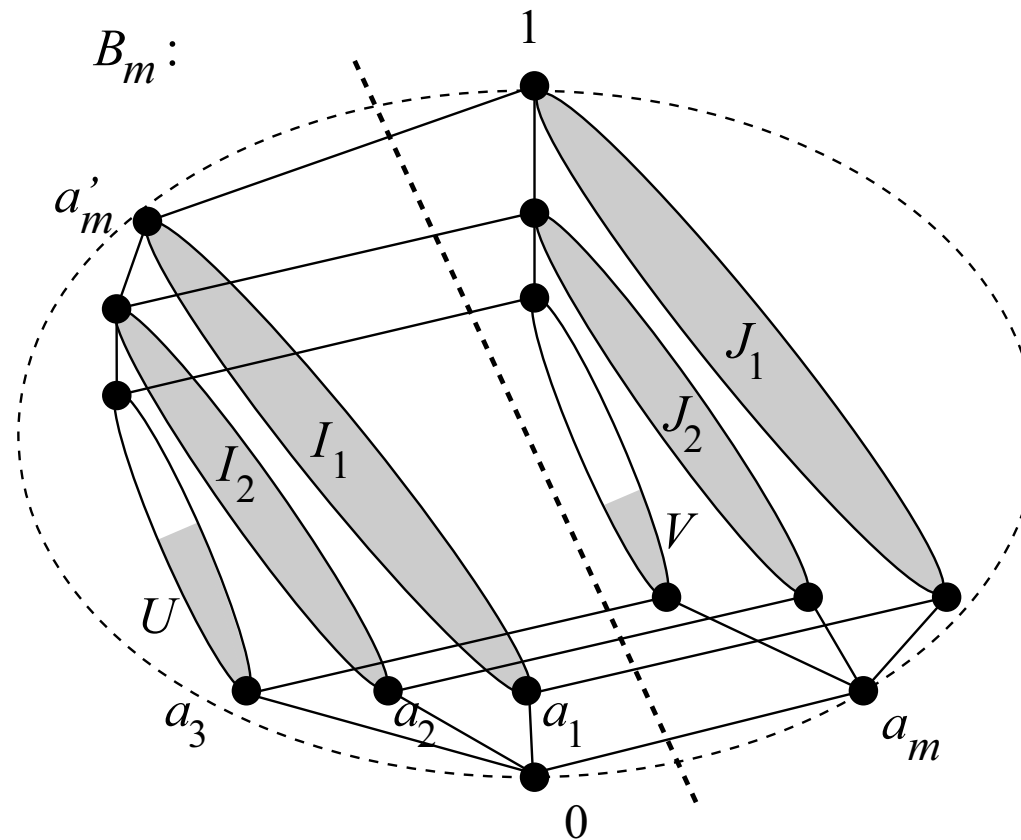
Itt pedig a rang =4. Visszatérve a bizonyításhoz, az első eset az, amikor az $\uparrow a_m$ -beli és a $\downarrow a'_m$ -beli mohó szemiideálok rangja azonos:



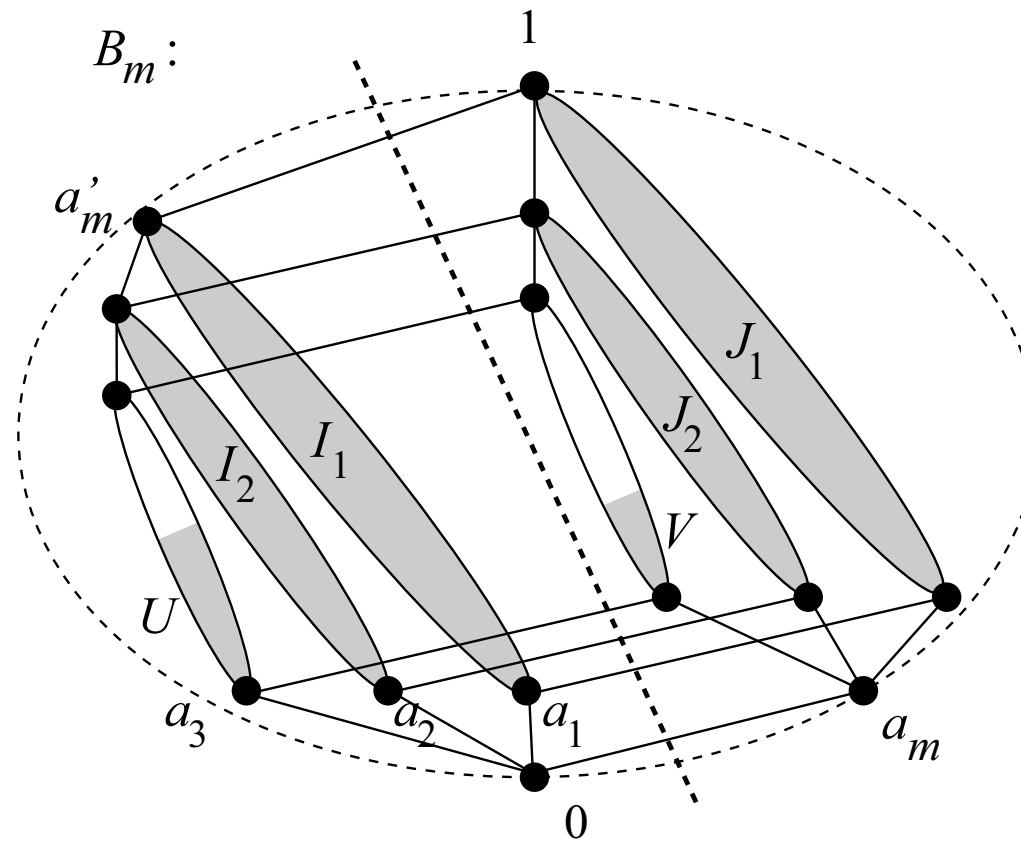
Alkalmazzuk a mohó



Alkalmazzuk a mohó **r.ideálokra** vonatkozó lemmát az U -t és V -t tartalmazó K_3 intervallumra (az alja a_3):

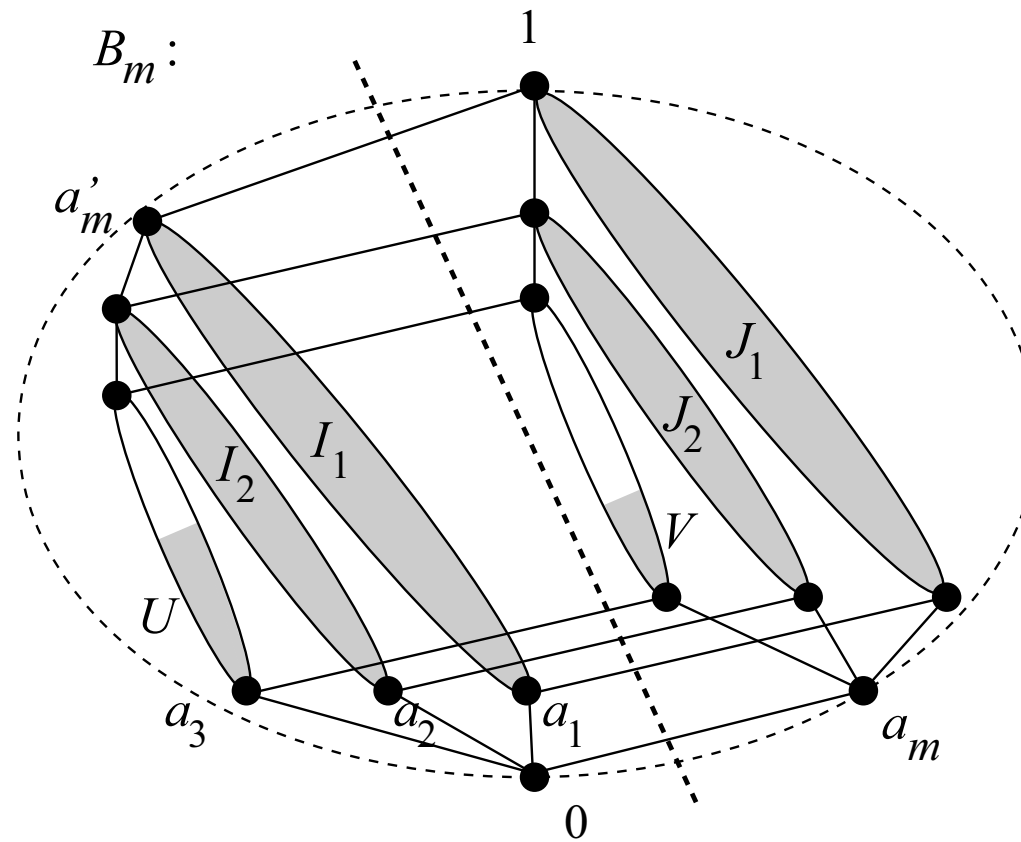


Alkalmazzuk a mohó **r.ideálokra** vonatkozó lemmát az U -t és V -t tartalmazó K_3 intervallumra (az alja a_3): $U \cup V$ -t cseréljük ki egy K_3 -beli mohó r.ideálra!

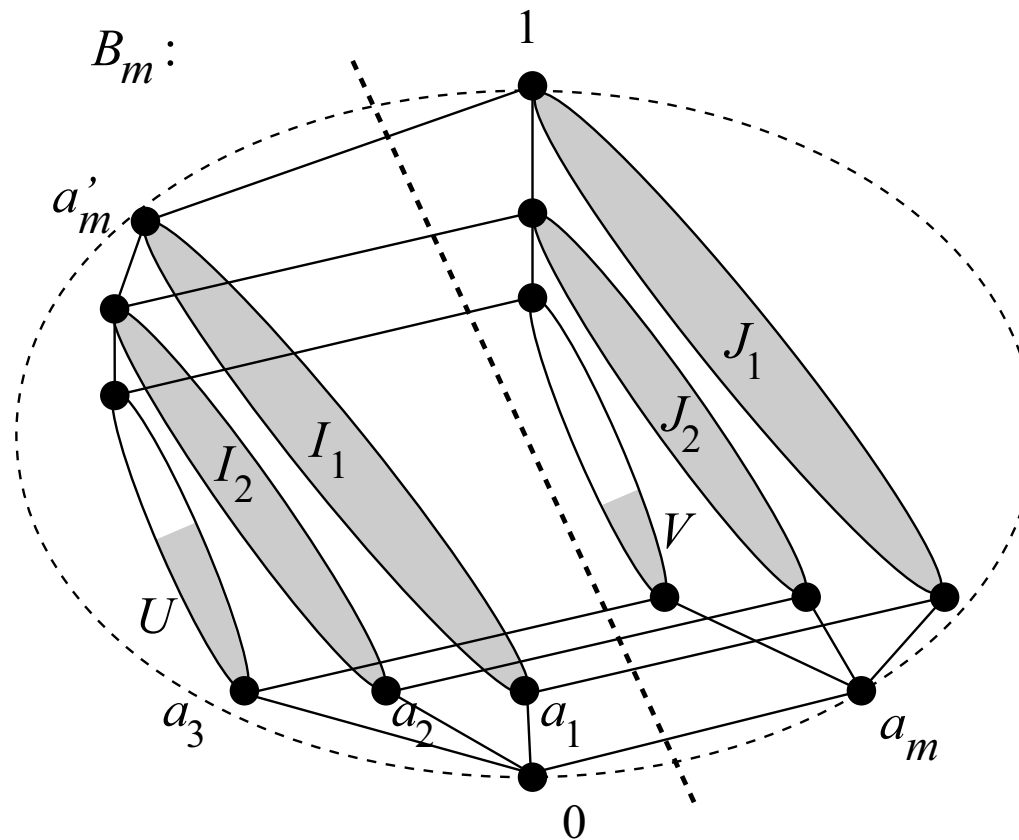


Az átlagmagasság csak nőhet, és $X_0 \cup X_1$ mohó szemiideál lesz!

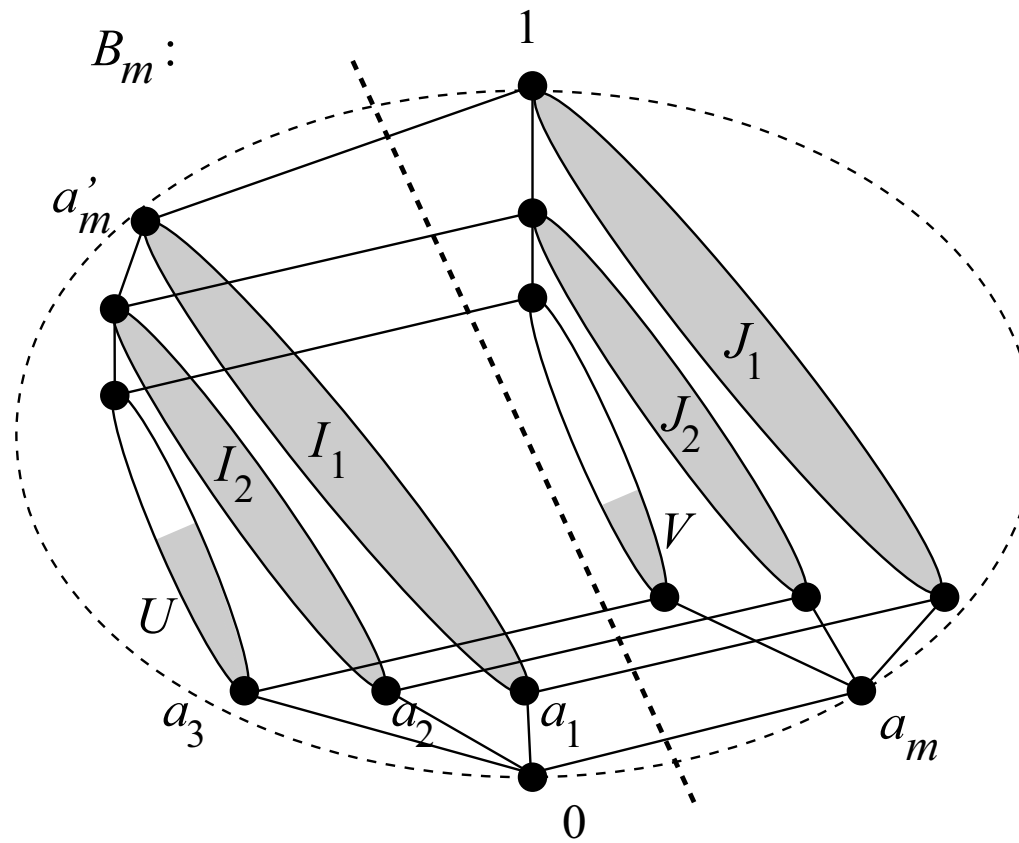
(



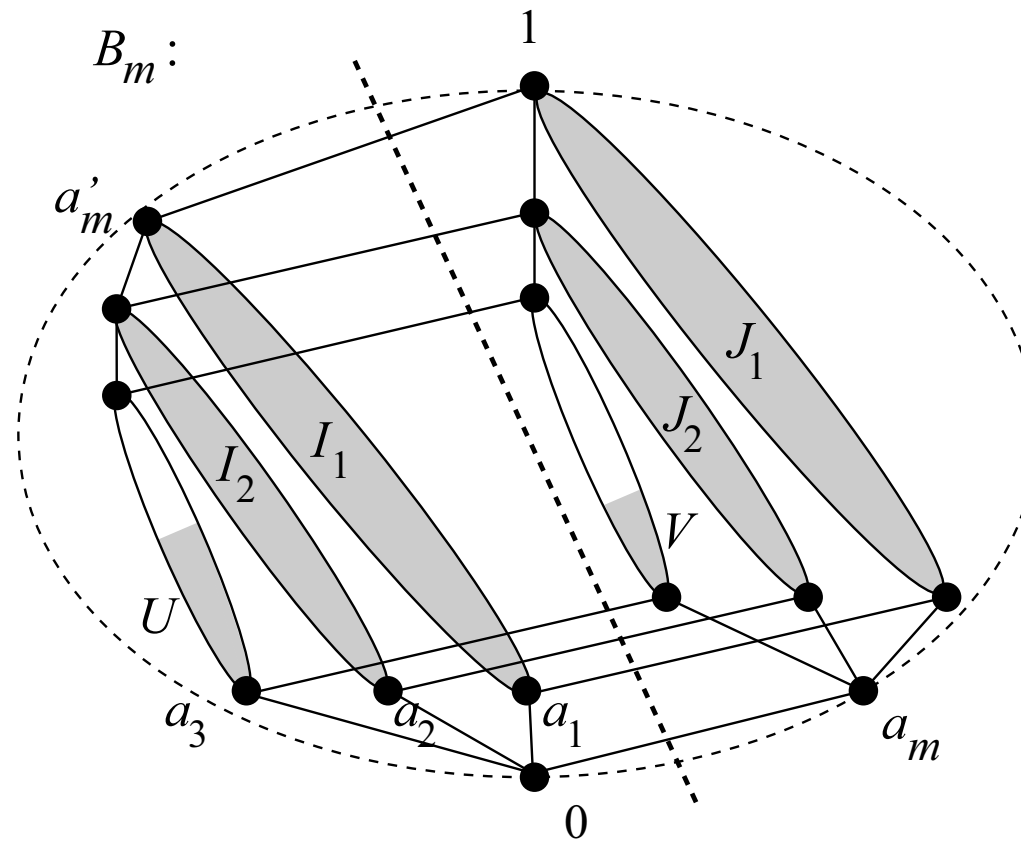
Az átlagmagasság csak nőhet, és $X_0 \cup X_1$ mohó szemiideál lesz!
(Ehhez



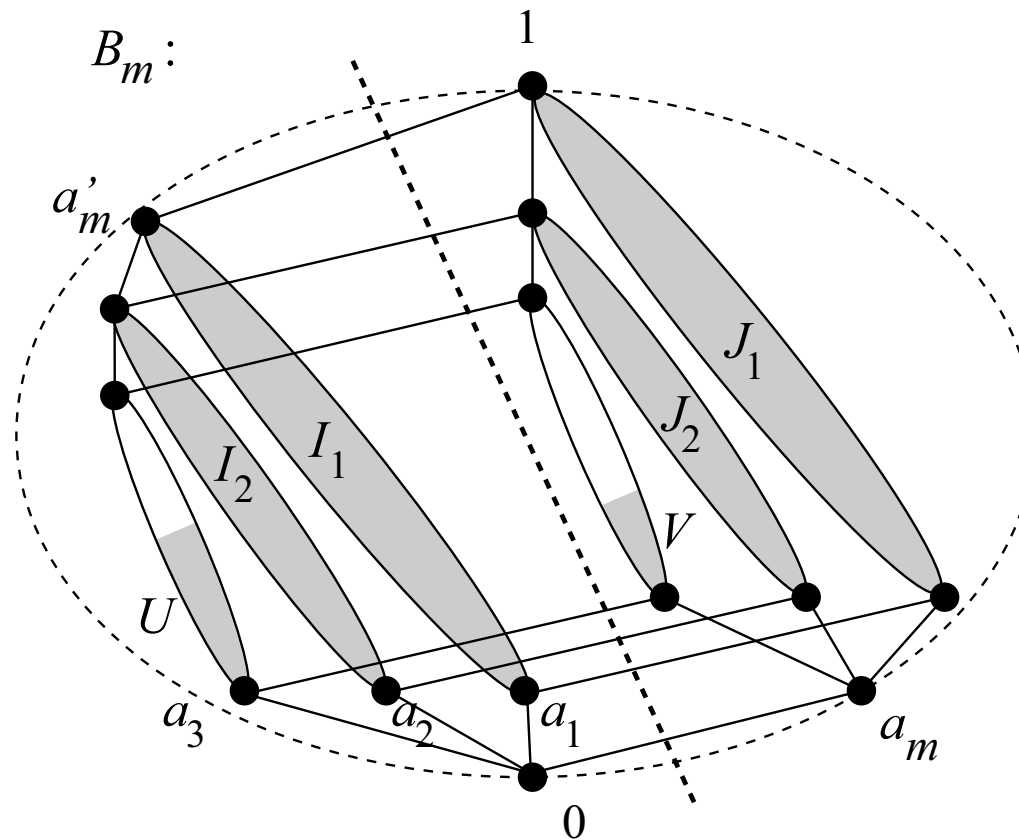
Az átlagmagasság csak nőhet, és $X_0 \cup X_1$ mohó szemiideál lesz!
 (Ehhez rendre a $K_1 = I_1 \cup J_1$, $K_2 = I_2 \cup J_2$ intervallumokat, és a K_3 intervallum most feltöltött részét tekintsük.)



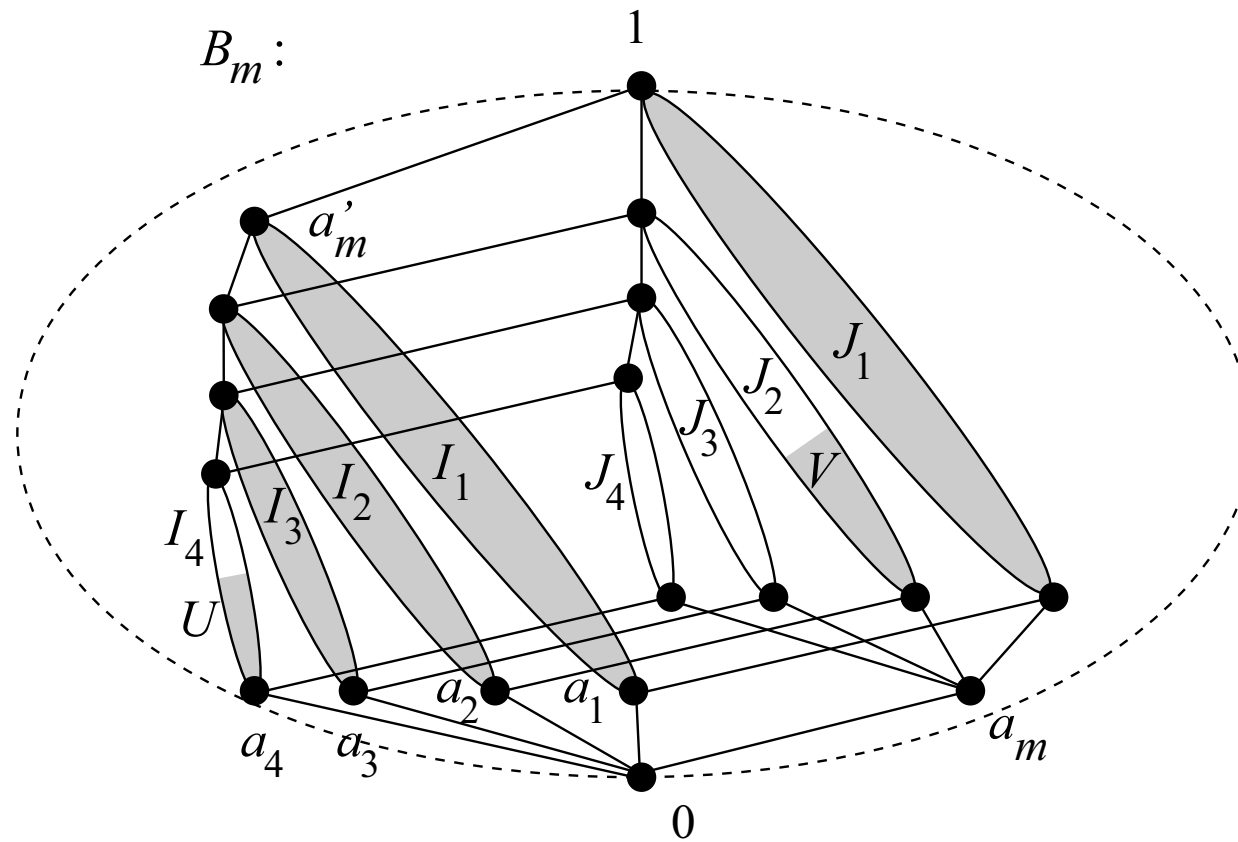
Ha $X_2 = \emptyset$, akkor kész. Egyébként



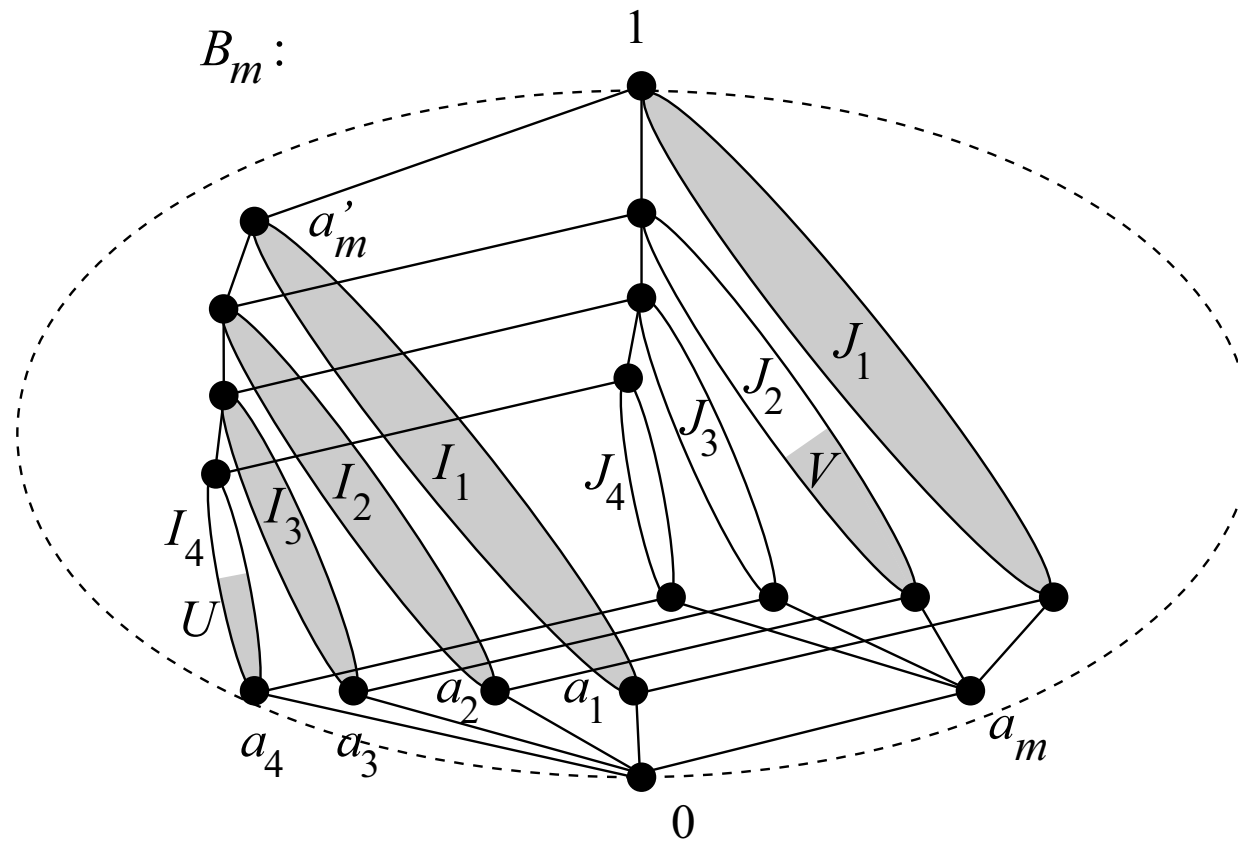
Ha $X_2 = \emptyset$, akkor kész. Egyébként $X_2 = \{a_m\}$ minimális magasságú, tehát a_m -et elhagyva és helyette $X_0 \cup X_1$ -et egy elemmel



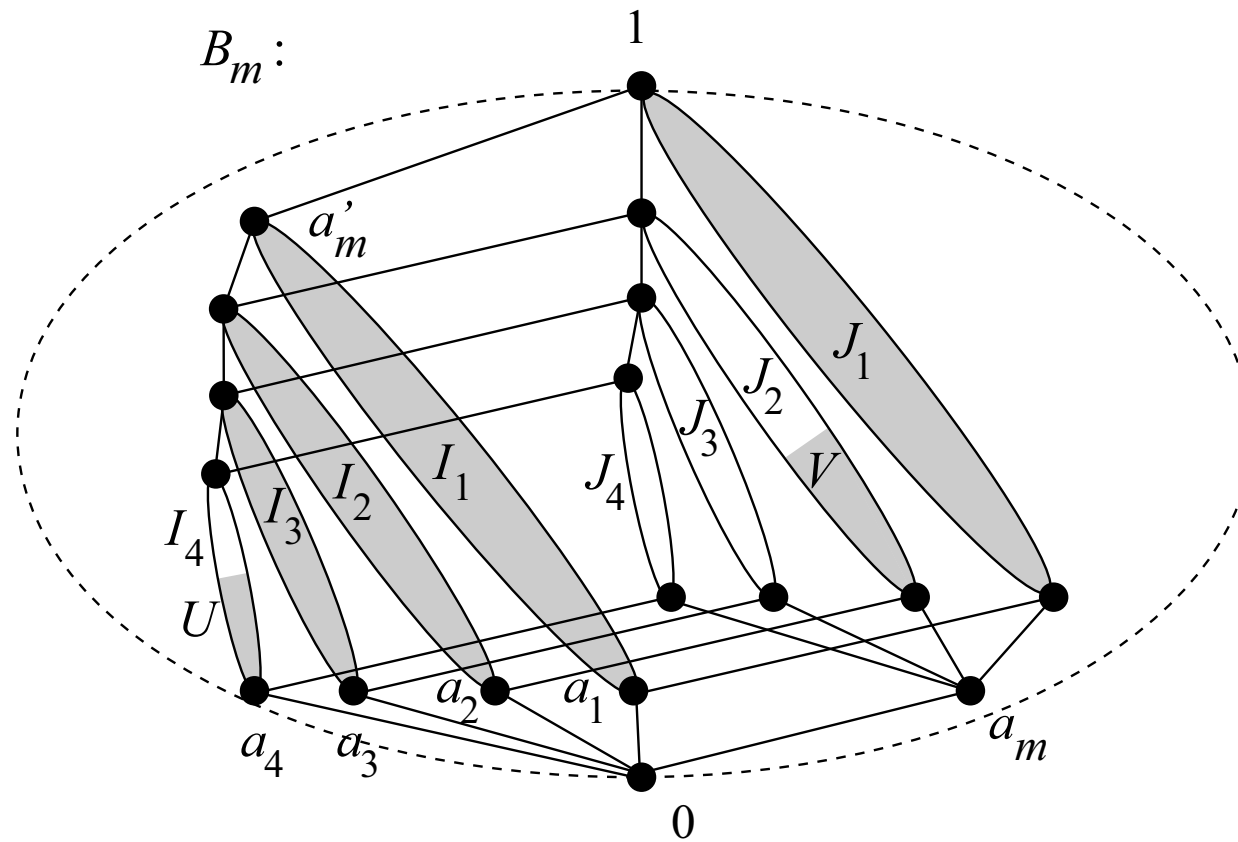
Ha $X_2 = \emptyset$, akkor kész. Egyébként $X_2 = \{a_m\}$ minimális magasságú, tehát a_m -et elhagyva és helyette $X_0 \cup X_1$ -et egy elemmel mohó szemiideállá megtoldva az átlagmagasság csak nőhet.



Amikor a két rang nem egyenlő, akkor többször is át kell pakolni a lenti részből a fentibe — a sorozataink tulajdonságai szerint ez működik. (



Amikor a két rang nem egyenlő, akkor többször is át kell pakolni a lenti részből a fentibe — a sorozataink tulajdonságai szerint ez működik. (Bonyolult, nem részletezzük.)



Amikor a két rang nem egyenlő, akkor többször is át kell pakolni a lenti részből a fentibe — a sorozataink tulajdonságai szerint ez működik. (Bonyolult, nem részletezzük.) Q.e.d.

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető ...)

T

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető ...)

Ta

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető ...)

Tam

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető ...)

Tamá

Az előző bizonyítás szerint a Frankl-sejtés pozitív megoldása igenlő választ adna az alábbi sejtésünkre is:

2. Sejtés: B_m bármely szemiideáljára érvényes az, hogy átlagmagassága legfeljebb akkora, mint a vele azonos elemszámú mohó szemiideál. (1. Sejtés: $2^{m/2}$ növelhető ...)

Tamás

3. Tétel. *Ha L féligmoduláris, akkor az $1/3$ helyett $3/8$ (azaz a $8/24$ helyett $9/24$) mondható. Azaz, ha $m = |J(L)| \geq 1$, L féligmoduláris és $|L| > 2^m - \frac{3}{8} \cdot 2^m$, akkor L -re teljesül a Frankl-sejtés.*

4. Tétel. *Ha L féligmoduláris és planáris és $|L| \geq 4$, akkor L -re teljesül a Frankl-sejtés. Sőt,*

- *vagy $1 \in J(L)$ és így $|\uparrow a| \leq |L \setminus \uparrow a|/3$; vagy pedig*
- *$|\uparrow a| \leq |L \setminus \uparrow a|$ legalább két $a \in J(L)$ -re teljesül.*

