

Sovány féligmoduláris hálókkal kapcsolatos struktúrák*

Czédli Gábor

.

Algebra szeminárium, Rényi Intézet, 2013. febr. 18.

2013. február 19.

*<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/>



Def.: Sovány háló: véges és $Ji L$ lefedhető két láncsal $\iff$ nincs 3-elemű antilánc $Ji L$ -ben (Grätzer-Knapp, 2007, CzG-Schmidt 2011). Féligmoduláris háló: az $x \mapsto x \vee c$ megőrzi a $\preceq$ -et. Alulról féligmoduláris: az $x \mapsto x \wedge c$ megőrzi a $\preceq$ -et.

Példa: $\vec{H} = (G = H_0 \triangleright H_1 \triangleright \dots \triangleright H_n = \{1\}), \vec{K}$ esetén $(\{H_i \cap K_j\}; \subseteq)$; ezt $\text{KLH}(\vec{H}, \vec{K})$ jelöli (kompozíciólánc-háló). Ez alulról fm (itt adtuk elő 2010. április 12-én Schmidt Tamással; H. Wielandt 1939) — ez egy kapcsolódó struktúra (ahogy a cím ígérte). $\rightarrow$

Megszámoljuk. 2010. április 12-én elhangzott:

Tétel (CzG–Schmidt) $\exists!$ $\pi \in S_n$ úgy, hogy minden i -re $H_{i-1}/H_i \vee K_{\pi(i)-1}/K_{\pi(i)}$. ($\Rightarrow$ Jordan–Hölder-tétel, 1870.)

Ez (is) indokolja a sovány féligmoduláris hálók tanulmányozását.

Sovány $\Rightarrow$ planáris ($\leq_{\text{rend}}$ két lánc direkt szorzata) (CzG-SchT)

Kelly-Rival Lemma (1975). Tfh D planáris hálódiaagram, C maximális lánc, $|D| \geq 3$.

- Ha $x \leq y$ és $x, y \in D$ a C különböző oldalán van, akkor $\exists z \in C$ hogy $x \leq z \leq y$. Ha $x \prec y$, akkor C azonos oldalán vannak!
- Minden intervallum régió.
- $C_l(D)$ és $C_r(D)$ is tartalmaz duplán irreducibilis elemet $\neq 0, 1$.

Kelly-Rival Koroll. (1975). Ha R régiója $D \in \text{Dgr}(L)$ -nek:

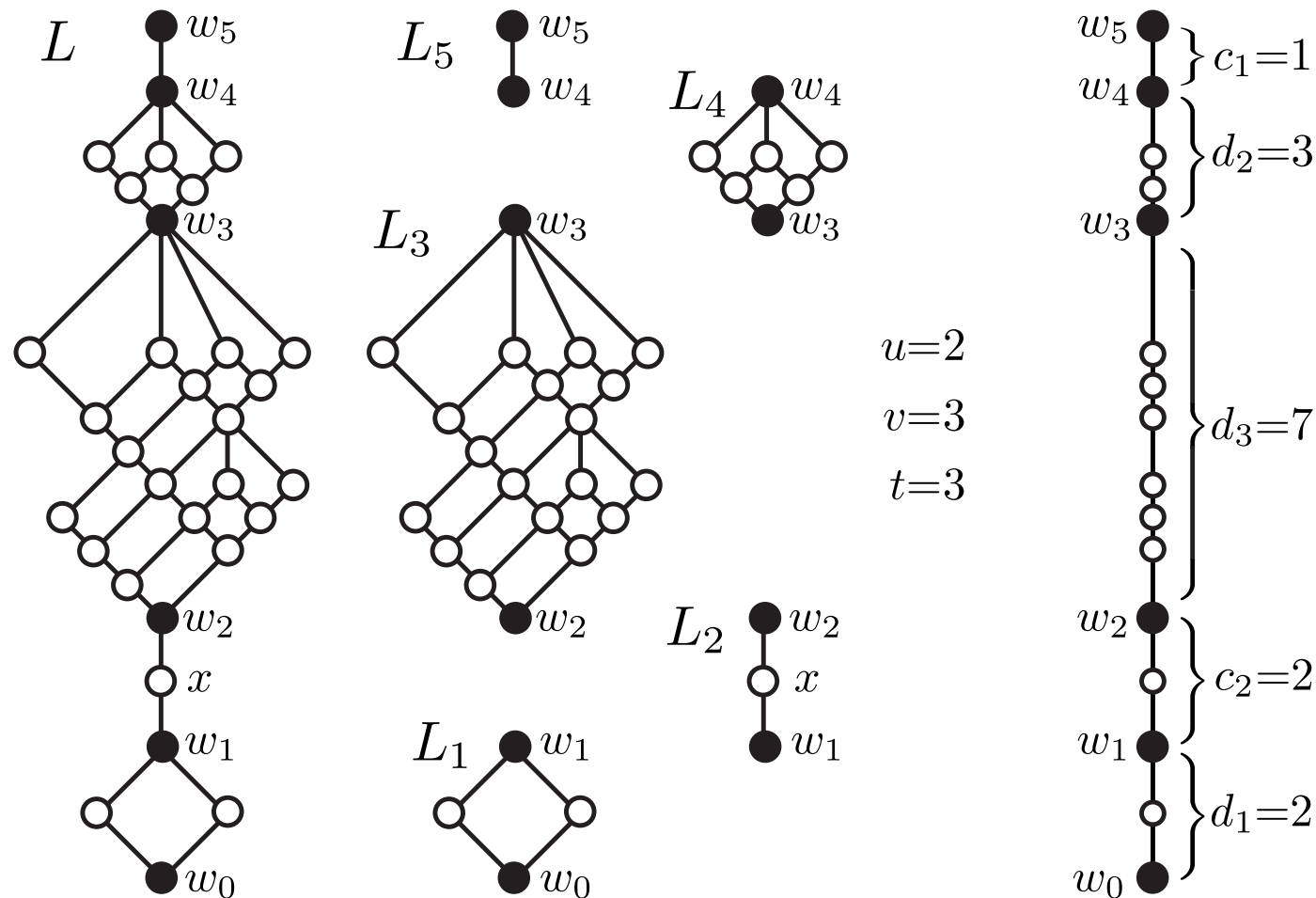
- $\text{int}(R) \subseteq \text{int}(L)$.
- $u < v$ és $|R \cap \{u, v\}| = 1 \Rightarrow [u, v] \cap \text{Bnd}(R) \neq \emptyset$.
- Ha $x \in \text{int}(R)$, és $x \prec y$ vagy $y \prec x$ in L , akkor $y \in R$.

"Felismerési" Tétel (Grätzer and Knapp 2007, CzG–Schmidt 2011). Ha L véges háló, akkor az alábbiak ekvivalensek:

- L **sovány fm háló.**
- L sovány fm és planáris 4-cella háló (azaz $\exists$ olyan diagramja).
- L planáris fm és nincs fedésőrző gyémánt (M_3).
- L planáris fm, és $\forall D \in \text{Dgr}(L)$, $\{4\text{-cellák}\} = \{\text{fedő négyzetek}\}$.
- L planáris fm, és $\exists D \in \text{Dgr}(L)$, $\{4\text{-cellák}\} = \{\text{fedő négyzetek}\}$.
- L -nek van olyan planáris 4-cella diagramja, hogy különböző 4-celláknak az alja is különböző.
- $L \ \forall$ planáris diagramja 4-cella diagram, amelyben különböző 4-celláknak az alja is különböző.

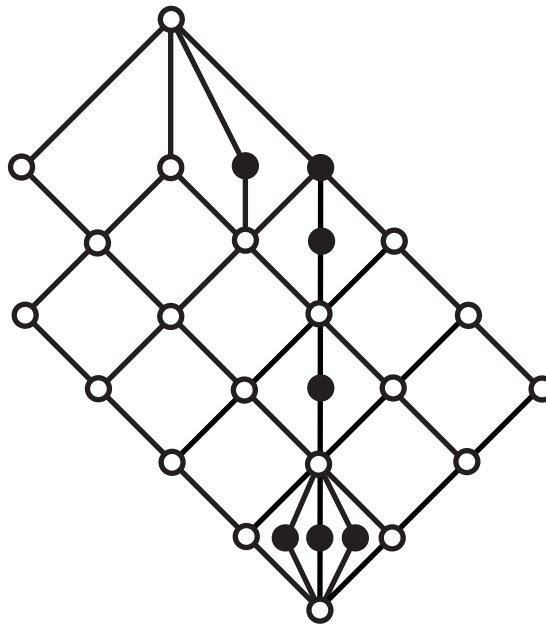
A fenti "felismerési" tétel után hat struktúratétel jön (a 2010.ápr.12-it könnyebbé tennék). Hangsúly: a diagramokon!

Lemma (evidens) Sovány fm háló egyértelműen felbontható ragasztottösszeg-felbonthatatlanok és maximális lánc-intervalumok ragasztott összegére. (Segít a bizonyításokban.)



Hasonlóság Két (háló-)diagram, D_1 és D_2 , *hasonló*, ha létezik $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$ hálóizomorfizmus, hogy bármely $x, y, z \in D_1$, $x \prec y$ és $x \prec z$ esetén y balra van z -től $\iff \varphi(y)$ balra van $\varphi(z)$ -től, és duálisan. (A hasonló diagramokat nem különböztetjük meg.)

Def. (Teljesen lefogyasztott, "full slimming"): D_1 , D_2 planáris fm hálódiaagram, D_2 sovány. Ha D_2 -őt úgy kapjuk D_1 -ből, hogy az M_3 -ak belsejét rendre elhagyjuk (ld. feketék), akkor D_2 a D_1

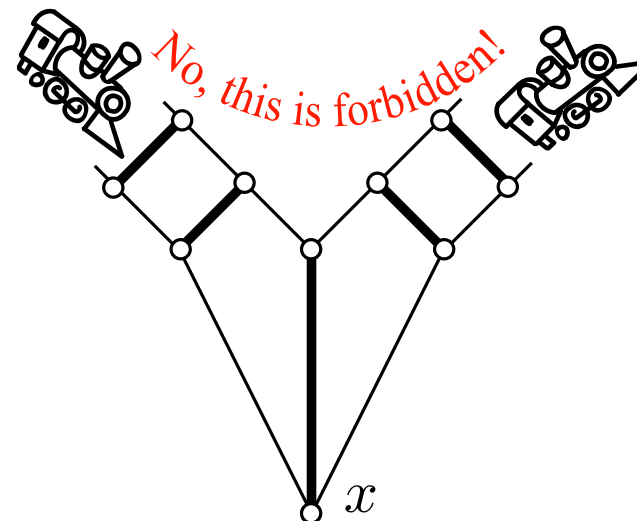
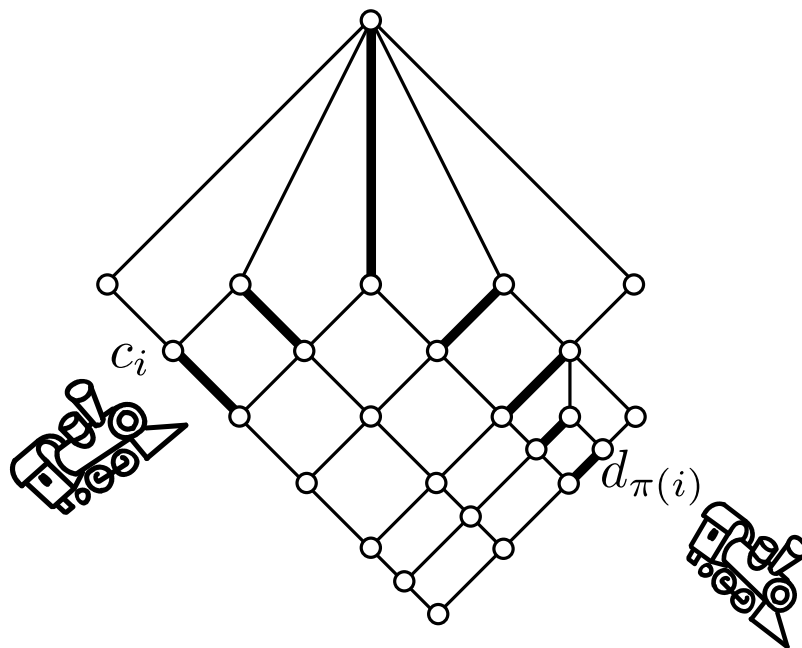


teljes lefogyasztottja.

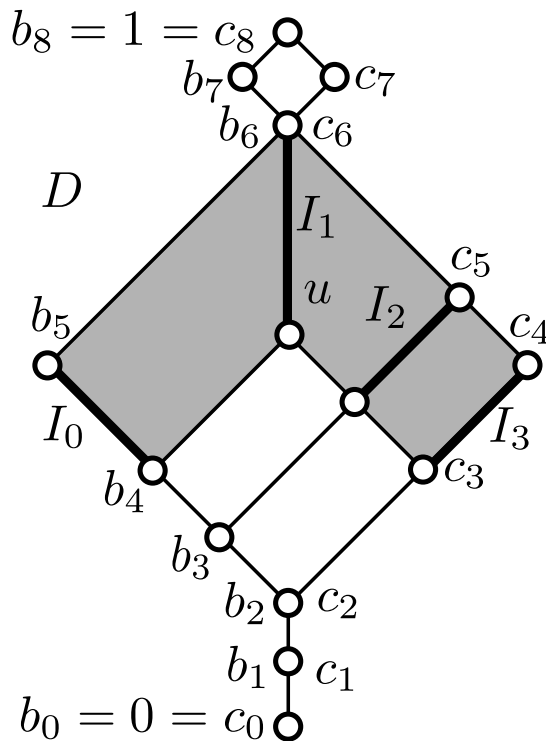
Lemma (Grätzer–Knapp) Legyen D_1 és D_2 planáris hálódiaagram, és legyen D'_i a D_i teljesen lefogyasztottja. Ekkor

- D_1 hasonló D_2 -höz $\iff D'_1$ hasonló D'_2 -höz.
- D_1 fm $\iff D'_1$ fm.
- Egy planáris háló fm $\iff$ valamelyik teljes lefogyasztottja fm $\iff$ bármelyik teljes lefogyasztottja fm.
- Tehát majdnem minden kérdés tekintetében a planáris fm hálók (és diaagramok) visszavezethetők a sovány fm hálókra (és diaagramokra).

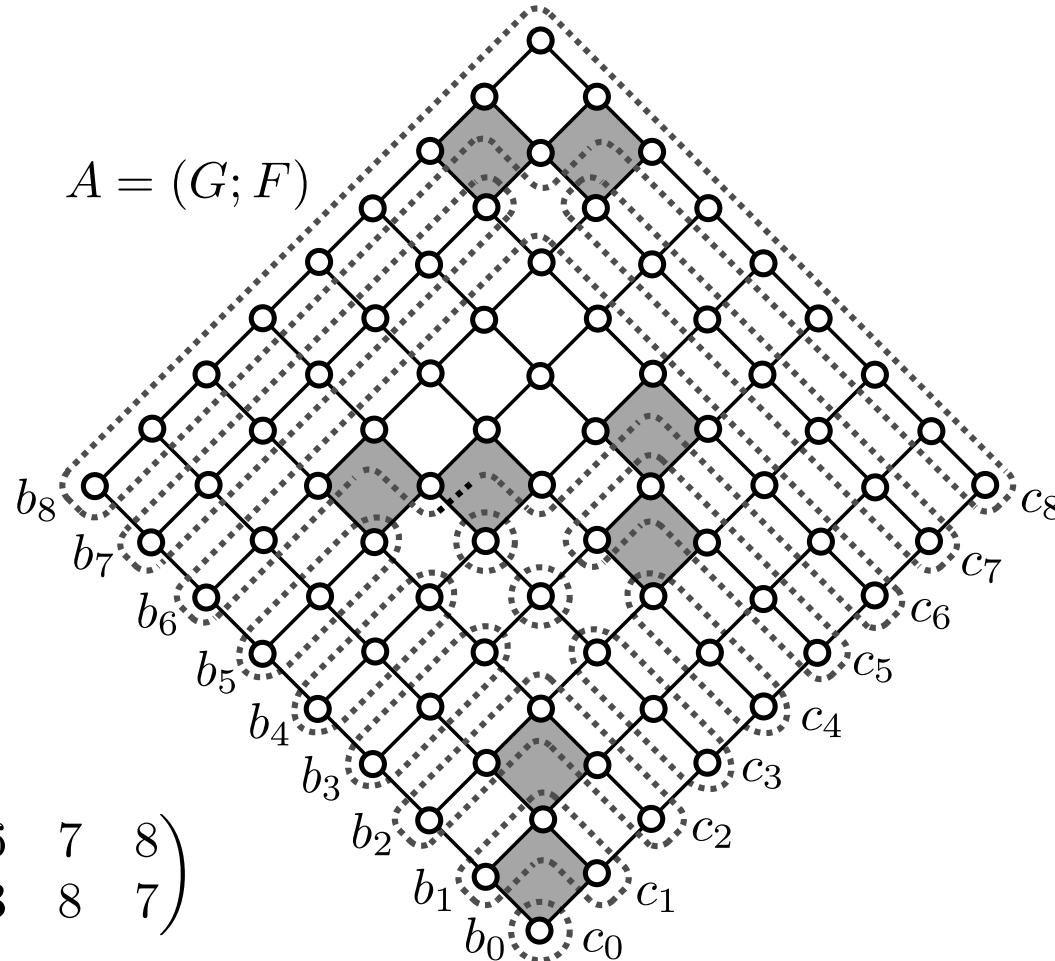
Először R. Stanley (1972) és H. Abels (1991) rendelt **permutációkat** fm hálókhoz. CzG-Schmidt (2010.ápr.12) sovány fm *diagramhoz* máshogy: *trajektóriákkal*. Azaz $n := \text{length}(D)$; ha a bal határlánc i -edik intervalluma a jobb határlánc j -edik intervallumával van egy trajektórián, akkor $j = \pi(i)$. Ekkor $\pi = \pi_D \in S_n$.



1. Struktúratétel (CzG-SchT, 2011) Ez a hozzárendelés bijekció az n hosszúságú sovány fm diagramok (hasonlósági osztályainak) halmazából S_n -be. Az inverz leképezés „ábrája”:



$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$



Következményként bizonyítottuk az alábbi két tételt:

Tétel ($\subseteq$ Czédli, Dékány, Ozsvárt, Szakács, Udvari).

- $|\{n \text{ hosszú sovány fm hálók}\}|$, ha $n \leq 100$ (Ozsvárt: $n \leq 1000$);
- $|\{n \text{ hosszú sovány fm hálók}\}| \approx n!/2$ (aszimptotikus);
- $|\{n \text{ elemű sovány fm hálók}\}|$, $n \leq 50$; 50-re 14 546 017 036 127;
- $|\{n\text{-elemű sovány disztrib. hálók}\}| = C_n$ (Catalan number);
- $|\{n\text{-elemű sovány fm. diagramok}\}| \approx c \cdot 2^n$, ahol $c \in (0, 1)$.

Például az n hosszúságú sovány fm. hálók száma =

4666300514485158296402274322204901463839367594

229481848806020032670884439457210266367922

3692209862830282250013360549818627829410391

422578476758494039360841845 $\approx 0.4666300514 \cdot 10^{158}$.

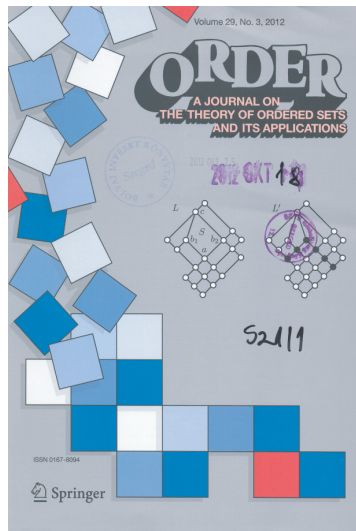
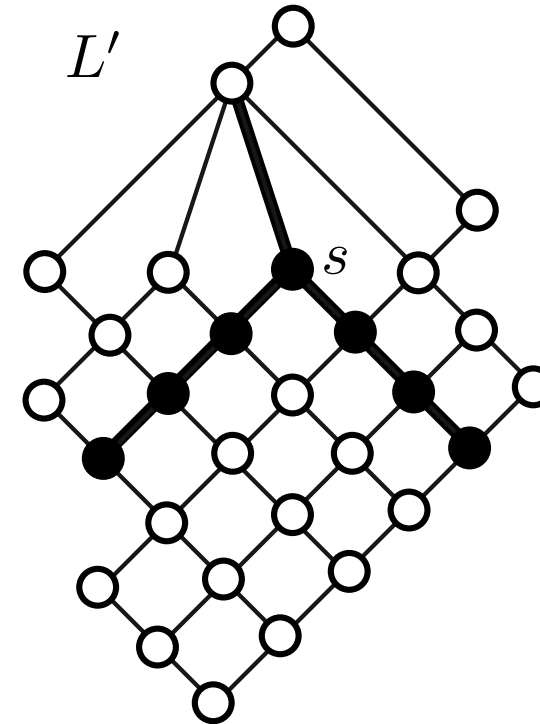
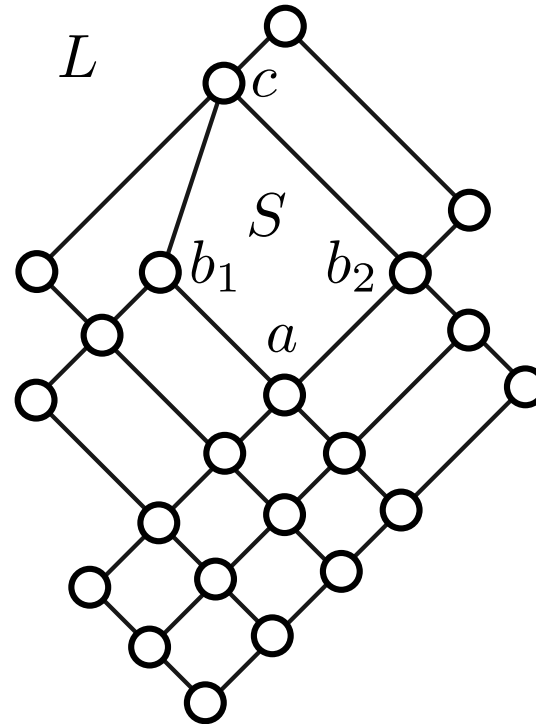
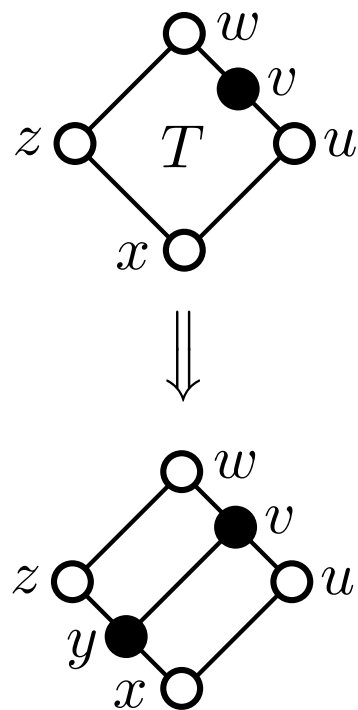
CzG-Ozsvárt-Udvari: *How many ways can two composition series intersect?*, Disc. Math. **312**, 3523-3536 (2012).

Az $n!/2$ -höz való bizonyítás ötlete: Szakaszosan egyenlő vagy inverz permutációk, majd elemi kombinatorika.

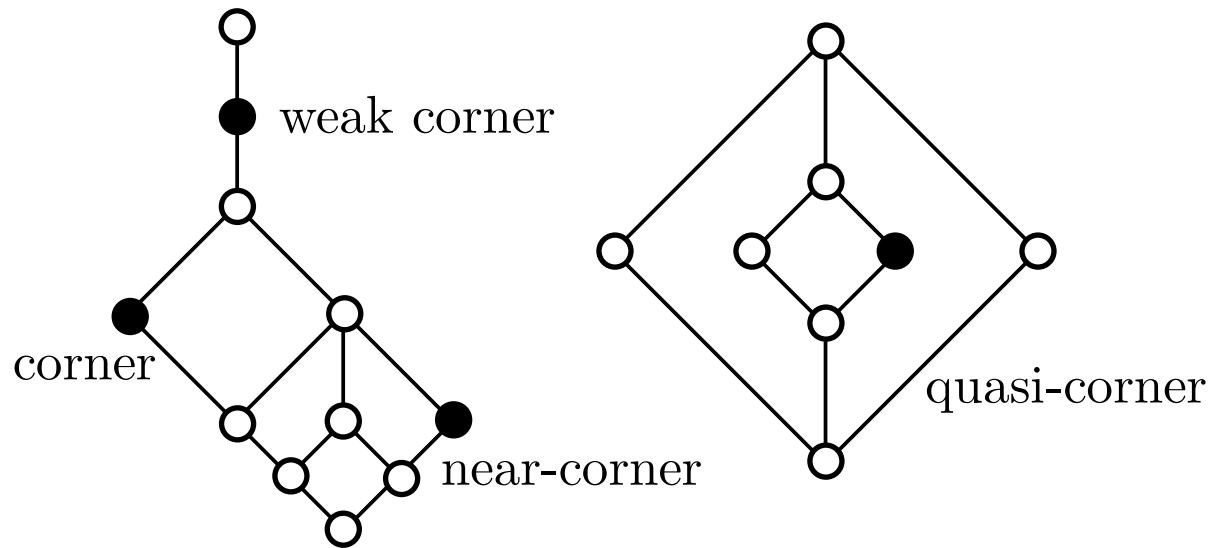
Tétel (CzG-SchT, 2011) A sovány fm. hálók pontosan a kompozíciólánc hálók (azaz a $\text{KLH}(\vec{H}, \vec{K})$ hálók) duálisai.

Bizonyítás: Hogy a KLH hálók duálisai fm hálók, már mondtuk (H. Wielandt, 1939), és triviálisan soványak. Fordítva, elég a permutációkat reprezentálni! Mivel a perm. által egymásnak megfeleltetett faktorok (mint faktorcsoportok) izomorfak, és $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_5 \times \cdots \times \mathbf{Z}_{p_n}$ -ben azok bármilyen sorrendben lehetnek, q.e.d.

Előkészület a következő struktúratételhez:



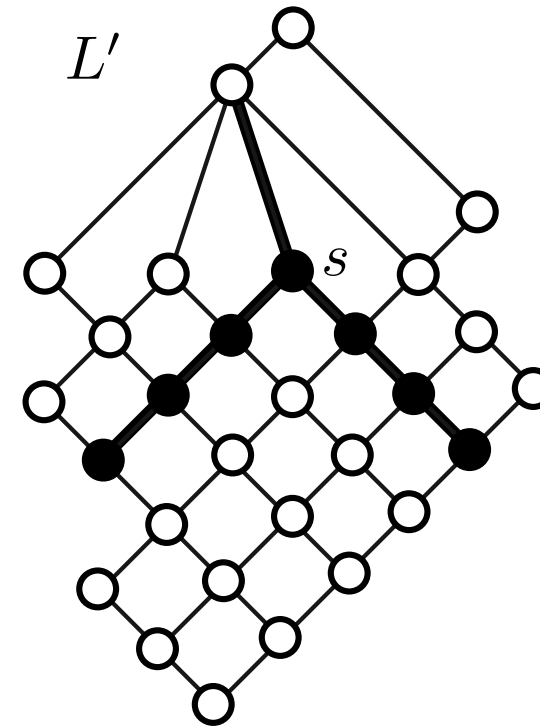
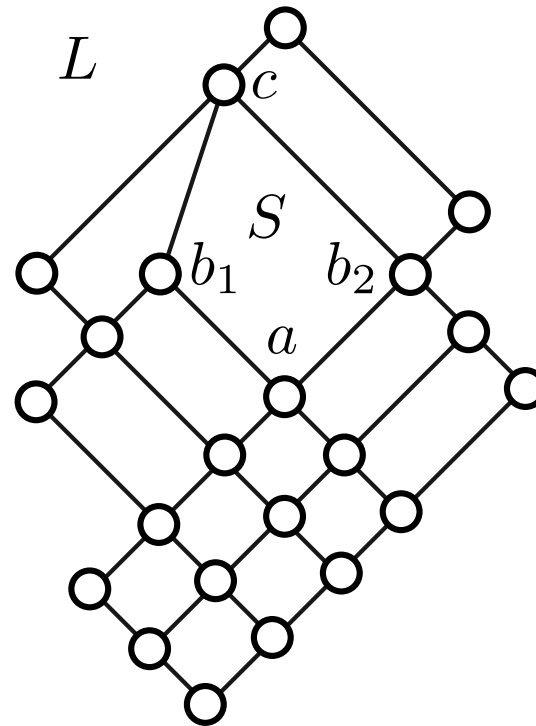
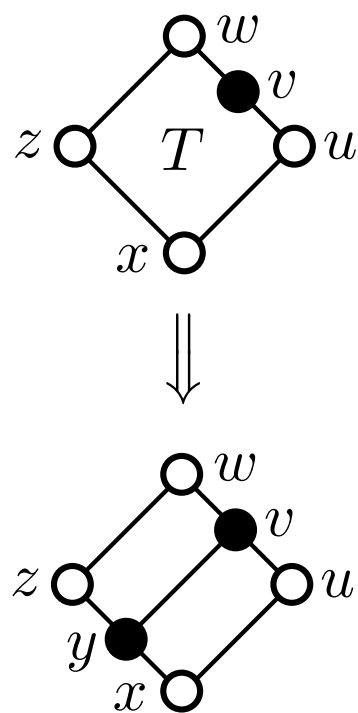
Definíció (CzG-Schmidt):
Villa beszúrása egy 4-cellába



Majdnem sarok = olyan d duplán irreducibilis elem a határon, hogy d_* -nek pontosan kettő fedője, d^* -nek pedig legalább kettő alsó fedője van.

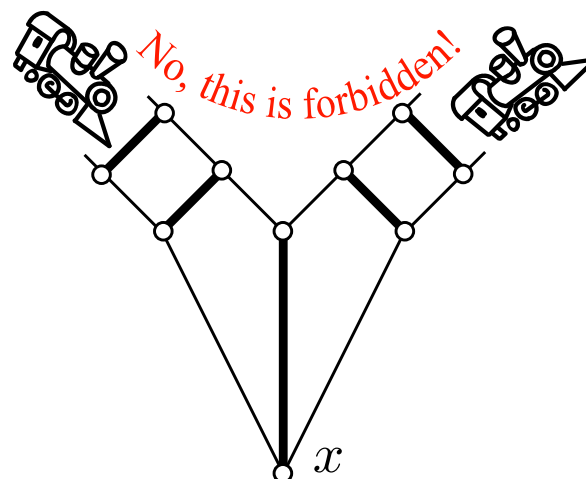
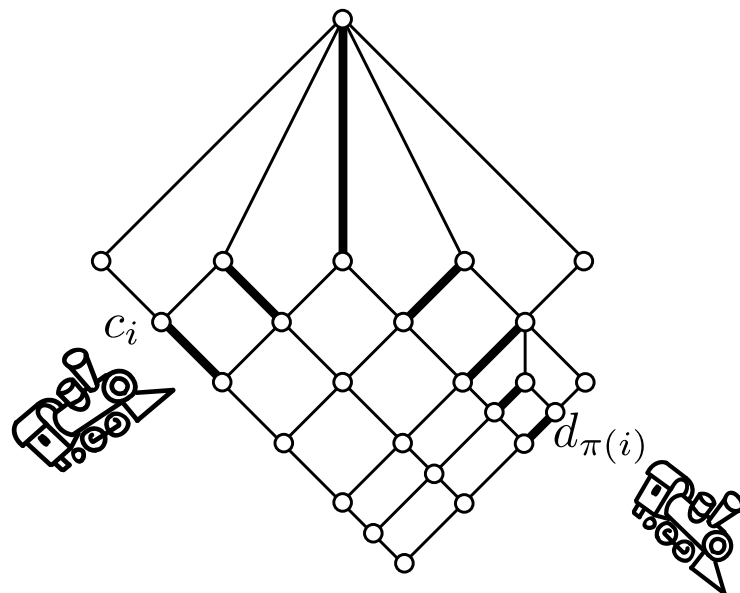
Sarok = olyan d duplán irreducibilis a határon, hogy d_* -nek pontosan kettő fedője és d^* -nek pontosan kettő alsó fedője van.

Lehet bal vagy jobb. Hozzáadása, törlése megőrzi a „sovány fm” tulajdonságot. **Állítás:** Minden sovány fm diagram megkapható láncból majdnem-sarkok egyesével történő hozzáadásával (könnyű). (Ennél hasznosabb "iker-állítások" jönnek.)



Állítás (CzG–Schmidt, Order 2012) $\forall$ sovány fm diagram megkapható láncból kiindulve sarkok és villák hozzáadásával.

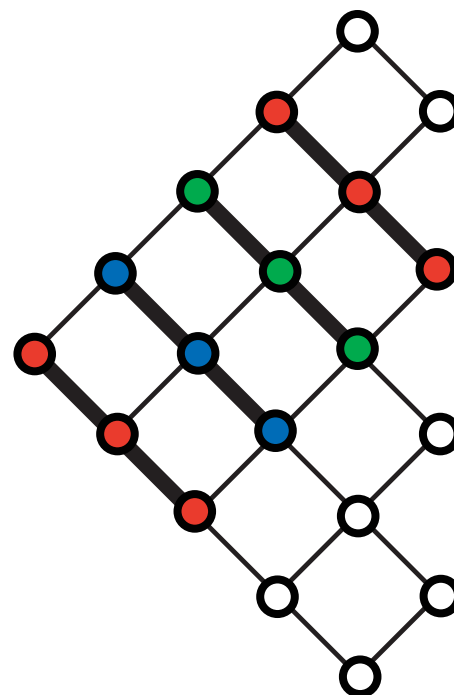
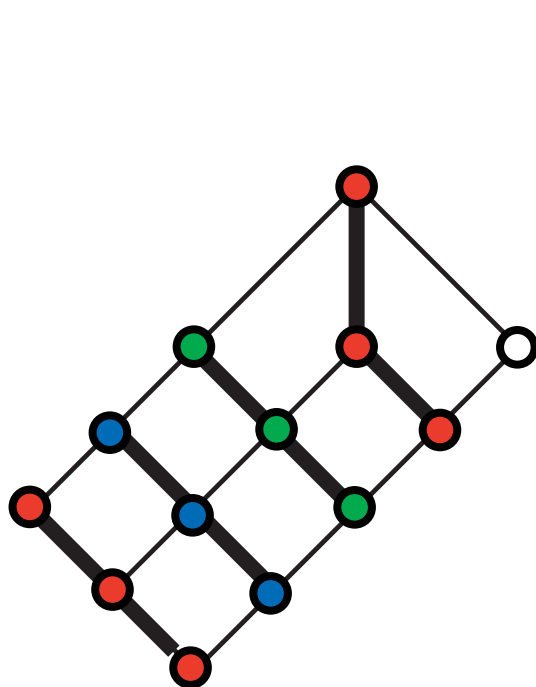
2. Struktúratétel (CzG–Schmidt, Order 2012) $\forall$ sovány fm diagram megkapható két lánc direkt szorzatának szokásos diagramjából (azaz egy *rácsból*) úgy, hogy először villákat adunk hozzá, majd sarkokat törölünk.



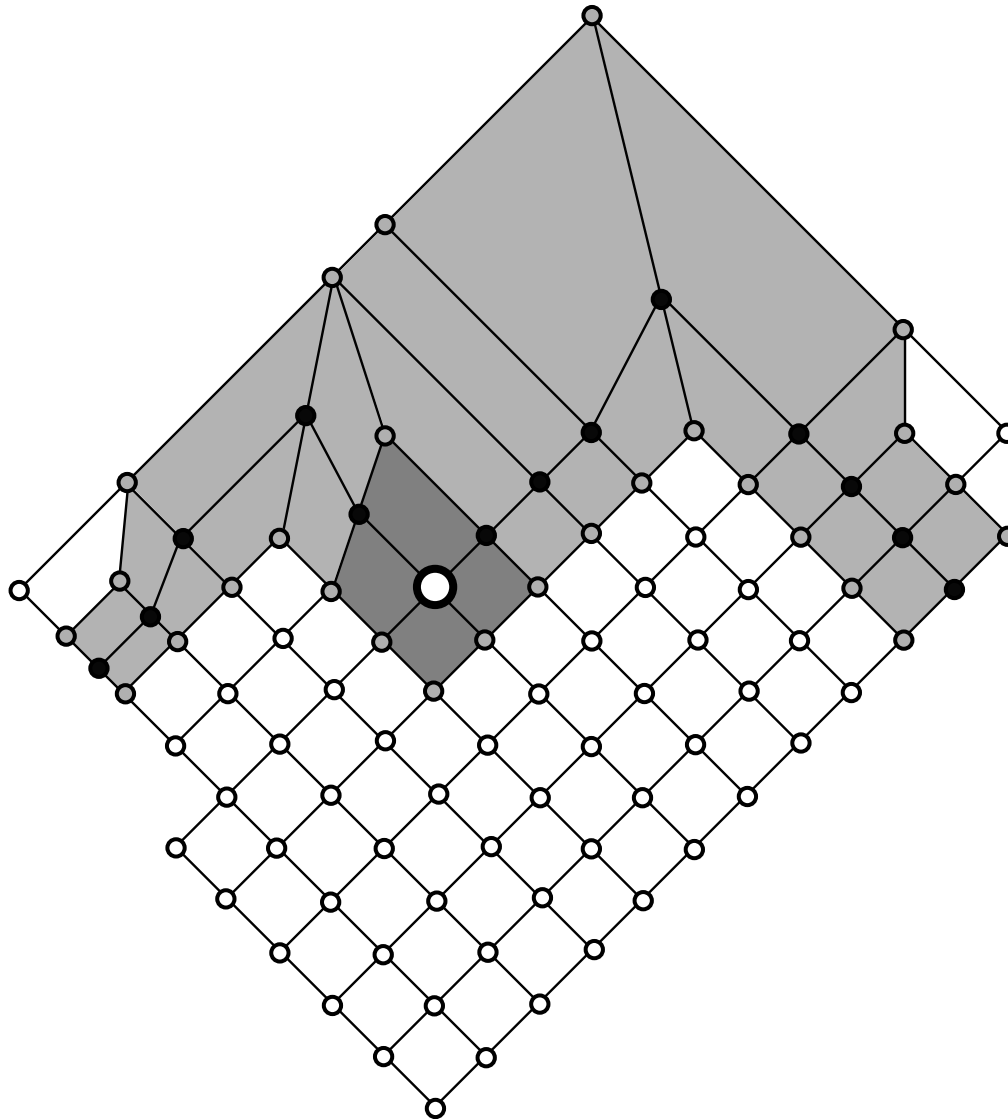
Két kételemű fedőlánc *szomszédos*, ha uniójuk fedő négyzet. Ezen reláció ekvivalenciaburkának osztályai a trajektóriák (mostantól **C₂-trajektóriák**). A C₂-trajektóriák balról jobbra mennek, először ÉK-re, csak egyszer fordulhatnak, majd DK-re. Nem ágaznak el.

Két 3-elemű fedőlánc *szomszédos*, ha uniójuk fedő C₃ × C₂. Az ekvivalenciaburok osztályai az ún. **C₃-trajektóriák**. Ezek is balról jobbra mennek, először ÉK-re, csak egyszer fordulhatnak, majd DK-re. Nem ágaznak el.

Lényeges különbség: egy C_2 -trajektória mindig a bal határlánctól indul és a jobb határláncon ér véget. C_3 -trajektóriák esetén nem mindig!



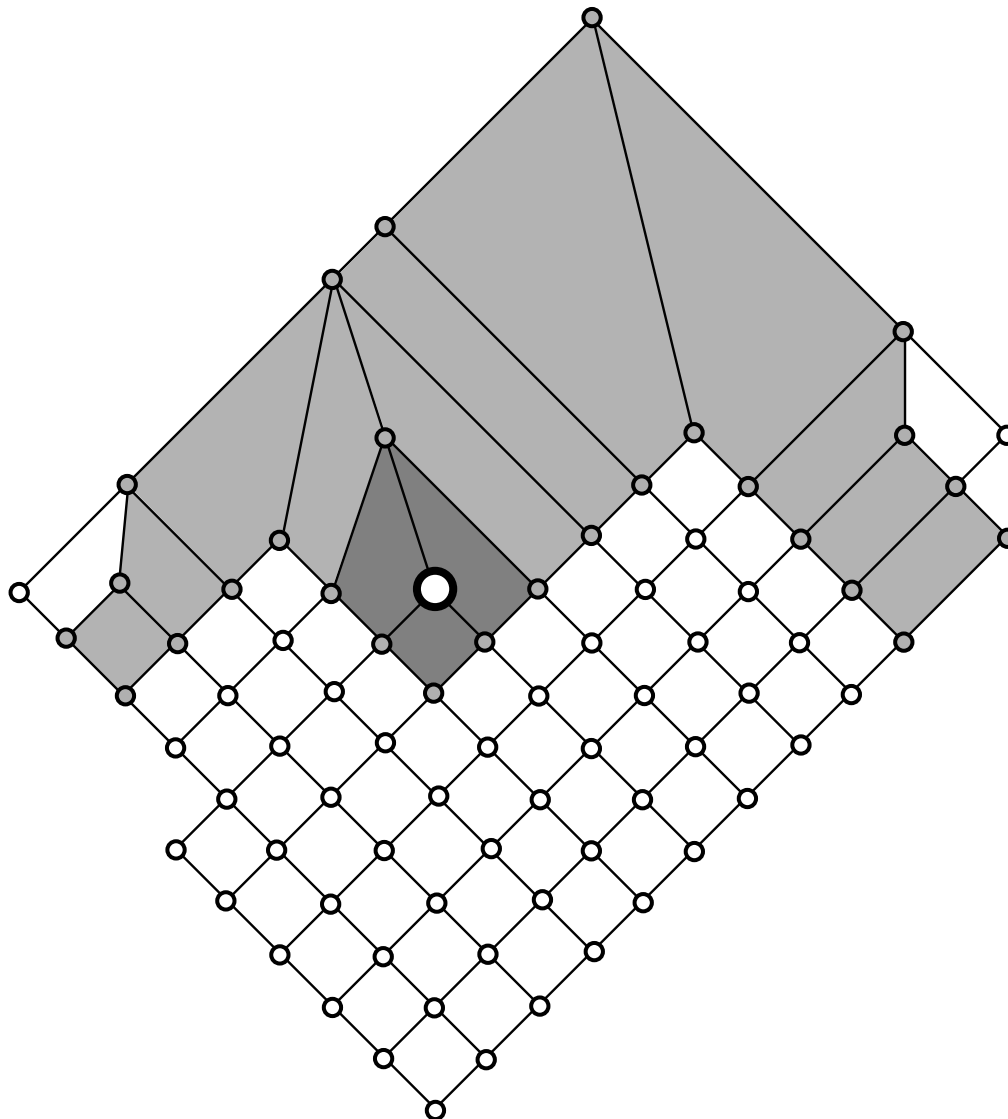
Egy C_i -trajektória elemei az őt alkotó C_i -láncok. Ha B egy fedő C_i -lánc, akkor az őt tartalmazó (egyértelmű) C_i -trajektórián a tőle jobbra levő elemek (azaz C_i -láncok) B -vel együtt alkotják a B **jobbszárnnyát**; a **balszárnny** hasonló.



Kimetszés

(CzG–Grätzer, 2012).

D sovány fm. Legyen $B = C_3^2$ (sötétszürke). Tfh. B mindkét szárnya eléri a határt. Töröljük a fekete elemeket! Amit visszamarad, az a kimetszés eredménye:



3. Struktúratétel

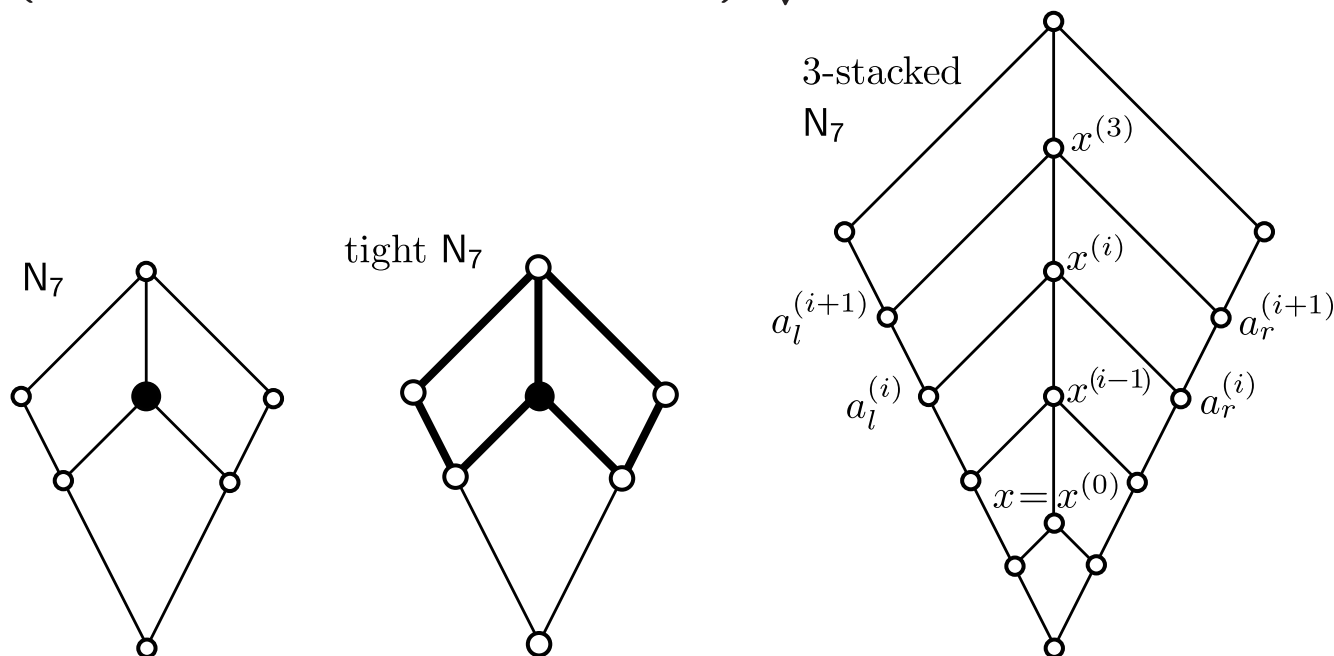
(CzG–GG, Order/online 2012)

Sovány fm diagramok =
sovány disztributív
diagramokból kimetszések
sorozatával nyerhető
diagramok.

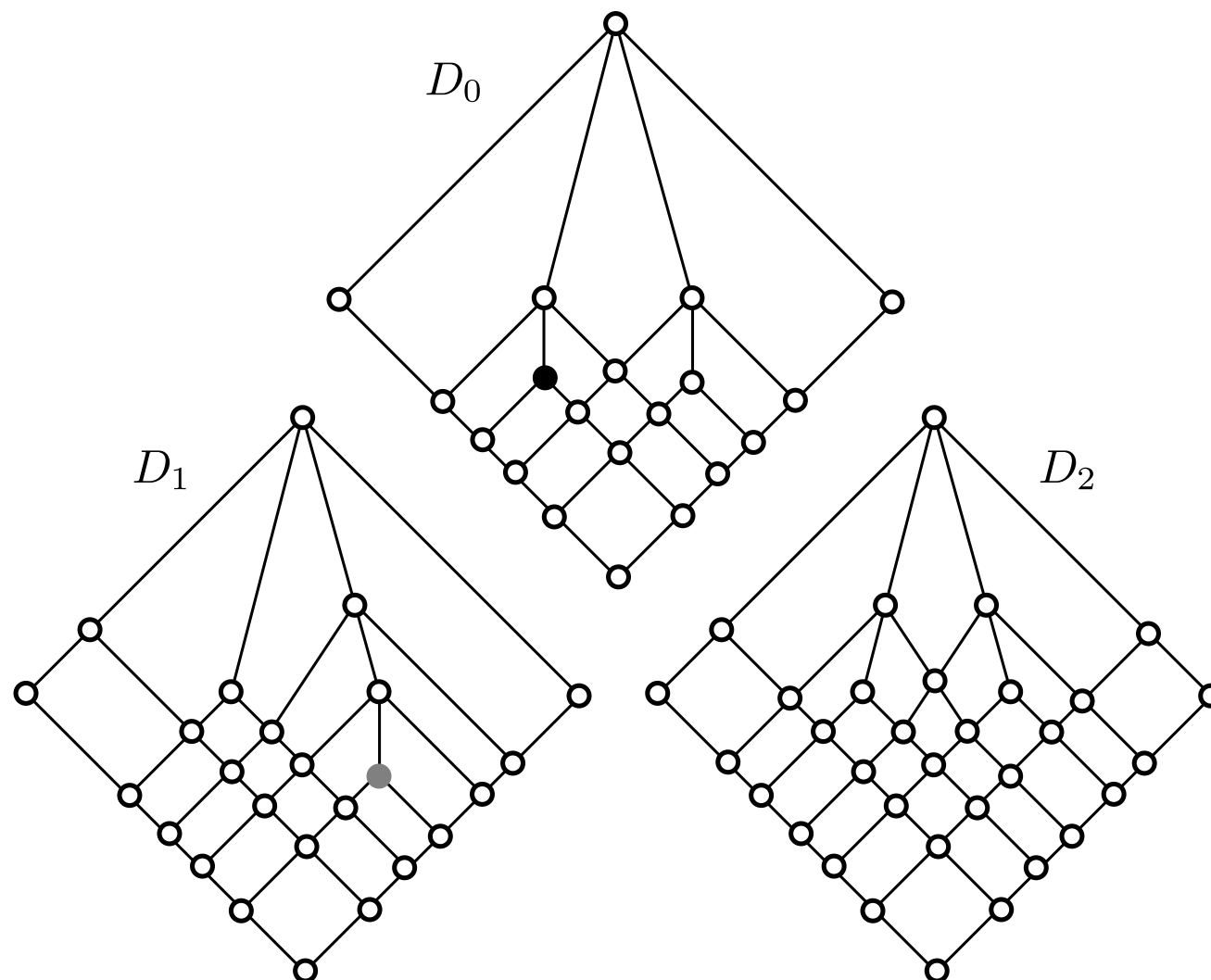
Megj.: sovány disztr.
diagr. = rácsból (azaz lánc²
diagramból) sarkok elhagyá-
sával keletkező diagram.

A kimetszés inverzét
beültetésnek nevezzük.

Bizonyítás $\Rightarrow$: a kimetszés őrzi a „sovány fm” tulajdonságot (4-cellák, aljuk különbözik) $\checkmark$

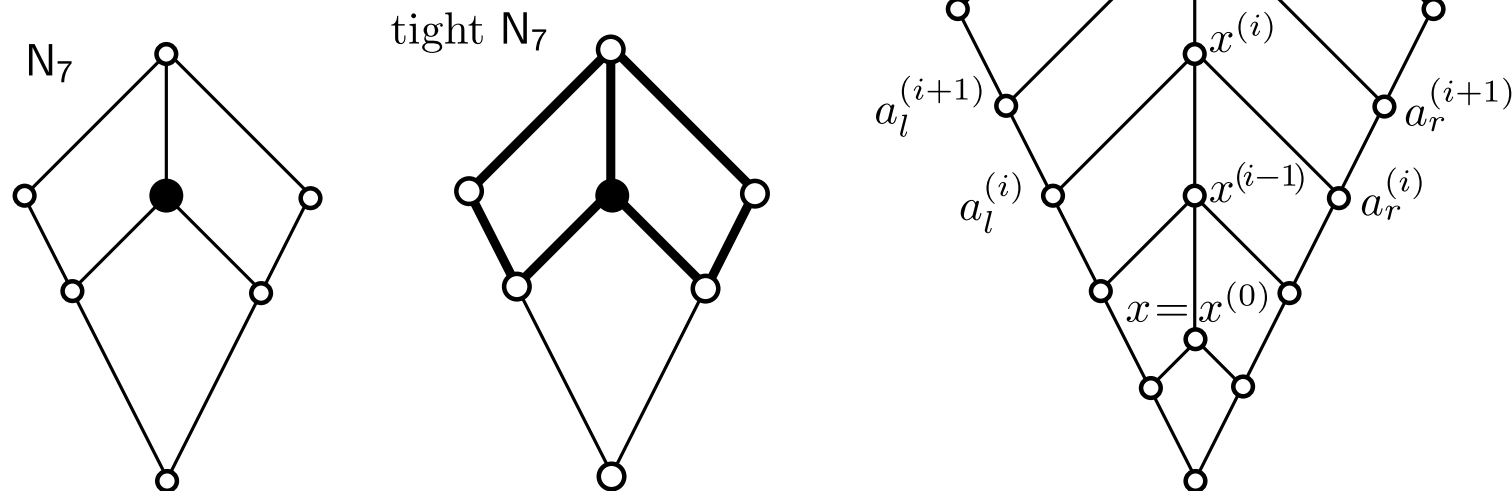


$\Leftarrow$: Elég megszabadulni (beültetésekkel) a fedő N_7 -ektől, mert akkor (ismert lemma) disztributív lesz (tehát a filmet fordítva lejátszva adódik az állítás.) Az előző lap ábrájából N_7 -nél beültetést végrehajtva az azt megelőző ábrát kapjuk, az N_7 eltűnik; és ezt kell ismételni! Q.e.d.



NEM JÓ! Két

lépés után a fedő N_7 -ek száma nem változott (maradt kettő)!
(Mert nemcsak eltűnik, hanem keletkezik is.) ????

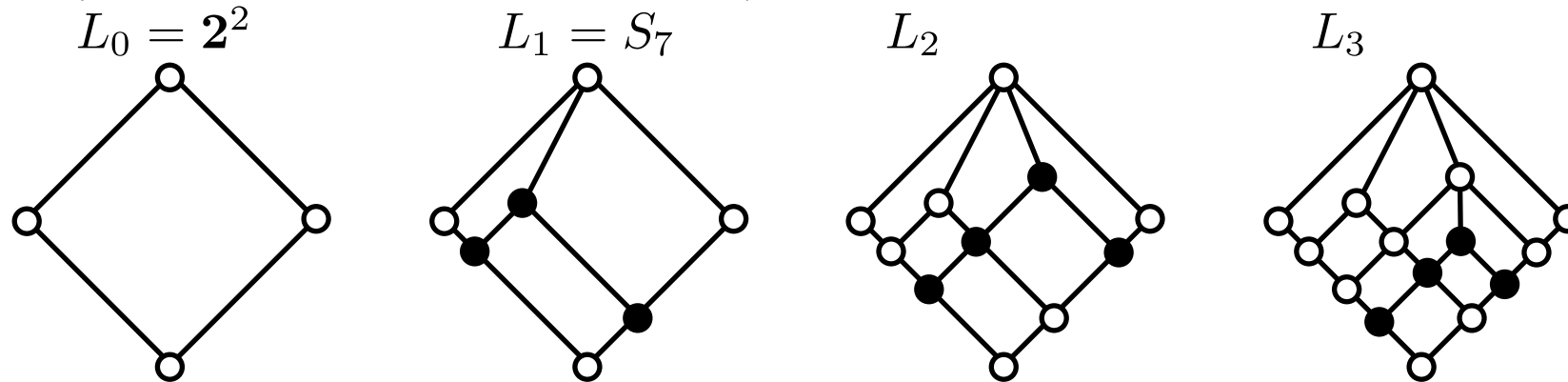


Horgony: fedő N_7 belső eleme. Egy x horgony **rangja:** a legnagyobb t hogy $\exists$ fedő t -emeletes („stacked”) N_7 , amelynek x a legkisebb belső eleme. Az ábrán $\text{rank}(x) = 3$.

Lemma. Ha az x horgonynál végezzük a beültetést, akkor x megszűnik horgony lenni; ha rangja ≥ 2 , akkor helyette x^* lesz horgony eggyel kisebb ranggal. (A többi horgony marad de rangjuk nőhet; további horgony nem lesz.) Speciálisan, ha x rangja 1, akkor a fedő N_7 -ek száma csökken.

Tétel biz.: mindig minimális rangú x -nél ültessünk be. Q.e.d.

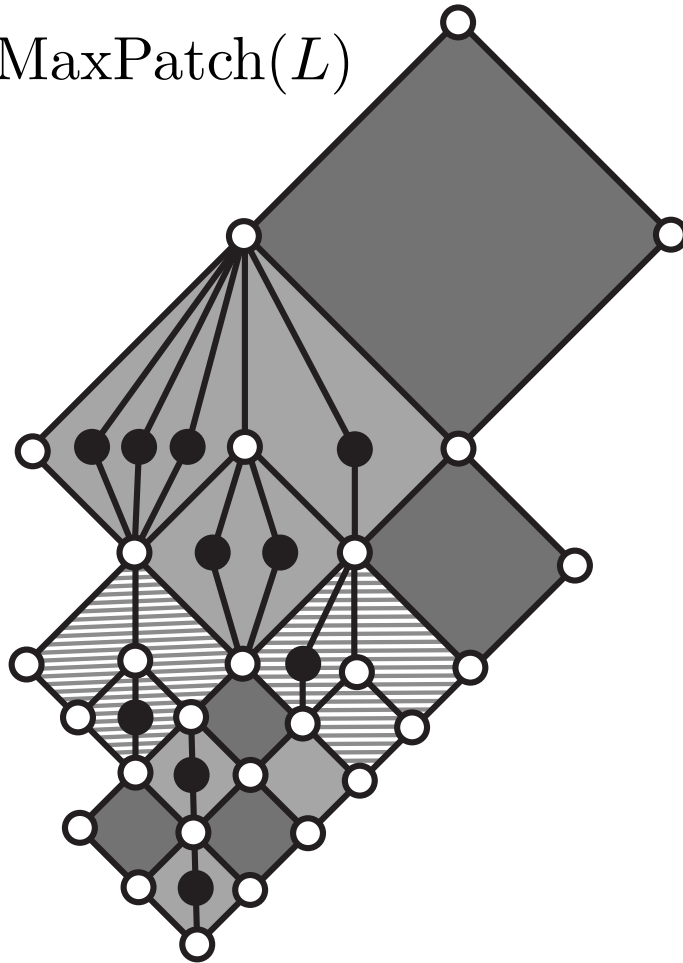
Def. (Czg–Schmidt, Order, online 2012) **Foltdiagram** („patch diagram”): planáris, fm, és mindkét határon pontosan egy duplán irreducibilis elem van, és az koatom.



Tétel (Czg–Schmidt, Order, online 2012) Minden foltdiagram megkapható egy négyzetből kiindulva úgy, hogy először villákat szúrunk be, majd a kapott hálót „felhízlaljuk” („anti-slimming”, fedő négyzeteket egy-egy elem beszúrásával M_3 -makká alakítunk).

Patchwork tétel (CzG–Schmidt, Order, online 2012) $\forall$ planáris fm diagram a maximális folt-intervallumainak „patchwork”-je:

L and $\text{MaxPatch}(L)$



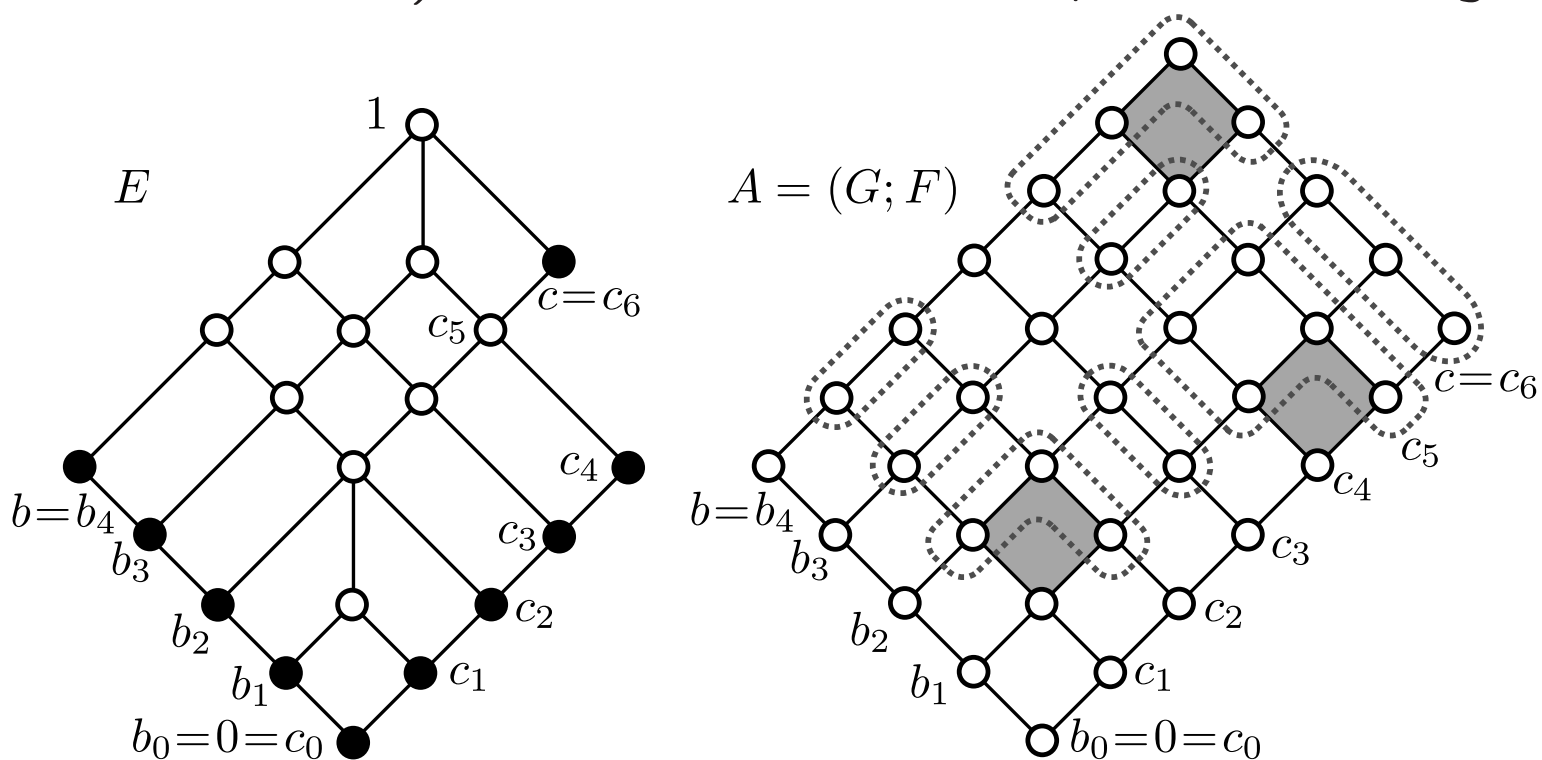
Def. *Hall–Dilworth ragasztás:* Tfh $L = L_1 \cup L_2$, továbbá $L_1 \cap L_2$ filter L_1 -ben és ideál L_2 -ben. Amikor emellett $L = L_1 \cap L_2$ lánc, akkor *lánc mentén történő Hall–Dilworth ragasztásról* beszélünk.

4. Struktúratétel (CzG-Schmidt: Order online 2012)

- A Hall–Dilworth-ragasztásra nézve felbonthatatlan véges hálódigramok,
- a lánc mentén történő Hall–Dilworth-ragasztásra nézve felbonthatatlan véges hálódigramok,
- és a foltdiagramok pontosan ugyanazok.

(A foltdiagramokat már leírtuk $\Rightarrow$ ez tényleg struktúratételt ad. A fenti tétel eredetileg a Patchwork cikkünk mellékterméke; később Grätzer Gy. közvetlen bizonyítást is adott.)

M. Stern (1999): sovány fm háló = rács (azaz két véges lánc direkt szorzata) fedésőrző $\vee$ -homorf képe. Minimális grid=?



Az E sovány fm háló mátrixa =

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 Egy m -szer n -es bitmátrix **reguláris** ha

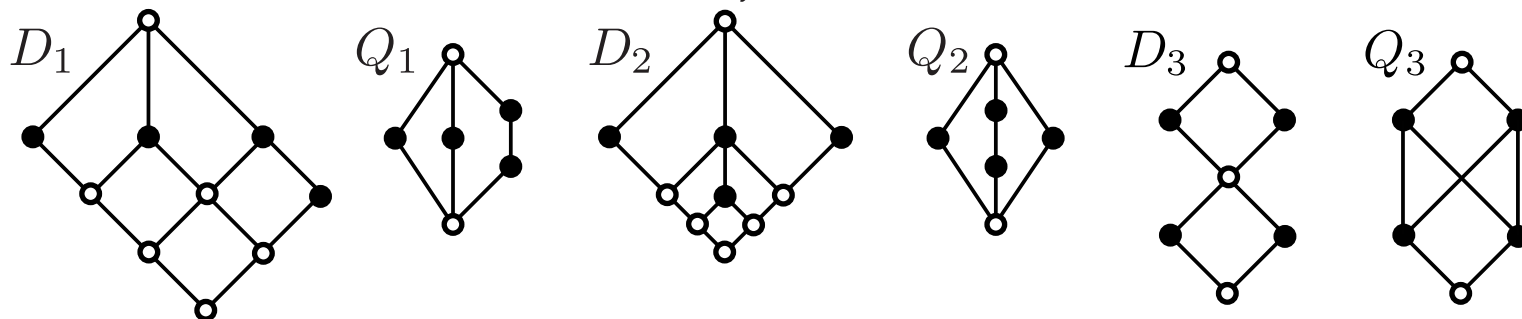
- $\forall$ sorban és $\forall$ oszlopban legfeljebb egy 1-es van;
- kevesebb, mint $\min\{m, n\}$ egyes van;
- $\forall k$, a bal felső k -szor k -as sarokmátrixban k -nál kevesebb 1-es van;
- Ha egy sor utolsó eleme 1, akkor van ezen sor előtt azonosan 0 sor. ($\Rightarrow a_{1n} = 0$.)
- Ha egy oszlop utolsó eleme 1, akkor van ezen oszlop előtt azonosan 0 oszlop.

5. Struktúratétel (CzG, Order 2012). A leírtak egy bijekciót adnak a sovány fm diagramok és a reguláris mátrixok között.

Kelly–Rival 1975: ha $u \parallel v$ egy planáris hálódigramban, akkor az alábbi két feltétel ekvivalens (*):

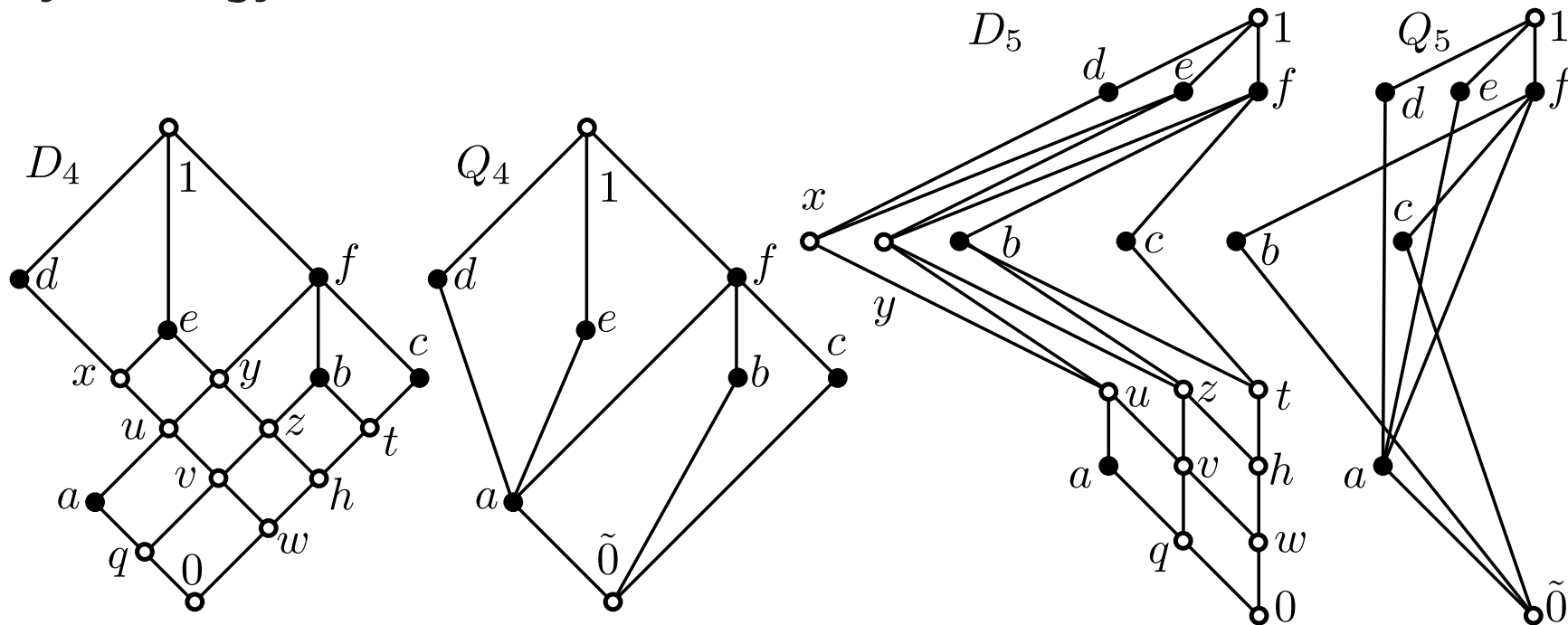
- van olyan u -t tartalmazó maximális lánc, amelynek v a jobb oldalán van;
- bármely u -t tartalmazó maximális láncnak v a jobb oldalán van.

— Ekkor azt mondjuk, hogy v jobbra van u -tól; jelölése: $v \varrho u \iff u$ balra van v -től, jelölése $u \lambda v$. Ha egy háló rendezésdimenziója ≤ 2 , akkor planáris, tehát (*) teljesül. Poset-ekre a planaritás nem igaz, ld. Q_3 ! (Technikai okokból csak korlátosakkal foglalkozunk.)

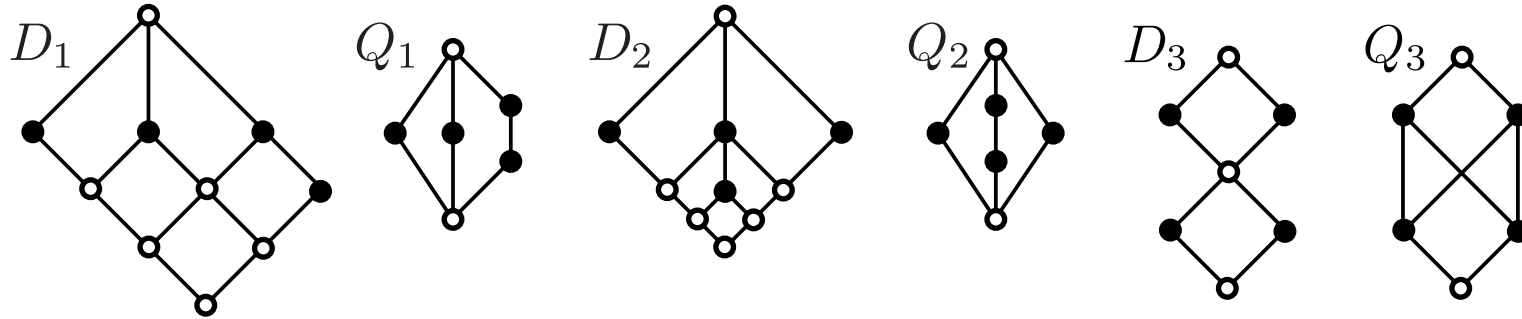


Def. (CzG 2012): Egy poset diagram **kváziplanáris**, ha véges, korlátos, és (*) teljesül. ($\iff$ rendezésdimenziója ≤ 2) Pl. ilyen Q_3 . És ilyen minden planáris korlátos véges poset diagram (amely Kelly–Rival 1975 szerint háló).

Legyen D egy sovány fm diagram. Mi $D = \{\text{metszet-irreducibilis elemek}\}$. (*) szerint $Q := \text{Mi } D \cup \{\tilde{0}, 1\}$ egy kváziplanáris diagram ($\parallel$ elemekre a jobb/bal reláció a D -ből öröklött). Nem triviális (bár igaz és nem is meglepő), hogy létezik (ld. a, c ; $D_4 = D_5$, $Q_4 \neq Q_5$; sőt, Q_5 nem kváziplanáris). Ezt a Q -t $\alpha(D)$ jelöli; nyilván egyértelmű.



Van tehát egy leképezésünk a sovány fm diagramok halmazából
 (hasonlókat egyenlőnek tekintve) a kváziplanáris diagramok hal-
 mazába (hasonlókat ismét egyenlőnek tekintve). További példák:



Legyen Q kváziplanáris (poset) diagram. Az *alkalmas párok* halmaza $A(Q) := \{\langle x, y \rangle \in Q^2 : x \lambda^{\leq} y\}$. (Azaz $A(Q) = „\lambda^{\leq}”$.)
Mármost $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in A(Q)$ esetén definiáljuk (hogyan miért így, ld. később):

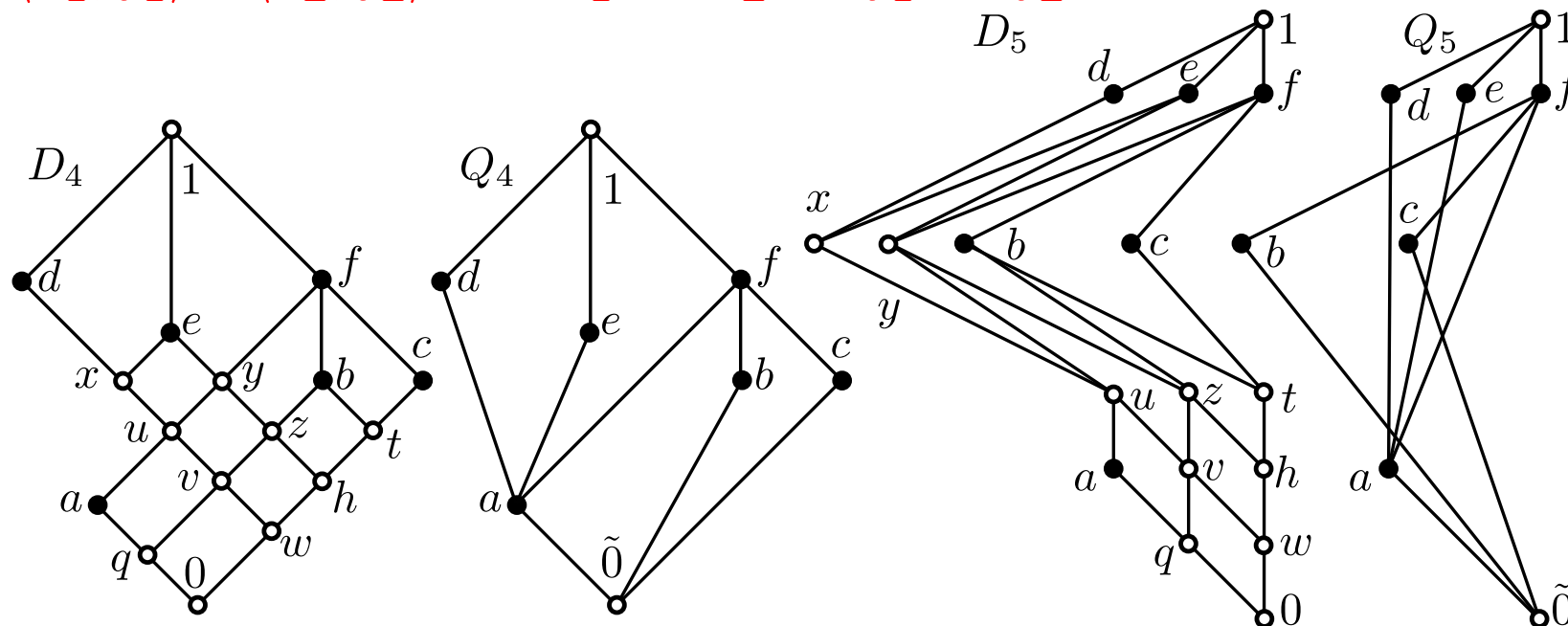
$$\langle x_1, y_1 \rangle \leq \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1 \lambda^{\leq} x_2 \text{ és } y_2 \lambda^{\geq} y_1;$$

$$\langle x_1, y_1 \rangle \lambda \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1 \lambda^{<} x_2 \text{ és } y_1 \lambda^{>} y_2.$$

Legyen $D = \langle A(Q); \leq, \lambda \rangle$; most sem evidens (de igaz), hogy létezik ilyen planáris diagram; nyilván egyértelműen meghatározott. Ezt a D -t $\beta(Q)$ jelöli.

$$\langle x_1, y_1 \rangle \leq \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1 \lambda^{\leq} x_2 \text{ és } y_2 \lambda^{\geq} y_1;$$

$$\langle x_1, y_1 \rangle \lambda \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1 \lambda^{<} x_2 \text{ és } y_1 \lambda^{>} y_2.$$



Gondoljunk arra, hogy ha a_i -t előállítjuk $x_i \wedge y_i$ alakban (ahol $x_i, y_i \in \text{Mi } D$, $x_i \lambda^= y_i$), akkor $a_1 \leq a_2$ -nek és $a_1 \lambda a_2$ -nek mi a feltétele: éppen a **fenti** képletet kapjuk, legalábbis D_4 esetében.

6. Struktúratétel (CzG arXiv 2012dec31): α egy bijektív leképezés a planáris sovány fm diagramok halmazából a kváziplanáris poset diagramok halmazára, amelynek inverz leképezése a β .

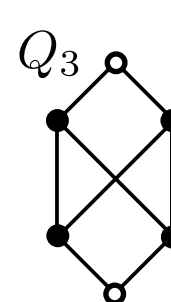
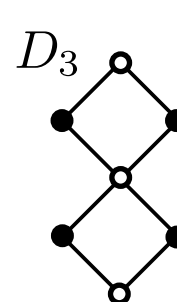
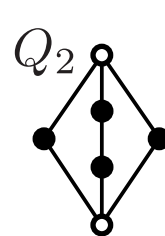
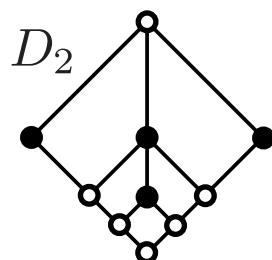
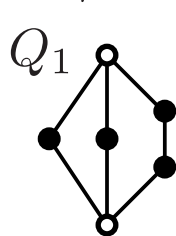
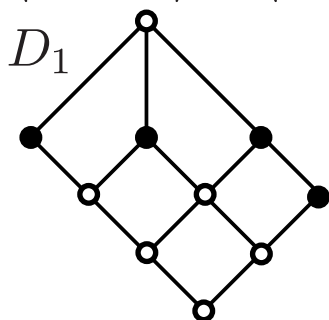
Az is meglepő, hogy β hálódigramot ad, és az fm.

Kérdés persze, hogy ez mire struktúratétel; úgy is felfoghatjuk, hogy a kváziplanáris diagramok (vagy poset-ek) struktúratétele — főleg, ha kombináljuk a sovány fm diagramok előző öt struktúratételével.

Analógia: Véges disztributív esetben elég $\langle M; D; \leq \rangle$. Most nem elég, a rendezés mellett λ is kell.

$$\langle x_1, y_1 \rangle \leq \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1 \lambda^{\leq} x_2 \text{ és } y_2 \lambda^{\geq} y_1;$$

$$\langle x_1, y_1 \rangle \lambda \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1 \lambda^{<} x_2 \text{ és } y_1 \lambda^{>} y_2$$



Mozzanatok a bizonyításból: Már Dilworth 1940 tudta, hogy ezen hálóknban (és az ún. *egyesítésdisztributívokban* is) minden elem egyértelműen írható $\wedge$ -irreducibilisak irredundáns metszeteként. Ha $x \in D$, akkor $x = x_1 \wedge x_2$ felírható úgy, hogy $x_1 \lambda^= x_2$ és $x_1, x_2 \in \text{Mi } D$. A $D =? \beta(\alpha(D))$ bizonyítása úgy történik, hogy az $x \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle$ leképezésről mutatjuk meg, hogy hasonlóság. Ehhez az alábbi három lemma is kell.

1. Lemma Legyen D planáris hálódiaagram, $\{x_0, x_1, y\} \subseteq D$ antilánc, és $x_0 \lambda y \lambda x_1$. Ekkor $x_0 \wedge x_1 \leq y$.

(Szándékosan nem tettük fel, hogy sovány vagy hogy fm, és Mi D -ről szó sem esett.)

Bizonyítás. Legyen C maximális lánc y -on keresztül. Mondjuk $x_0 \wedge x_1$ a jobb oldalán. Kelly–Rival 1975 $\Rightarrow$ van olyan $u \in C$, hogy $x_0 \wedge x_1 \leq u \leq x_0$. Ekkor u és y összehasonlítható (mert C elemei). Mivel $y \leq u$ az $y \leq x_0$ ellentmondáshoz vezetne, $u < y$, és így $x_0 \wedge x_1 \leq u < y$. Q.e.d.

A következő lemma szerint sovány esetben az állítás megfordítható.

2. Lemma Legyen D **sovány** fm diagram, $\{x_0, x_1, y\} \subseteq D$ antilánc, és $y \leq x_0 \wedge x_1$. Ekkor vagy $x_0 \lambda y \lambda x_1$, vagy $x_1 \lambda y \lambda x_0$.

Bizonyítás. $x_0 \lambda x_1$ feltehető. Ha y nincs a kettő között „vízszintesen értve”, akkor mondjuk $x_0 \lambda x_1 \lambda y$ (indirekt feltevés). Előző lemma **duálisa** $\Rightarrow \{x_0, x_1, y\} \subseteq [x_0 \wedge x_1, x_0 \vee y] =: I$.

1. Eset: $x_0 \wedge x_1 = x_1 \wedge y$. E az I maximális lánc x_1 -en át; x_0 a bal, y a jobb oldalán. Legyen x'_0, x'_1, y' atomja I -nek rendre x_0, x_1, y alatt. Ha $x'_0 = y'$, akkor Kelly–Rival-lemma $\Rightarrow x'_0 \leq x_1$ ellentmond $x_0 \wedge x_1 < x'_0$ -nek. A másik két egybeesés még kevésbé lehetséges. Ezért $x_0 \wedge x_1$ -nek három különböző fedője van, ami sovány esetben nem lehet.

Volt: $\{x_0, x_1, y\} \subseteq [x_0 \wedge x_1, x_0 \vee y] =: I$.

2. Eset: $x_0 \wedge x_1 < x_1 \wedge y$. Az I intervallumban legyen F egy maximális lánc x_0 -on át, G pedig egy maximális lánc, amelynek $\{x_1 \wedge y, y\}$ részhalmaza. E két lánc egy K régiót határoz meg, ami fedő részháló, aminek F és G a bal és jobb határlánca, és amely (a 4-cellás jellemzés miatt) sovány. Mivel (belátható) J K része K határának, $\exists f \in F$ és $g \in G$, hogy $x_1 = f \vee g$. Mivel f és x_0 (egy láncon) összehasonlítható és $x_0 \parallel x_1$, ezért $f < x_0$. Így $f \leq x_0 \wedge x_1$ miatt $f = x_0 \wedge x_1 = 0_K$. Tehát $x_1 = g$. Továbbá (egy láncon lévén) f és y összehasonlítható és $x_1 \parallel y$ miatt $g \leq y$. Tehát $x_1 = g \leq y$ ellentmondás. Q.e.d.

Egyik lemmához sem kellett a féligmodularitás; a következőhöz már az is kell. Láttuk, hogy antiláncok esetén a bal-jobb elrendezés meghatározza, hogy két elem metszete kisebb-e, mint a harmadik. Ha nem antiláncokról van szó, az egyetlen nemtriviális eset az alábbi.

3. Lemma Legyen D sovány fm diagram, $a \in \text{Mi } D$, $b, c \in D$, $a \parallel b$ és $a < c$. Ekkor $b \wedge c \not\leq a$.

Bizonyítás. Egyenlő nem lehet, mert $a \in \text{Mi } D$. Indirekt tfh $d := b \wedge c < a$. Legyen a^* az a egyetlen fedője, és e egy atom $[d, b]$ -ben. Ekkor $a^* \leq c$ miatt $d = e \wedge a^*$. Továbbá $d \neq e$ miatt $e \parallel a^*$. Nem lehet $e < a$, mert akkor $e \leq b \wedge c = d$. Tehát $e \parallel a$. fm $\Rightarrow a = a \vee d \prec a \vee e$, ami nem a^* , hiszen $e \parallel a^*$. Ezért $a \in \text{Mi } D$ -nek két fedője is van, ami ellentmondás. Q.e.d.

Köszönöm a figyelmet!

Czédli Gábor/2013febr18

70'/0'

Az egyesítésdisztributív hálókra (Dilworth 1940) legalább egy tucat ekvivalens definíció van; a hálóelméleteken túl kombinatorikai is többféle (antimatroid, ami viszont konvex geometriákkal is leírható). Mivel a sovány fm hálók speciális egyesítésdisztributív hálók, a eddig elmondott felismerési tételt (4-cellákkal, hét ekvivalens állítás) és a hat struktúra tételt figyelembe véve mintegy húszféleképpen definiálhatók a sovány fm hálók.

Ezért talán nem túlzás azt mondani, hogy a sovány fm hálók osztálya — a véges disztributív hálók osztálya mellett — az egyik legjobban megértett és tanulmányozott hálóosztály. És egyúttal a planáris féligmoduláris hálókat is elég jól ismerjük.

<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/>