

! nappali ☐	levelező ☐	!
---------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott téglalap(ok)ban kell megadnia! Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy körbe** kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több körbe** kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(1) A cukrászdában nyolcféle sütemény kapható (és mindegyikből van bőven). Hányféleképpen vásárolhatunk egyszerre öt süteményt? (Azonosakat is vehetünk. Mivel „egyszerre”, ezért a sorrend nem számít.)

! $\left(\frac{8}{5}\right)$ ☐	$13! \cdot 5!$ ☐	$8! \cdot 5!$ ☐	8^5 ☐	5^8 ☐	$\left(\frac{12}{5}\right)$ ☐	$\left(\frac{9}{5}\right)$ ☐	egyik sem ☐	!
--	--------------------------------------	-------------------------------------	-----------------------------	-----------------------------	---	--	---------------------------------	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: $\left(\frac{12}{5}\right)$

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(2) A diofantoszi egyenletekről tanultak segítségével döntsük el, hogy hány elemű az

$$\{x \in \mathbf{Z} : (\exists y \in \mathbf{Z})(5x + 9y = 4) \text{ és } 30 \leq x \leq 50\}$$

halmaz.

! 0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	5 ☐	6 ☐	7 ☐	egyik sem ☐	!
---------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Kettő, hiszen $x \in \{35, 44\}$. Partikuláris megoldás: $x_0 = -1$, $y_0 = 1$. Ezért az általános megoldás $x = -1 + 9t$, $y = 1 - 5t$.

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(3) Hányféleképpen rakhatók sorba a „BILLOG” szó betűi úgy, hogy a két L betű ne legyen egymás mellett?

!	18	○	24	○	36	○	120	○	180	○	240	○	360	○	720	○	egyik sem	○	!
---	----	---	----	---	----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----------	---	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: 240. Hiszen összes eset $\frac{6!}{2!} = 360$, rossz eset $5! = 120$.

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(4) Az alábbi kongruenciarendszert az m paraméter táblázatbeli értékei mellett vizsgáljuk. Jelölje meg az m paraméter azon értékeit, amelyek mellett a kongruenciarendszernek van megoldása:

$$x \equiv 2 \pmod{24}$$

$$x \equiv 8 \pmod{m}$$

?	2	○	12	○	15	○	18	○	48	○	nincs ilyen m	○	?
---	---	---	----	---	----	---	----	---	----	---	-----------------	---	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: 2, 15, 18.

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(5) Legyen $k, \ell \in \mathbf{Z}$, és legyen p olyan prímszám, amelyik nem osztja k -t. Igazak-e ekkor **szükségképpen** az alábbi kijelentések?

A $kx \equiv 1 \pmod{p}$ kongruenciának nincs megoldása az x ismeretlenre.

!	igen	○	nem	⊕	!
---	------	---	-----	---	---

$k^p \equiv k \pmod{p}$.

!	igen	⊕	nem	○	!
---	------	---	-----	---	---

$k^p \equiv 1 \pmod{p}$.

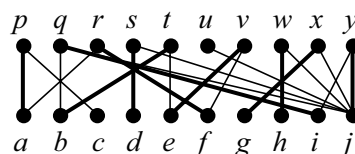
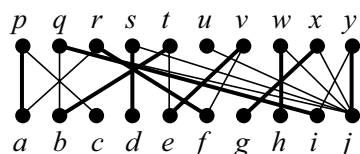
!	igen	○	nem	⊕	!
---	------	---	-----	---	---

ha $k \equiv 1 \pmod{p}$ és $\ell \equiv 1 \pmod{p}$ akkor $k\ell \equiv 1 \pmod{p}$.

!	igen	⊕	nem	○	!
---	------	---	-----	---	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(6) Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) Az $\{ap, bt, ds, ev, fr, gx, hw, iq, jy\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	hw	○	iy	○	bq	○	jy	○	ev	○	egyik sem	○	?
---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	-----------	---	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: hw , iy , bq . Az egyetlen alternáló út: uj , jy , yi , iq , qb , bt , te , ev , vf , fr , ra , ap , pc . (Érdekes fentről lefelé haladni, mert úgy nincs elágazási lehetőség.)

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(7) Melyek a **szükségképpen** igazak az alábbi kijelentések közül?

Minden csoport egyúttal kancellatív (más szóval egyszerűsítéses) félcsoport.

!	igen	⊕	nem	○	!
---	------	---	-----	---	---

Minden egyelemű monoid csoport.

!	igen	⊕	nem	○	!
---	------	---	-----	---	---

Ha G négyelemű csoport és S részcsoporthja G -nek, akkor $|S| \neq 2$.

!	igen ☐	nem ☒	!
---	----------------------------	--------------------------------------	---

Két test direkt szorzata szintén test.

!	igen ☐	nem ☒	!
---	----------------------------	--------------------------------------	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(8) Legyen $S = \{9k : k \in \mathbf{Z}\}$. Ez részcsoporthja a $(\mathbf{Z}; +)$ csoportnak. A téglalapban felsorolt elemek közül jelölje be azokat, amelyek benne vannak a $2 \in \mathbf{Z}$ elem S részcsoporth szerinti mellékosztályában.

?	-12 ☐	-7 ☐	2 ☐	3 ☐	16 ☐	20 ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	--------------------------	-------------------------	-------------------------	--------------------------	--------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: -7, 2, 20.

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(9) A művelet táblázattal megadtunk három félcsoporthot. Jelölje be a téglalapban azokat, amelyek csoportok.

A					B					C				
*	0	1	2		*	a	b	c		*	p	q	r	
0	0	1	2		a	a	b	c		p	p	p	p	
1	1	0	2		b	b	c	a		q	p	q	r	
2	2	2	2		c	c	a	b		r	p	r	q	

?	A ☐	B ☐	C ☐	egyik sem ☐	?
---	---------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: B . Vegyük észre, hogy A -ban és C -ben van zéruselem, tehát nem csoportok.

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

(10) Tekintsük az $(A; *)$, $(B; *)$ és $(C; *)$ grupoidokat, amelyeket művelet táblázattal az előző feladatban adtunk meg. Mint általában, $\Theta_{\mathcal{C}}$ jelöli a $\mathcal{C}$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát, $[u]$ pedig az $\{u\}$ részhalmaz által generált részgrupoidot. (Hogy melyik grupoidban az $(A; *)$, $(B; *)$ és $(C; *)$ közül, az a jelölésekből értelemszerű lesz.) Melyek igazak az alábbi állítások közül:

?	$\Theta_{\{\{1\}, \{0, 2\}\}}$ kongruencia ☐	$q \in [p, r]$ ☐	$c \in [a]$ ☐	$a \in [c]$ ☐	egyik sem ☐	?
---	--	--------------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-04.C1-B _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, nem, igen. Az első kérdés esetén: $(1, 1), (0, 2) \in \Theta_{\mathcal{C}}$ de $(1 * 0, 1 * 2) \notin \Theta_{\mathcal{C}}$.

dmnv2-04.C1-B _____ CzG