

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott téglalap(ok)ban kell megadnia! Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot! Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet felkiáltójeles kis téglalap, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A kérdőjeles kis téglalapok esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az aláhúzott kis téglalapba a **végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)**

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(1) A cukrászdában hétféle sütemény kapható (és mindegyikből van bőven). Hányféleképpen vásárolhatunk egyszerre négy süteményt? (Azonosakat is vehetünk. Mivel „egyszerre”, ezért a sorrend nem számít.)

!	7^4 ☐	4^7 ☐	$\binom{7}{4}$ ☐	$\binom{11}{4}$ ☐	$\binom{10}{4}$ ☐	$7! \cdot 4!$ ☐	$7! \cdot 11!$ ☐	egyik sem ☐	!
---	-----------------------------	-----------------------------	--------------------------------------	---------------------------------------	---------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $\binom{10}{4}$

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(2) A diofantoszi egyenletekről tanultak segítségével döntsük el, hogy hány elemű az

$$\{y \in \mathbf{Z} : (\exists x \in \mathbf{Z})(9x + 5y = 4) \text{ és } 31 \leq y \leq 41\}$$

halmaz.

!	0 ☐	1 ☐	2 ☐	3 ☐	4 ☐	5 ☐	6 ☐	7 ☐	egyik sem ☐	!
---	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	-------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Egyelemű: $\{35\}$. Partikuláris megoldás: $x_0 = 1, y_0 = -1$. Ezért az általános megoldás $x = 1 + 5t, y = -1 - 9t$. Tehát az y -ok a $9k - 1$ alakú számok.

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(3) Hányféleképpen rakhatók sorba az „ILLIK” szó betűi, ha a két magánhangzó (azaz a két „I” betű) nem kerülhet egymás mellé?

!	10	18	21	24	30	36	48	60	egyik sem	!
---	----	----	----	----	----	----	----	----	-----------	---

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: $18 = 30 - 12$. Összes eset: $\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$. Rossz eset (amikor a két „I” egyetlen kettősbetűnek számít): $\frac{4!}{2!} = 12$.

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(4) A téglalapban felsorolt m számok (azaz paraméter értékek) közül jelölje meg azokat, amelyek mellett az alábbi kongruenciarendszernek létezik megoldása:

$$x \equiv 2 \pmod{20}$$

$$x \equiv 7 \pmod{m}$$

?	3	8	20	25	30	a felsoroltak egyike sem	?
---	---	---	----	----	----	--------------------------	---

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: 3, 25.

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(5) Legyen $a \in \mathbf{Z}$ és legyen p olyan prímszám, amelyik nem osztja a -t. Igazak-e ekkor **szükségképpen** az alábbi kijelentések?

$$a^p \equiv 1 \pmod{p}.$$

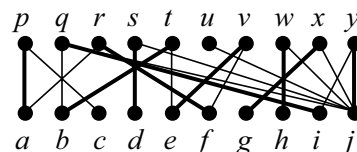
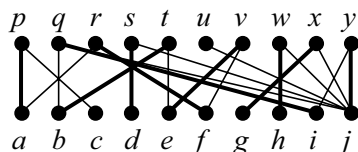
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Az $ax \equiv 1 \pmod{p}$ kongruencia megoldható az $x \in \mathbf{Z}$ ismeretlenre.

!	igen	nem	$\oplus$	!
!	igen	$\oplus$	nem	!
!	igen	$\oplus$	nem	!

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(6) Magyar módszerrel kerestünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) Az $\{ap, bt, ds, ev, fr, gx, hw, iq, jy\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	bq	te	jy	ev	hw	egyik sem	?
---	----	----	----	----	----	-----------	---

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: bq, te, hw . Az egyetlen alternáló út: $uj, jy, yi, iq, qb, bt, te, ev, vf, fr, ra, ap, pc$. (Érdekes fentről lefelé haladni, mert úgy nincs elágazási lehetőség.)

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(7) Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül?

Csoportban minden elemnek legalább egy inverze van.

Ha egy csoportban a művelet asszociatív, akkor Abel-csoportnak nevezzük.

Ha G húszelemű csoport, akkor nincs hételemű részcsoportja.

!	igen	$\oplus$	nem	!
!	igen	!	nem	$\oplus$
!	igen	$\oplus$	nem	!

Két gyűrű direkt szorzata szintén gyűrű.

!	igen $\oplus$	nem $\circ$	!
---	---------------	-------------	---

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(8) Legyen $S = \{7k : k \in \mathbf{Z}\}$. Ez részcsoportha a $(\mathbf{Z}; +)$ csoportnak. A téglalapban felsorolt elemek közül jelölje be azokat, amelyek benne vannak a $4 \in \mathbf{Z}$ elem S részcsoporthoz szerinti mellékosztályában.

?	-4 $\circ$	-3 $\circ$	2 $\circ$	3 $\circ$	10 $\circ$	11 $\circ$	egyik sem $\circ$	?
---	------------	------------	-----------	-----------	------------	------------	-------------------	---

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: -3, 11.

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(9) Művelet táblázattal három grupoidot adunk meg. Keresse meg közülük azt a grupoidot, amelyik a másik kettő közül semelyikkel sem izomorf. A talált grupoidot (vagy grupoidokat, ha több ilyen is van) jelölje be a kis téglalapban.

A					B					C				
*	0	1	2		*	a	b	c		*	p	q	r	
0	0	1	2		a	a	b	c		p	p	p	p	
1	1	0	2		b	b	c	a		q	p	q	r	
2	2	2	2		c	c	a	b		r	p	r	q	

?	A $\circ$	B $\circ$	C $\circ$	nincs közöttük olyan $\circ$	?
---	-------------	-------------	-------------	------------------------------	---

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: B . Mivel B -nek nincs, a másik kettőnek van zéruseleme, B eleget tesz a kíváncsúnak. Másfelől viszont A és C izomorf, hiszen az $A \rightarrow C$, $0 \mapsto q$ (egységelem!), $2 \mapsto p$ (zéruselem!), $1 \mapsto r$ (olyan elem, amely önmagának inverze) leképezés izomorfizmus.

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

(10) Tekintsük az $(A; *)$, $(B; *)$ és $(C; *)$ grupoidokat, amelyeket művelet táblázattal az előző feladatban adtunk meg. Mint általában, Θ_C jelöli a C osztályozáshoz tartozó ekvivalenciát, $[u]$ pedig az $\{u\}$ részhalmaz által generált részgrupoidot. (Hogy melyik grupoidban az $(A; *)$, $(B; *)$ és $(C; *)$ közül, az a jelölésekből értelemszerű lesz.) Melyek igazak az alábbi állítások közül:

?	$\Theta_{\{\{2\}, \{0, 1\}\}}$ kongruencia $\circ$	$p \in [q, r]$ $\circ$	$c \in [b]$ $\circ$	$b \in [c]$ $\circ$	egyik sem $\circ$	?
---	--	------------------------	---------------------	---------------------	-------------------	---

dmnv2-04.C1-A _____ CzG

MEGOLDÁS: Igen, nem, igen, igen.

dmnv2-04.C1-A _____ CzG