

!	nappali ☐	levelező ☐	!	Név=
---	-------------------------------	--------------------------------	---	------

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy körbe** kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több körbe** kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(1) Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KETTES” szó betűit úgy, hogy ne „T” betűvel kezdődő szót kapjunk?

!	$6^4 - 5^4$ ☐	$\left(\frac{6}{3}\right)$ ☐	60 ☐	120 ☐	150 ☐	210 ☐	$6! \cdot 4!$ ☐	$6! - 4!$ ☐	egyik sem ☐	!
---	-----------------------------------	--	--------------------------	---------------------------	---------------------------	---------------------------	-------------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: $\frac{6!}{2! \cdot 2!} - \frac{5!}{2!} = 180 - 60 = 120$.

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(2) Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$5x \equiv 4 \pmod{23}$$

$$23 \leq x < 46.$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x -et!

!	[23, 27) ☐	[27, 31) ☐	[31, 35) ☐	[35, 39) ☐	[39, 43) ☐	[43, 46) ☐	egyik sem ☐	!
---	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

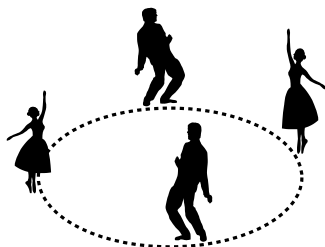
számolás, indoklás.

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: $x = 33 \in [31, 35)$, hiszen a kongr.rendszer általános megoldása $x \equiv 10 \pmod{23}$.

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(3) A tánccsoport négy legényből és négy leányból áll. Körtáncot szervezünk két legényből és két leányból. A körben a legények és a leányok felváltva helyezkednek el (és a szaggatott körvonal mentén haladnak körbe). Két ilyen körtáncot akkor tekintünk azonosnak, ha ugyanazok a táncosok, és minden táncos jobb, illetve balszomszédja is ugyanaz. (Az elforgatással egymásba átvihető eseteket nem különböztetjük meg.) A mondott feltételeket betartva hányféle körtánc szervezhető?



!	12	○	24	○	72	○	$\binom{8}{4}$	○	$\frac{8!}{2! \cdot 2!}$	○	egyik sem	○	!
---	----	---	----	---	----	---	----------------	---	--------------------------	---	-----------	---	---

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: 72. Ugyanis két legényt $\binom{4}{2} = 6$ -, két leányt $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen választhatunk ki. Tehát a táncosokat $6 \cdot 6 = 36$ -féleképpen jelölhetjük ki. Az adott négy táncos (mondjuk Ottó, Ödön, Irén és Irma) kétféleképpen is körbe állhat: Ottó Ödönnel szemben (eddig nics szabadsági fokunk), de ezt követően Irén már Ottó baloldalán és jobboldalán is lehet (Irma pedig a másik oldalon). Tehát az eredmény $2 \cdot 36 = 72$.

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(4) Kilenc gyümölcs, mégpedig három teljesen egyforma alma, három teljesen egyforma körte és három teljesen egyforma narancs van a fridzsiderben. A holnap kezdődő háromnapos fogyókúránk alkalmából csak ezeket ehetjük, mégpedig három napon át reggelire, ebédre és vacsorára pontosan egy-egy gyümölcsöt. Hányféle „menetrendet” készíthetünk a fogyókúrára (azaz hányféle sorrendben ehetjük meg a gyümölcsöket)?

!	$\frac{2^9}{2^3}$	○	$\frac{3^9}{3^3}$	○	$9 \cdot \binom{6}{3}$	○	$\frac{9!}{(3!)^3}$	○	$(3!)^3$	○	36	○	60	○	egyik sem	○	!
---	-------------------	---	-------------------	---	------------------------	---	---------------------	---	----------	---	----	---	----	---	-----------	---	---

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: Az ismétléses permutációra vonatkozó képlet szerint $\frac{9!}{(3!)^3}$.

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(5) Mi az utolsó két számjegye (a tízes számrendszerben) a

$$7^{160\,002}$$

számnak? (A feladat úgy értendő, hogy pl. a 2006 utolsó két számjegye 06, az 1222 utolsó két számjegye 22, az 1848 utolsó két számjegye pedig 48.)

!	00	○	01	○	02	○	03	○	07	○	48	○	49	○	63	○	egyik sem	○	!
---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	-----------	---	---

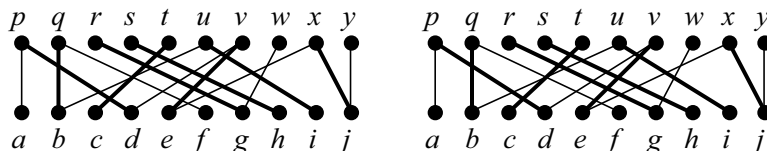
dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: 49. Ugyanis a 7 relatív prím a 100-hoz és $\varphi(100) = \varphi(4)\varphi(25) = 2 \cdot 20 = 40$. Ezért

$$7^{160\,002} = (7^{40})^{4\,000} \cdot 7^2 \equiv 1^{4\,000} \cdot 49 = 49 \pmod{100}.$$

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(6) Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) A $\{bq, ct, dp, ev, gr, hs, iu, jx\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	jy	$○$	jx	$○$	ev	$○$	dp	$○$	ex	$○$	egyik sem	$○$	?
---	------	-----	------	-----	------	-----	------	-----	------	-----	-----------	-----	---

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: jy igen, jx nem, ev nem, dp nem, ex igen. Az egyetlen alternáló út: ap , pd , dv , ve , ex , xj , jy .

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(7) Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül, ha $u, v, a, m \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes számokat jelöl, $(A; f)$ pedig olyan grupoid, amelyben az f műveleti jelet fordított lengyel jelöléssel írjuk?

Ha ln.k.o. $(a, m) = 1$ és $au \equiv av \pmod{m}$, akkor $u \equiv v \pmod{m}$.

!	igen	$\oplus$	nem	$○$	!
---	------	----------	-----	-----	---

Ha bármely $x, y, z \in A$ -ra $xyfzf = xyzff$, akkor $(A; f)$ félcsoporth.

!	igen	$\oplus$	nem	$○$	!
---	------	----------	-----	-----	---

Minden ciklikus csoport Abel-csoport.

!	igen	$\oplus$	nem	$○$	!
---	------	----------	-----	-----	---

Félcsoporth részfélcsoporthja sose lehet csoport.

!	igen	$○$	nem	$\oplus$	!
---	------	-----	-----	----------	---

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(8) A síkvektorok $(\mathbb{R}^2; +)$ additív csoportjában tekintsük az $S = \{(-x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ normálosztót és a $b = (3, 4)$ elemet. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a b elem S szerinti baloldali mellékosztályában?

?	$(0, 0)$	$○$	$(0, 1)$	$○$	$(0, 7)$	$○$	$(3, 4)$	$○$	$(4, 7)$	$○$	egyik sem	$○$	?
---	----------	-----	----------	-----	----------	-----	----------	-----	----------	-----	-----------	-----	---

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: $(0, 7)$, $(3, 4)$.

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(9) Tekintsük az alábbi műveletábrázattal megadott $A = (A; *)$ grupoidot. A téglalapban felsorolt állítások ezen grupoidra, illetve ezen $*$ műveletre értendők. Ikszeljük be a felsoroltak közül az igaz állításokat. (Itt $[X]$, illetve $[y]$ — a szokott módon — az X , illetve $\{y\}$ részhalmaz által generált részalgebrát jelöli.)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	a	a
c	c	a	b	a
d	d	d	d	d

?	van egységelem	$○$	a -nak van inverze	$○$	$d \in [b]$	$○$	$d \in [\{a, c\}]$	$○$	egyik sem	$○$	?
---	----------------	-----	----------------------	-----	-------------	-----	--------------------	-----	-----------	-----	---

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: **Igen, igen, nem, nem.** a egységelem, és önmaga inverze. Mivel $\{a, b, c\}$ zárt a szorzásra (azaz részgrupoid), a „ $d \in$ ” kérdésekre a válasz nemleges.

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

(10) Tekintsük az előző feladatban műveletábrázattal megadott $A = (A; *)$ grupoidot. Az alábbi téglalapban megadott osztályozások közül melyek azok, amelyekhez a grupoid kongruenciarelációi tartoznak?

?	$\{\{a, d\}, \{b, c\}\}$	$○$	$\{\{a, b, c, d\}\}$	$○$	$\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$	$○$	$\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$	$○$	egyik sem	$○$	?
---	--------------------------	-----	----------------------	-----	--------------------------	-----	--------------------------	-----	-----------	-----	---

dmnv2-02.C1-D _____ CzG

MEGOLDÁS: Nem, igen, nem, nem.

dmnv2-02.C1-D _____ CzG