

!	nappali ☐	levelező ☐	!
---	-------------------------------	--------------------------------	---

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

Tisztelt Vizsgáló! Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv2-02.C1-C _____ CzG

(1.) Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KIFLI” szó betűit úgy, hogy ne „K” betűvel kezdődő szót kapjunk?

!	$5^4 - 4^4$ ☐	$\left(\frac{5}{3}\right)$ ☐	18 ☐	24 ☐	36 ☐	48 ☐	$5! \cdot 4!$ ☐	$5! - 4!$ ☐	egyik sem ☐	!
---	-----------------------------------	--	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	-------------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-02.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: $\frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = 60 - 12 = 48$.

dmnv2-02.C1-C _____ CzG

(2) Az x ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$3x \equiv 4 \pmod{20}$$

$$50 \leq x < 70.$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza x -et!

!	$[51, 54)$ ☐	$[54, 57)$ ☐	$[57, 60)$ ☐	$[60, 63)$ ☐	$[63, 66)$ ☐	$[66, 70)$ ☐	egyik sem ☐	!
---	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	---

Számolás, indoklás:

számolás, indoklás.

dmnv2-02.C1-C _____ CzG

MEGOLDÁS: $x = 68 \in [66, 70)$, hiszen a kongr.rendszer általános megoldása $x \equiv 8 \pmod{20}$.

dmnv2-02.C1-C _____ CzG

(3) Egy öttagú társaság a következő haditervet dolgozza ki arra, hogy mind az öten feljussanak a tetőteraszra: hárman a (háromszemélyes) lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után a villámhárítón mászva jutnak fel. Hány különböző sorrendben érkezhettek meg a tetőteraszra, ha feltesszük, hogy a liften utazó három személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű érkezés?

!	$\binom{7}{2}$	$\frac{5!}{3!}$	12	24	36	$\frac{5!}{3! \cdot 2!}$	60	120	egyik sem	!
---	----------------	-----------------	----	----	----	--------------------------	----	-----	-----------	---

dmnv2-02.C1-C

CzG

MEGOLDÁS: 60. A „mászókat” $\binom{5}{2} = 10$ -féleképpen lehet kiválasztani. Ezt követően három „objektumot” kell sorbaállítani: az egyik mászót, a másik mászót, és harmadikként a liftbeliek halmazát — ez $3! = 6$ -féleképpen lehetséges. Az eredmény a szorzási szabály szerint $10 \cdot 6 = 60$.

dmnv2-02.C1-C

CzG

(4) Május 35-én (tegyük fel, hogy létezik!) nyolcan vizsgáznak Diszkrét matematikából. A feladatlap olyanra sikerült, hogy csak jelesre vagy elégtelenre sikerülhet. Hányféleképpen hirdetheték aznap eredményt az ETR-ben? (A sorrend nem számít, csak az, hogy ki kapott elégtelent és ki kapott jelest.)

!	8^2	$8!$	$\binom{8}{2}$	$\frac{8!}{5! \cdot 1!}$	2^8	36	60	egyik sem	!
---	-------	------	----------------	--------------------------	-------	----	----	-----------	---

dmnv2-02.C1-C

CzG

MEGOLDÁS: $2^8 = 256$.

dmnv2-02.C1-C

CzG

(5) Mit kapunk maradékul, ha a $240\,029^{8001}$ számot maradékosan elosztjuk 24-gyel?

!	0	1	2	5	10	20	22	23	egyik sem	!
---	---	---	---	---	----	----	----	----	-----------	---

dmnv2-02.C1-C

CzG

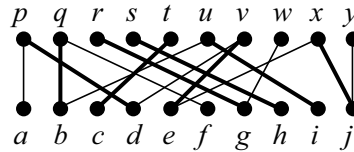
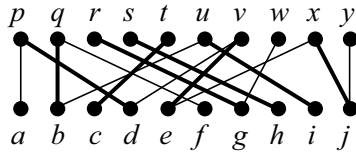
MEGOLDÁS: 5. Ugyanis $a = 240\,029 \equiv 5 \pmod{24}$ relatív prím a 24-hez és $\varphi(24) = \varphi(8)\varphi(3) = 4 \cdot 2 = 8$. Ezért

$$a^{8001} \equiv 5^{8001} = (5^8)^{1000} \cdot 5 \equiv 1^{1000} \cdot 5 = 5 \pmod{24}.$$

dmnv2-02.C1-C

CzG

(6) Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) A $\{bq, ct, dp, ev, gr, hs, iu, jx\}$ párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



?	dp	bq	iu	ex	jx	egyik sem	?
---	------	------	------	------	------	-----------	---

dmnv2-02.C1-C

CzG

MEGOLDÁS: dp nem, bq igen, iu igen, ex igen, jx nem. Az egyetlen alternáló út: ap , pd , dv , ve , ex , xj , jy .

dmnv2-02.C1-C

CzG

(7) Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül?

$\varphi(1000) = 400$, ahol φ az Euler-féle φ függvény.

Minden véges kancellatív félcsoporthoz csoport.

Minden véges csoport kancellatív félcsoporthoz csoport.

!	igen	$\oplus$	nem	$\circ$	!
---	------	----------	-----	---------	---

!	igen	$\oplus$	nem	$\circ$	!
---	------	----------	-----	---------	---

!	igen	$\oplus$	nem	$\circ$	!
---	------	----------	-----	---------	---

Csoport részfélcsoportja szükségképpen csoport.

!	igen ☐	nem ☐	!
---	----------------------------	---------------------------	---

dmnv2-02.C1-C

CzG

(8) A síkvektorok $(\mathbf{R}^2; +)$ additív csoportjában tekintsük az $S = \{(0, x) : x \in \mathbf{R}\}$ normálosztót és a $b = (3, 4)$ elemet. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a b elem S szerinti baloldali mellékosztályában?

?	$(0, 0)$ ☐	$(3, 3)$ ☐	$(4, 4)$ ☐	$(3, 4)$ ☐	$(4, 3)$ ☐	egyik sem ☐	?
---	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	---------------------------------	---

dmnv2-02.C1-C

CzG

MEGOLDÁS: $(3, 3), (3, 4)$.

dmnv2-02.C1-C

CzG

(9) Tekintsük az alábbi műveletábrázattal megadott $A = (A; *)$ grupoidot. A téglalapban felsorolt állítások ezen grupoidra, illetve ezen $*$ műveletre értendők. Ikszeljük be a felsoroltak közül az igaz állításokat. (Itt $[X]$, illetve $[y]$ — a szokott módon — az X , illetve $\{y\}$ részhalmaz által generált részalgebrát jelöli.)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	a	a
c	c	a	b	a
d	d	d	d	d

?	$a \in [d]$ ☐	kommutatív ☐	van zéruseleme ☐	$a \in [\{b, d\}]$ ☐	egyik sem ☐	?
---	-----------------------------------	----------------------------------	--------------------------------------	--	---------------------------------	---

dmnv2-02.C1-C

CzG

MEGOLDÁS: Nem, nem, nem, igen.

dmnv2-02.C1-C

CzG

(10) Tekintsük az előző feladatban műveletábrázattal megadott $A = (A; *)$ grupoidot. Az alábbi téglalapban megadott osztályozások közül melyek azok, amelyekhez a grupoid kongruenciarelációi tartoznak?

?	$\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ ☐	$\{\{a\}, \{b, c, d\}\}$ ☐	$\{\{a, b, c, d\}\}$ ☐	$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$ ☐	egyik sem ☐	?
---	--	--	--	--	---------------------------------	---

dmnv2-02.C1-C

CzG

MEGOLDÁS: Nem, nem, igen, igen.

dmnv2-02.C1-C

CzG