

|   |                               |                                |   |
|---|-------------------------------|--------------------------------|---|
| ! | nappali <input type="radio"/> | levelező <input type="radio"/> | ! |
|---|-------------------------------|--------------------------------|---|

Név=

születési hónap, nap=

EHA kód=

**Tisztelt Vizsgáló!** Minden egyes feladatnál a választ, illetve a végeredményt a feladathoz tartozó, előre nyomtatott **téglalap(ok)ban kell megadnia!** Ellenkező esetben **ki se javítjuk a feladatot!** Négyféle téglalap van: háromféle kicsi (azaz 1 sor magasságú) és egy nagy téglalap. A kis téglalap lehet **felkiáltójeles kis téglalap**, ez esetben **pontosan egy** körbe kell  $\times$ -et tennie. A **kérdőjeles kis téglalapok** esetén **egy vagy több** körbe kell értelemszerűen  $\times$ -et tennie. Az **aláhúzott kis téglalapba a végeredményt** (többnyire egy számot vagy formulát) kell jól olvashatóan beírnia. (Pl. ld. EHA kód fent.) **A kis téglalapokba tollal kell írni, javítás, áthúzás, lefestés tilos!** Tehát ne kapkodja el a kis téglalapok kitöltését; mérje fel előre, hány perc jut egy feladatra! (A vizsga **90 perces!**)

Ha egy feladatnál indoklást, számolást (is) várunk, akkor erre a célra egy több sor magasságú **nagy téglalapot is** megadunk. Abban — ellenkező kitétel híján — lehet javítani; ha netalán kevés a hely, akkor jól látható módon jelezze, hogy hol vannak a folytatósorok. De ezekre a feladatokra is érvényes: **csak akkor értékeljük**, ha a kis téglalap ki van töltve és összhangban van a nagy téglalapban szereplő, egyértelműen kibetűzhető munkával.

Segédszámolásokat **a téglalapokon kívül, csakis a kiosztott lapon** bárhová (pl. hátoldalra, sorok közé, stb.) lehet írni; ezeket a javításkor nem vesszük figyelembe. Részpontot nem adunk; egy-egy feladat hibátlan megoldása esetén **hat pont** jár, egyébként pedig nulla. **Segédeszköz** (kalkulátor, függvénytáblázat, saját papír, stb.) **nem** használható! Az összetűzött feladatsor nem szedhető szét!

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(1) Hányféleképpen lehet sorba rakni a „KIFLI” szó betűit úgy, hogy ne „I” betűvel kezdődő szót kapjunk?

|   |                                   |                                                  |                          |                          |                          |                          |                                     |                                 |                                 |   |
|---|-----------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---|
| ! | $5^4 - 4^4$ <input type="radio"/> | $\left(\frac{5}{3}\right)$ <input type="radio"/> | 18 <input type="radio"/> | 24 <input type="radio"/> | 36 <input type="radio"/> | 48 <input type="radio"/> | $5! \cdot 4!$ <input type="radio"/> | $5! - 4!$ <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | ! |
|---|-----------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS:  $\frac{5!}{2!} - 4! = 60 - 24 = 36$ .

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(2) Az  $x$  ismeretlen egész számról az alábbiakat tudjuk:

$$x \equiv 7 \pmod{8}$$

$$x \equiv 6 \pmod{7}$$

$$20 < x < 100$$

Ikszelje be a téglalapban felsoroltak közül azt az intervallumot, amelyik tartalmazza  $x$ -et!

|   |                                |                                |                                |                                |                                |                                 |                                 |   |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---|
| ! | [21, 40) <input type="radio"/> | [40, 60) <input type="radio"/> | [60, 80) <input type="radio"/> | [80, 87) <input type="radio"/> | [87, 94) <input type="radio"/> | [94, 100) <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | ! |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---|

Számolás, indoklás:

|                     |
|---------------------|
| számolás, indoklás. |
|---------------------|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS:  $x = 55 \in [40, 60)$ , hiszen a kongr.rendszer általános megoldása  $x \equiv -1 \pmod{56}$ .

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(3) Egy négytagú társaság a következő haditervet dolgozza ki arra, hogy mind a négyen feljus-  
sanak a tetőteraszra: ketten a (kétszemélyes) lifttel mennek egyszerre, ketten pedig egymás után  
a villámhárítón mászva jutnak fel. Hány különböző sorrendben érkehetnek meg a tetőteraszra,  
ha feltesszük, hogy a liften utazó két személy egyszerre érkezik, de ezt leszámítva nincs egyidejű  
érkezés?

|   |                |                 |    |    |    |                          |    |     |           |   |
|---|----------------|-----------------|----|----|----|--------------------------|----|-----|-----------|---|
| ! | $\binom{6}{2}$ | $\frac{5!}{3!}$ | 12 | 24 | 36 | $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$ | 60 | 120 | egyik sem | ! |
|---|----------------|-----------------|----|----|----|--------------------------|----|-----|-----------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS: 36. A „mászókat”  $\binom{4}{2} = 6$ -féleképpen lehet kiválasztani. Ezt követően három „objek-  
tumot” kell sorbaállítani: az egyik mászót, a másik mászót, és harmadikként a liftbeliek halmazát  
— ez  $3! = 6$ -féleképpen lehetséges. Az eredmény a szorzási szabály szerint  $6 \cdot 6 = 36$ .

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(4) A kisállatkereskedőnél háromfajta díszhalat árulnak — mindegyikből van bőven.  
Hányféleképpen vásárolhatunk egyidejűleg négy halat az akváriumunkba? (Az „egyidejűség” mi-  
att a sorrend nem számít, és nyilván egyformákat is vehetünk.)

|   |       |       |      |                |                |                |                |           |   |
|---|-------|-------|------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|---|
| ! | $3^4$ | $4^3$ | $4!$ | $\binom{4}{3}$ | $\binom{7}{3}$ | $\binom{6}{4}$ | $\binom{6}{3}$ | egyik sem | ! |
|---|-------|-------|------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS:  $\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}$ .

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(5) A mobiltelefon memóriájában egy  $2^{16}$  bájt méretű terület szolgál a ki- és bemenő hívások  
naplózására. Minden egyes üzenet naplózásához pontosan 17 bájt szükséges. Tegyük fel hogy a  
memóriát csakis erre a célra használjuk és sose töröljük. Amikor sok-sok hívás után további naplózás  
nem lehetséges, hány kihasználatlan bájt marad a memóriában? (Másként fogalmazva: mi lesz a  
maradék, ha a  $2^{16}$  számot elosztjuk tizenhéttel?)

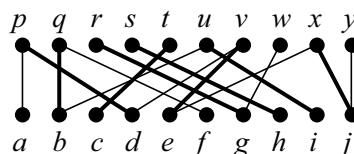
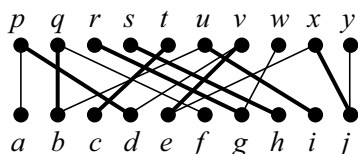
|   |   |   |   |   |   |    |    |    |           |   |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-----------|---|
| ! | 0 | 1 | 2 | 8 | 9 | 10 | 15 | 16 | egyik sem | ! |
|---|---|---|---|---|---|----|----|----|-----------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS: 1. Az a kérdés, hogy a felsoroltak közül mivel kongruens a  $2^{17-1}$  modulo 17. A kis  
Fermat-tétel szerint 1-gyel.

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(6) Magyar módszerrel keresünk maximális elemszámú párosítást az alábbi gráfban. (A gráfot  
két példányban is lerajzoltuk, hogy legyen min dolgozni, számolni.) A  $\{bq, ct, dp, ev, gr, hs, iu, jx\}$   
párosításig (azaz a vastag élek halmazáig) jutottunk. A téglalapban felsorolt élek közül melyek  
lesznek benne szükségképpen a magyar módszer következő lépése által szolgáltatott párosításban?



|   |      |      |      |      |      |           |   |
|---|------|------|------|------|------|-----------|---|
| ? | $bq$ | $iu$ | $dp$ | $ex$ | $jx$ | egyik sem | ? |
|---|------|------|------|------|------|-----------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS:  $bq$  igen,  $iu$  igen,  $dp$  nem,  $ex$  igen,  $jx$  nem. Az egyetlen alternáló út:  $ap$ ,  $pd$ ,  $dv$ ,  $ve$ ,  
 $ex$ ,  $xj$ ,  $jy$ .

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(7) Melyek a szükségképpen igazak az alábbi kijelentések közül? (Útmutató: a  $\varphi$  értékeit érdemes  
kiszámolni.)

|   |      |     |          |   |
|---|------|-----|----------|---|
| ! | igen | nem | $\oplus$ | ! |
|---|------|-----|----------|---|

$\varphi(10^2) = 2 \cdot \varphi(10)$ , ahol  $\varphi$  az Euler-féle  $\varphi$  függvény.

$\varphi(10^2) = \varphi(10)^2$ , ahol  $\varphi$  az Euler-féle  $\varphi$  függvény.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

Gyűrű additív egységeleme egyúttal multiplikatív zéruselem.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

Ha egy algebra test, akkor gyűrű is.

|   |                            |                           |   |
|---|----------------------------|---------------------------|---|
| ! | igen <input type="radio"/> | nem <input type="radio"/> | ! |
|---|----------------------------|---------------------------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(8) A síkvektorok  $(\mathbf{R}^2; +)$  additív csoportjában tekintsük az  $S = \{(x, x) : x \in \mathbf{R}\}$  normálosztót és a  $b = (3, 4)$  elemet. A téglalapban felsoroltak közül melyek vannak benne a  $b$  elem  $S$  szerinti baloldali mellékosztályában?

|   |                                |                                |                                |                                |                                |                                 |   |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---|
| ? | $(0, 0)$ <input type="radio"/> | $(0, 1)$ <input type="radio"/> | $(4, 4)$ <input type="radio"/> | $(3, 4)$ <input type="radio"/> | $(4, 5)$ <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | ? |
|---|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS:  $(0, 1), (3, 4), (4, 5)$ .

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(9) Tekintsük az alábbi műveletábrázattal megadott  $A = (A; *)$  grupoidot. A téglalapban felsorolt állítások ezen grupoidra, illetve ezen  $*$  műveletre értendők. Ikszeljük be a felsoroltak közül az igaz állításokat. (Itt  $[X]$ , illetve  $[y]$  — a szokott módon — az  $X$ , illetve  $\{y\}$  részhalmaz által generált részalgebrát jelöli.)

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | a | a |
| c | c | a | b | a |
| d | d | d | d | d |

|   |                                     |                                   |                                   |                                          |                                 |   |
|---|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------|---|
| ? | van zéruselem <input type="radio"/> | kancellatív <input type="radio"/> | $c \in [b]$ <input type="radio"/> | $d \in [\{b, c\}]$ <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | ? |
|---|-------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS: Nem, nem, igen, nem.

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

(10) Tekintsük az előző feladatban műveletábrázattal megadott  $A = (A; *)$  grupoidot. Az alábbi téglalapban megadott osztályozások közül melyek azok, amelyekhez a grupoid kongruenciarelációi tartoznak?

|   |                                                |                                                |                                            |                                                |                                 |   |
|---|------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------|---|
| ? | $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ <input type="radio"/> | $\{\{a, b, c\}, \{d\}\}$ <input type="radio"/> | $\{\{a, b, c, d\}\}$ <input type="radio"/> | $\{\{a, c\}, \{b, d\}\}$ <input type="radio"/> | egyik sem <input type="radio"/> | ? |
|---|------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------------------|------------------------------------------------|---------------------------------|---|

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG

MEGOLDÁS: Nem, nem, igen, nem.

dmnv2-02.C1-A \_\_\_\_\_ CzG